XIANXINGDAISHU
TONGBU FUDAO

M A T H

线性代数

同步辅导

配同济·第五版

主　编　张天德　苗丽安
主　审　吴　臻

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

XIANXINGDAISHU
TONGBU FUDAO

线性代数

同步辅导

配同济•第五版

主　编　张天德　苗丽安
副主编　刘庆红　刘清华
主　审　吴　臻

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导/张天德,苗丽安主编.—济南:山东科学技术出版社,2011
ISBN 978-7-5331-5724-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张…②苗… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 239316 号

线性代数同步辅导

主编 张天德 苗丽安

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)82098071

印刷者:山东人民印刷厂泰安厂

地址:泰安市灵山大街东首
邮编:271000 电话:(0538)6119320

开本:720mm×1020mm 1/16
印张:15.5
版次:2011 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5724-1
定价:22.00 元

前　言 QIANYAN

线性代数是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《线性代数》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为帮助读者学好线性代数，我们编写了《线性代数同步辅导》，该书与同济大学数学系主编的《线性代数》（第五版）完全配套，它汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，本书将会成为读者学习《线性代数》的良师益友。

该书章节的划分和内容设置与同济大学的《线性代数》（第六版）完全一致。每节内容由三部分组成：一、主要内容归纳；二、经典例题解析及解题方法总结；三、教材习题解答。每章最后还有两部分内容：总习题解答及自测题与参考答案。

主要内容归纳：该部分对每节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，并对较易出错的地方作了适当的解析。

经典例题解析及解题方法总结：列举每节不同难度、不同类型的重点题目，给出详细解答，以帮助读者理清解（证）题思路，掌握基本解（证）题方法和技巧；解题前的分析和解题后的方法总结，可以使读者收到举一反三，融会贯通之功效。

习题解答：每节与每章后都给出了与教材内容同步的习题解答，利用它读者可自行检查学习效果。

自测题是编者从多年教学及考研辅导中精心挑选的典型题目。目的是在读者对各章内容有了全面了解之后，给读者一个检测、巩固所学知识的机会，从而使读者对各种题型有更深刻的理解，并进一步掌握所学知识点，做到能灵活运用。

本书由张天德、苗丽安主编，刘庆红、刘清华副主编，山东大学吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。清华大学张锋、中国科学技术大学刘志刚、山东大学孙鹏、吴远莹、李娜、乔凤也作了一定的校正工作，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

编　者

2010.12.24

目 录 MULU

线性代数
同步辅导

第一章 行列式

行列式是常用的一种计算工具，学习行列式，一是要理解行列式的概念，二是要掌握行列式的性质.并运用这些性质进行行列式的计算.本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

第一节 二阶与三阶行列式

一、主要内容归纳

1. 二阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

2. 三阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$ 称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

3. 对角线法则

三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积，其求和规律遵循图 1-1 所示的对角线法则：

实线联结的三个元素乘积之和减去虚线联结的三个元素乘积之和.

注：此法则只适用于二阶和三阶行列式.

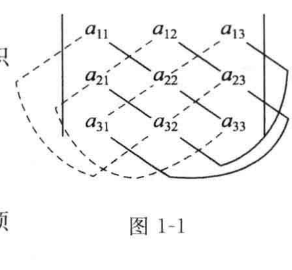

图 1-1

4. 本节重点

计算二阶与三阶行列式，在行列式展开过程中，特别要注意各项的正负号是否正确.

二、经典题型解析及解题方法总结

【例 1】 计算下列二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

解 (1)原式$=2\times 3-1\times(-1)=7$

(2)原式$=(x-1)(x^2+x+1)-1\cdot x^2=x^3-x^2-1$

(3)原式$=1\times 1-\log_a b\cdot\log_b a=0$

方法总结：

二阶行列式的计算可由定义直接计算.

【例 2】 计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解 (1)原式$=1\times1\times1+3\times3\times3+2\times2\times2-2\times1\times3-3\times2\times1-1\times3\times2=18$

(2)原式$=0\times0\times0+0\times b\times d+0\times a\times c-0\times0\times0-b\times a\times0-0\times d\times c=0$

方法总结：

三阶行列式的计算可利用对角线法则直接计算.

【例 3】 用行列式解下列方程组

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ 5x_1-7x_2=29 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} bx-ay+2ab=0 \\ -2cy+3bz-bc=0 \\ cx+az=0 \end{cases}$ $(abc\neq 0)$

解 (1)由于系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0$

又 $D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93, D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62.$

故方程组的解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-93}{-31}=3, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{62}{-31}=-2.$

(2)由系数行列式 $D=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc\neq 0.$

又 $D_1=\begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=5a^2bc, D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5ab^2c,$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5abc^2.$$

故方程组的解为 $x=\dfrac{D_1}{D}=-a, y=\dfrac{D_2}{D}=b, z=\dfrac{D_3}{D}=c$.

方法总结：

利用方程组与行列式的关系，可求线性方程组的解.

【例 4】 行列式的应用

(1)当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=3\times x\times x+4\times x\times 0+1\times 0\times 1-x\times x\times 1-3\times 0\times 0-1\times 4\times x=2x(x-2)$

$=0$

解方程可得 $x=0$ 或 $x=2$.

方法总结：

本题可先通过行列式的计算将等式化成一元二次方程的形式，再解方程即可求得 x 的值. 若此题改成 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0$，同样可求得 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$.

(2)求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

解 由三阶行列式的定义可知，行列式展开后只有主对线上三个元素的乘积才出现 x^3 项，其系数为 $2\times(-1)\times 1=-2$.

方法总结：

此类题型可利用对角线法则展开，再考虑行列式的不同行不同列的乘积中出现 x^n 的项. 然后将它们的系数相加即可.

第二节　全排列及其逆序数

一、主要内容归纳

1. 排列与逆序

(1)由 1,2,3…n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列,通常记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

(2)在一个排列($i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$)中,若数 $i_t > i_s$,则称数 i_t 与 i_s 构成一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

(3)若逆序数为奇数称此排列为奇排列,若为偶数,则称此排列为偶排列.

2. 逆序数的计算方法

任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可用如下两种方法计算:

(1)$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数$+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数$+\cdots+ i_{n-1}$后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

(2)$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数$+ i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数$+\cdots+ i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

3. 本节重点

求一个排序的逆序数,难点是求含有字母的排列的逆序数.

二、经典题型解析及解题方法总结

【例 1】 求下列排列的逆序数.

(1)36715284　　(2)134782695

解 (1)$\tau(36715284)=2+4+4+0+2+0+1=13$

(2)$\tau(134782695)=0+0+0+0+4+2+0+4=10$

方法总结:

求逆序数一般按内容归纳中逆序数的计算方法.

第(1)小题采用的方法是计算出排列中每个元素后面比它小的数码个数之和.再求出该排列中所有元素的逆序数之总和.

第(2)小题采用的是计算方法(2).

【例 2】 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)$n(n-1)\cdots 21$　　(2)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

解 (1)$\tau(n(n-1)\cdots 2,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

对$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性判断,需按以下情况进行讨论:

当 $n=4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数;

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$为奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$为奇数.

因此，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，此排列为奇排列.

(2)排列中前 n 个数 $1、3\cdots(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前 n 个数和后 n 个数之间才构成逆序.

$\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

此题奇偶性的讨论与(1)相同.

方法总结：

对含字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系及其奇偶性.

【例 3】 若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解 如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_1 有 k_1 个逆序.那么在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_1 应有 $(n-1)-k_1$ 个逆序.若原排列关于 x_2 有 k_2 个逆序，则在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_2 应有 $(n-2)-k_2$ 个逆序.…依此类推，若原排列关于 x_n 有 k_n 个逆序，则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_n 有$(n-n)-k_n$ 个逆序.

又因 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$，故排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_1)&=[(n-n)-k_n]+\cdots+[(n-2)-k_2]+[(n-1)-k_1]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k=\frac{1}{2}n(n-1)-k.\end{aligned}$$

方法总结：

(1)本题利用了排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中逆序与排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的顺序之间的互补性质.即：若排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_t 有 k_t 个逆序，则有$(n-1)-k_t$ 个顺序，可推得 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 排列中关于 x_t 就有$(n-1)-k_t$ 个逆序，从而可计算 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.本题重点考察了 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中逆序与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 顺序之间有类似的互补的性质.

(2)本题也可采用下面方法直接求得.

显然，$x_1x_2\cdots x_n$ 中任意不同的 x_i 与 x_j 必在排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中构成逆序.而且只能在一个中构成逆序.因此，这两个排列的逆序数的和，即为从 n 个元素中取两个不同的元素的组合数 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$.但由于 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}-k$.

第三节 n 阶行列式的定义

一、主要内容归纳

1. n 阶行列式的定义

排成 n 行 n 列的 n^2 个数 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$ 的行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和. n 阶行列式通常简记作 $\det(a_{ij})$.

说明(1) n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,共计 $n!$ 项.

(2)一阶行列式 $|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

2. 几种特殊行列式的结果

(1)上三角、下三角、对角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2)副对角线方向的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \unicode{x22F0} & \vdots \\ a_{(n-1)_1} & a_{(n-1)_2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \unicode{x22F0} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \unicode{x22F0} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

3. 本节重点

掌握 n 阶行列式的定义,并熟记几种特殊行列式的结果.

二、经典题型解析及解题方法总结

【例 1】 利用定义计算

(1) $D_4=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$

解 (1)由行列式的定义，D_4 中的一般项为

$$\tau^{(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j1}a_{2j2}a_{3j3}a_{4j4}.$$

而 D_4 中第一行的非零元素为 $a_{11}=x_1\quad a_{13}=y_1$ 故 $j_1=1,3$.

同理由第 2、3、4 行可求 $j_2=2,4;j_3=1,3;j_4=2,4$.

又因 $j_1j_2j_3j_4$ 能组成四个 4 级排列：1234；1432；3214；3412.

因此有 $D_4=x_1x_2x_3x_4-x_1y_2x_3y_4-y_1x_2y_3x_4+y_1y_2y_3y_4$
$=(x_1x_3-y_1y_3)(x_2x_4-y_2y_4)$

(2)因为该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素，由 n 阶行列式的定义知 D_n 只含有一项为 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$，其中元素的下标恰为它们所在行的下标. 且为一个标准排列. 而这一项的列标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n$. 这个排列的逆序数为

$$t=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$故\ D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

方法总结：

(1)对含零元素较多的行列式，可直接利用定义计算. 只需求出所有非零项再求和即可.

(2)为求出所有非零项，将行标按标准顺序排列，再讨论列标所有可能的取值. 具体做法是：对一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，先用第一行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码，再用 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码，进而求 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 级排列，该 n 级排列的个数即为所有非零项的项数. 如果这样的非零项一个也没有，则该行列式的值为零.

(3)特别注意，四阶以上行列式的计算不能采用对角线法则，对角线法则只适用于二阶和三阶行列式.

【例 2】 仅用行列式定义，证明

(1)$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ (2)$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

证 (1)除去符号差异外，行列式 D 的一般项可表示为 $a_i b_j c_k d_s e_t$

其中 $ijkst$ 为 1,2,3,4,5 的任意一个排列，而且 $c_k, d_r, e_r (r=3,4,5)$ 都是零.

由于 k,s,t 为 1,2,3,4,5 中的三个不同数，故至少要取到 3,4,5 中的一个数.因此在 D 的展开式的每一项中至少有一个因子为 0.从而 D 的每项都是零，故 $D=0$.

(2)由行列式定义 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$

要使 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$，必须 j_1, j_2 取 1 或 2，而 $j_1 j_2 j_3 j_4$ 是 1,2,3,4 的一个全排列，故 j_3, j_4 只能取 3 或 4，于是

$D=(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}+(-1)^{\tau(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43}+(-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44}+(-1)^{\tau(2143)}$ $a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}=a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}-a_{11} a_{22} a_{34} a_{43}-a_{12} a_{21} a_{33} a_{44}+a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,

所以等式成立.

方法总结：

(1)利用行列式定义展开后，行列式的项中有一元素为零时，该项值为零.用此可化简行列式.

(2)若一个 n 阶行列式中零元素的个数大于 n^2-n，即 D 的展开式中每一项至少有一个零因子，则此行列式等于零.

第四节 对换

一、主要内容归纳

1. 对换

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的一个交换称为一个对换.

2. 对换的性质

(1)对换改变排列的奇偶性.

(2)奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

3. n 阶行列式定义的其他形式

n 阶行列式可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{i1j1}a_{i2j2}\cdots a_{injn}$.

其中 $t=\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$,即行标与列标排列的逆序数之和.

行列式的三种定义形式

$$\begin{aligned}\det(a_{ij})&=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}\end{aligned}$$

二、经典题型解析及解题方法总结

【例 1】 利用对换的性质证明:

证明 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇排列与偶排列的个数相等各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

证 在 n 级排列中($n\geqslant 2$),所有排列数为 $n!$ 个,设其中奇偶排列分别为 m,n 个,设 $m\neq n$. 对 m 个奇排列一次对换后,得到 m 个偶排列,则 $m\leqslant n$. 同理可证 $n\leqslant m$. 所以 $m=n$. 又因全排列为 $n!$ 个,故 $m=n=\frac{1}{2}n!$.

方法总结:

(1)本题利用了对换的性质,对换改变排列的奇偶性.通过反证法加以证明.

(2)本题也可利用行列式的性质(第五节)及行列式的定义加以证明.

由行列式性质知 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$,而由行列式定义知

$D_n=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}\cdot 1$,其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots j_n$ 的某一排列,该和式共有 $n!$ 项,且每项的绝对值都是 1. 又 $D_n=0$,则和式中 1 和 -1 的个数相等,均为 $\frac{n!}{2}$ 个,这说明 $1,2\cdots,n$ 的所有排列中,奇偶排列各占一半.

【例 2】 若 $(-1)^{\tau(i432k)+\tau(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是五阶行列式的一项,则 i、j、k 应为何值?此时该项的符号是什么?

解 由行列式的定义,每一项中的元素取自不同行不同列.

故有 $j=3$.(j 只能取 3).此时 $i=1$ 时 $k=5$ 或 $i=5$ 时 $k=1$.

当 $i=1,j=3,k=5$ 时，$\tau(14325)+\tau(52314)=9$，

故 $-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$ 为 D 的一项；

当 $i=5,j=3,k=1$ 时，$\tau(54321)+\tau(52314)=16$，

故 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$ 也为 D 的一项.

方法总结：

本题利用行列式的定义，可确定 i、j、k 的取值.

再利用排列的奇偶性来确定该项的符号.

第五节　行列式的性质

一、主要内容归纳

1. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式可写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素，其他元素不变.

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

2. 利用行列式性质计算行列式

反复利用行列式的性质，把给定的行列式化为三角形行列式，此时行列式的值即为该三角形行列式主对角线上元素的乘积.

3. 本节重点

行列式的性质和计算. 难点是观察行列式的特点利用行列式的性质简化行列式，寻找恰当的方法加以计算.

二、经典题型解析及解题方法总结

【例 1】　利用行列式的性质计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　　(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$