◎ 王向东 主编

浙大优学

金牌奥赛高分教材

JINPAI AOSAI
GAOFEN JIAOCAI

数学 7年级

QINIANJI SHUXUE

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

金牌奥赛高分教材

数学 七年级

丛书主编 王向东 曾雄峰
本册主编 王向东 张彩霞
编　　委 曲军恒 熊　彦
　　　　 金梦韩 何夏明

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛高分教材．数学．七年级／王向东，曾雄峰主编．—杭州：浙江大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-308-09509-9

Ⅰ．①金… Ⅱ．①王… ②曾… Ⅲ．①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 279328 号

金牌奥赛高分教材．数学．七年级
王向东 曾雄峰 主编

责任编辑 杨晓鸣 冯慈璜(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 13.5
字 数 329 千字
版 印 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-09509-9
定 价 26.00 元

目 录

第一章

整数基础(一)

§1.1 奇数和偶数

我们称能被 2 整除的整数为偶数,不能被 2 整除的整数为奇数. 通常我们把偶数记作 $2n$,奇数记作 $2n+1$(n 为整数). 易知,一个整数或为偶数,或为奇数,二者必居其一,这是整数最基本的性质. 此外,奇数和偶数还有如下运算性质.

性质 1 奇数≠偶数.

性质 2 两偶数相加(减)的和(差)为偶数;两奇数相加(减)的和(差)为偶数;奇数与偶数相加(减)的和(差)为奇数.

性质 3 奇(偶)数与偶数的乘积为偶数.

性质 4 两个连续的整数中,必有一个是奇数,一个是偶数;两相邻整数之和是奇数,之积是偶数.

性质 5 若干个整数之和为奇数,则其中至少有一个奇数;奇数个整数之和为偶数,则其中至少有一个是偶数.

性质 6 若干个整数之积是奇数,当且仅当每个整数都是奇数;若干个整数之积是偶数,当且仅当它们中至少有一个偶数.

例 1 已知 x,y,z 中有两个奇数一个偶数,求证:$(x+1)(y+2)(z+3)$ 一定是偶数.

【分析】 要证明 3 个整数 $x+1,y+2,z+3$ 之积是偶数,根据性质 3,只要证明这 3 个整数中至少存在一个偶数即可.

【证明】 因为 x,y,z 为二奇一偶,所以 $x+y+z$ 为偶数,从而 $(x+1)+(y+2)+(z+3)=(x+y+z)+6$ 为偶数. 根据性质 5,三个数 $x+1,y+2,z+3$ 中至少有一个是偶数. 再根据性质 6,$(x+1)(y+2)(z+3)$ 必为偶数.

例 2 在我国内蒙古草原上,牧民中流传着这样一个数学题:三十六只羊,七天来宰光,宰单不宰双,各宰几只羊?

【分析】 这个问题是这样的:共有 36 只羊,要求用七天杀完,每天杀奇数只,问每天各杀几只羊? 我们用奇偶数的性质来解此题.

【解】 根据条件,七天中要求每天宰羊只数为奇数,那么就有 7 个不同或相同奇数相加,所得的和一定是奇数 而不是偶数. 而题目中羊的总数为 36 只,是偶数,结论与条件矛盾,故此题无解.

例 3 能否将 1999 只电话，按每只电话与 5 只电话相连接的方式连接起来？

【分析】 我们知道，此题的答案只能是：能连接起来或不能连接起来，故我们选假定能连接起来，进行分析，以便得到正确结论.

【解】 如果能按要求连接起来，那么因为一条电话线连接两只电话，1999×5 应是所有电话线条数的两倍，即为偶数. 然而，1999×5 是奇数，故不可能按要求的方式连接起来.

【评注】 在此题中，必须了解“一条电话线连接两只电话”.

例 4 元旦联欢会上，同学们互赠贺卡表示新年的良好祝愿.“无论人数是什么数，用来交换的贺卡的张数总是偶数.”这句话正确吗？试证明你的结论.

【分析】 从“无论人数是什么数”入手，只需考虑人数为奇数或偶数的两种情况，即可得到求解的出发点.

【解】 这句话是正确的. 下面我们证明这一结论：

若联欢会上的人数为偶数，设为 $2m$(m 为整数)，则每个人赠送同学们的贺卡张数应是奇数，即$(2m-1)$. 那么有 $2m(2m-1)=4m^2-2m$，仍是偶数.

若联欢会上的人数为奇数，设为 $2m+1$(m 是整数)，则每个人赠送同学们的贺卡张数应是偶数，即 $2m$. 那么$(2m+1)\cdot 2m$ 仍是偶数. 故“用来交换的贺卡张数总是偶数”是对的.

【评注】 此题中，把“无论人数是什么数”，即人数总是自然数，分为奇数、偶数两类数进行讨论，从而求解，是一种简单的分类讨论形式.

例 5 下列每个算式中，最少有一个奇数，一个偶数，那么这 12 个整数中至少有几个偶数？

$\square+\square=\square$，　　　$\square-\square=\square$，

$\square\times\square=\square$，　　　$\square\div\square=\square$.

【分析】 由于本题所涉及的是奇数与偶数的和(差)或积(商)，故可应用性质 2 进行求解.

【解】 根据已知条件和性质 2 知，加法和减法中至少有一个偶数，乘法和除法算式中至少各有两个偶数. 故这 12 个整数中至少有 6 个偶数.

【评注】 在解此题时，要注意将和与差，积与商并在一起共同研究.

例 6 设有四个正整数，和为 9，求证：它们的立方和不可能为 100.

【分析】 由于四个正整数之和为 9. 9 是奇数，故此题一定要从“奇数个奇数的和为奇数”这一重要性质入手，来分析求解.

【证明】 设四个正整数分别是 a,b,c,d，根据已知条件有 $a+b+c+d=9$.

由于四个正整数之和为 9，是一个奇数，因此这四个正整数只能有奇数个奇数，即可能是“三奇一偶”或“一奇三偶”.

但因为奇数的立方为奇数，偶数的立方为偶数. 所以，在“三奇一偶”情况，四数的立方和将为奇数；在“一奇三偶”情况，四数的立方和也必为奇数，因此均不能为 100.

例 7 在 $1,2,3,\cdots,2002$ 前面任意添上一个正号和负号，它们的代数和是奇数还是偶数？

【分析】 $1+2=3,2-1=1;3+4=7,4-3=1$. 由此可见两个整数之和与这两个整数之差的奇偶性质是相同的. 这正是解此题的理论依据.

【解】 因为两个整数之和与两个整数之差的奇偶性相同,所以在给出的数字前面添上正号和负号不改变其奇偶性.而

$$1+2+\cdots+2002=\frac{2002(2002+1)}{2}=1001\times2003$$

为奇数,于是已知数字和为奇数.

另解:在 1,2,…,2002 的数中各有 1001 个奇数和偶数,据性质 2 知这些数和为奇数.

【评注】 此题通过对一些具体的数字的研究推出一般性结论,是由于已知数为有限整数.另解之优点是不必作具体数字演算.

例 8 能否把 1,1,2,2,…,30,30 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着两个数,…,两个 30 之间夹着三十个数?试说明理由.

【分析】 我们知道这 30 对数共 60 个,我们可将之分成奇、偶两类数加以讨论,以便求解.

【解】 假设能按要求排成一行,于是 60 个数被安排在 60 个位置上.为了方便起见,给他们所在的位置依次编上号.具体研究一个个对象是困难的,不妨把所有数分成奇数、偶数两大类试一试.

(1) 先考察偶数,设一个偶数 m,两个 m 之间有 m 个数.这说明若有一个 m 在奇数位置,则另一个 m 必在偶数位置,反之亦然.于是 15 对偶数分别占据了 15 个奇数位,15 个偶数位;

(2) 再看一个奇数 n,两个奇数 n 之间夹着 n 个数.只要一个 n 占据奇数位,则另一个 n 也占据奇数位,即成对占据奇数位.

设有 k 对奇数占据奇数位,因 60 个位置中有 30 个奇数位,综上所述,这些奇数位应被 15 个偶数和 $2k$ 个奇数占据,则

$30=15+2k$, 所以 $2k=15$.

这显然是不可能成立的,所以不能按要求排成一行.

【评注】 从上述几例可见,巧妙地利用奇偶数的基本性质,可以令人满意地解决问题.数的奇偶性的神奇作用由此可见一斑.

奥赛习题 1—1

1. 能否在括号内填入整数,使下述等式成立:

$(\quad)^2+7^2+9^2=(\quad)^2$

2. 四个自然数 $n_1>n_2>n_3>n_4$,$n_1-n_4=4$,$n_1\times n_4$ 是奇数,且 $n_1+n_2+n_3+n_4=11$,则 $n_1\times n_2\times n_3\times n_4=$________.

3. 有五个连续偶数,已知第三个数比第一个数与第五个数和的 $\frac{1}{4}$ 多 18,这五个偶数之和是________.

4. 求证:如果一个整数的平方是偶数,那么这个数也是偶数.

5. 求证:四个正整数之和为 13,则它们的立方和不可能是 120.

6. 有 n 个整数,其积是 n,和为零,求证:数 n 能被 4 整除.

7. 在 1,2,3,…,2001 之间填上"+"、"-"号,求和式可以得到最小的非负数是多少?

8. 在一次聚会中,每个出席者都同奇数个人握手问好,试判断参加聚会的人数是奇数还是偶数?

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2003}$ 是 1,2,3,…,2003 的一个排列,求证:$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_{2003}-2003)$ 为偶数.

10. 设 a 和 b 是两个相邻的整数,$c=ab$,$M^2=a^2+b^2+c^2$,求证:M^2 是奇数.

§1.2 整数的整除性

定义 设 a,b 是整数,$b\neq0$. 如果有整数 q,使得 $a=bq$,那么称 a 能被 b 整除,或称 b 整除 a,记作 $b|a$.

定理 如果 a,b 是两个整数,$b\neq0$. 那么有而且仅有两个整数 q,r,可使

$a=bq+r(0\leqslant r<|b|)$.

1. 关于整除的若干性质

性质 1 如果 $a|b,b|c$,那么 $a|c$. 如 $2|8,8|24$,必有 $2|24$.

性质 2 k 是任意整数,若 $b|a$,则 $b|ka$.

如 $2|6$,5 是整数且 $5\times6=30$,则 $2|30$.

性质 3 如果 $a|b,a|c$,那么,$a|(b\pm c)$.

如 $2|6,2|8$,必有 $2|(6\pm8)$.

性质 4 如果 $m|ab,(m,a)=1$,那么 $m|b$.

如 $3|9\times7,(3,7)=1$,必有 $3|9$.

我们用符号 (m,a) 表示 m,a 两数的最大公约数. 如果 $(m,a)=1$,那么称 m,a 两数互质. $[a,b]$ 表示 a,b 两数的最小公倍数.

性质 5 如果 $a|c,b|c$,且 $(a,b)=1$,那么 $ab|c$.

如 $3|21,7|21$,且 $(3,7)=1$. 必有 $3\times7=21|21$.

性质 6 如果 $a|m,b|m$,那么 $[a,b]|m$.

例 1 如果 n 是自然数,n^3+11n 必能被 6 整除.

【分析】 n^3+11n 是关于 n 的多项式,可通过多项式的变形,达到其被 6 整除的目的.

【解】 $n^3+11n=n^3-n+12n=n(n^2-1)+12n=(n-1)n(n+1)+12n$,

因为 $(n-1),n,(n+1)$ 是三个连续的自然数,所以必有一个是偶数,且必有一个是 3 的倍数,$(n-1)n(n+1)$ 可被 2 与 3 的乘积 6 整除,而 $12n$ 显然可被 6 整除.

所以,n^3+11n 也可被 6 整除.

【评注】 此题中,我们同时证明了三个连续自然数的乘积必能被 6 整除.

例 2 当 n 为整数时,求证:$n(n+1)(2n+1)$ 为 6 的倍数.

【分析】 在例 1 中,我们已证明了三个连续自然数能被 6 整除. 本题可考虑将已知数转

化为三个连续自然数的情况,使问题得以解决.

【证明】 $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)[(n-1)+(n+2)]$

$=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$,

由于$(n-1)n(n+1)$与$n(n+1)(n+2)$,

均为三个连续自然数之积,其中必含有偶数与3的倍数.

所以$6\mid(n-1)n(n+1)$,且$6\mid n(n+1)(n+2)$.

故$6\mid n(n+1)(2n+1)$.

【评注】 本例中$2n+1=(n-1)+(n+2)$是十分关键的一个步骤,这一步的变形应根据证题的需要而进行.

2. 整数的整除的常用判别方法

(1)被2整除的数的判别:末位数能被2整除的数必能被2整除;

(2)被5整除的数的判别:末位数为零或能被5整除的数必能被5整除;

(3)被4整除的数的判别:一个数的末两位数字组成的数能被4整除,则该数必能被4整除;

(4)被8整除的数的判别:一个数的末三位数字组成的数能被8整除,则该数必能被8整除;

(5)被3整除的数的判别:一个数的各位数字之和能被3整除,则这个数必能被3整除;

(6)被9整除的数的判别:一个数的各位数字之和能被9整除,则该数必能被9整除;

(7)被11整除的数的判别:若一个数自右至左所有偶数位上的数的和与奇数位上的数的和的差能被11整除,则该数必能被11整除;

(8)能被7、11、13整除的数的判别:能被7、11、13整除的数的特征是奇位千进位的总和与偶位千进位总和的差(或者反过来)能被7、11、13整除.

例3 判定2889304能否被11整除.

【分析】 这是一个七位数,可考虑先求出其奇数位上4个数的和与其偶数位上3个数的和,利用(7)解之.

【解】 因为$4+3+8+2=17$,又$0+9+8=17$,

$17-17=0$,0能被11整除.

故该数能被11整除,即$11\mid2889304$.

【评注】 此题解题过程中紧紧扣住了被11整除的数的性质,叙述简捷.

例4 判断2206525321能否被7,11,13整除.

【解】 先分节,得2,206,525,321,

奇位千进位之和 $321+206=527$,

偶位千进位之和 $525+2=527$,

奇位千进位之和与偶位千进位之和的差:$527-527=0$.

因为0能分别被7,11,13整除,

故2206525321能分别被7、11、13整除.

【评注】 将一个整数,每三位一撇分为若干节,称为千进位记数法.由右向左数,处于1,3,5,…奇数位置的每一节,称为奇位千进位;处于2,4,6,…偶数位置的每一节称为偶位千进位.

例 5 在 568 后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能分别被 3，4，5 整除，且使这个数值尽可能小.

【分析】 在解此题时，应按照给定规律，通过分析推理，逐步转化，寻求或者构造出所求的数字.

【解】 设所求的六位数为$\overline{568abc}$（a、b、c 分别表示百位、十位、个位上的数字）.

因为$\overline{568abc}$被 5 整除，所以 c 只能是 0 或 5；

因为$\overline{568abc}$被 4 整除，所以$\overline{bc}$是 4 的倍数. 于是 c 只能取 0.

要使$\overline{568abc}$的数值尽可能的小，$\overline{bc}$必须取 4 的倍数中的最小数，即$\overline{bc}=20$.

由于$\overline{568abc}$被 3 整除，$5+6+8+a+b+c=21+a$ 是 3 的倍数，即 a 可取 0，3，6，9；

要使$\overline{568abc}$尽可能的小，故 a 必须取 0.

所以$\overline{568abc}=568020$.

【评注】 此题从已知数被 5 整除，被 4 整除，被 3 整除三个层次加以分析，最终得到结论. 这种分析方法十分重要. 应加以掌握.

例 6 已知 $7^{82}+8^{161}$能被 57 整除. 求证：$7^{83}+8^{163}$也能被 57 整除.

【分析】 该题若直接算出幂去检验太繁，化为连续整数的积也很困难. 这里，我们应用已知条件以 7^{83} 为主拼凑可得结论，读者不妨以 8^{163} 为主拼凑一试.

【证明】 $7^{83}+8^{163}=7(7^{82}+8^{161})-7\times8^{161}+8^{163}=7(7^{82}+8^{161})+8^{161}(8^2-7)=7(7^{82}+8^{161})+8^{161}\times57$，

因为 $7^{82}+8^{161}$ 和 57 都能被 57 整除.

所以 $7^{83}+8^{163}$ 也能被 57 整除.

【评注】 此题中我们应用了"拼凑"的方法. 这种方法在证明整除的问题中是常用方法. 读者可按分析中指出，将此题以 8^{163} 为主拼凑试一试. 以便掌握这种方法.

奥赛习题 1—2

1. 下列各数中能被 3 整除的数是 （　　）

A. 54327　　B. 64531　　C. 527　　D. 7321

2. 下列各数中能被 4 整除的是 （　　）

A. 534　　B. 724　　C. 962　　D. 3350

3. 下列各数中能被 8 整除的是 （　　）

A. 3462　　B. 7432　　C. 5948　　D. 9754

4. 下列各数中能被 9 整除的是 （　　）

A. 60847　　B. 3514　　C. 31196　　D. 71235

5. 下列各数中能被 11 整除的数是 （　　）

A. 3312214554　　B. 632473　　C. 1234789　　D. 300121

6. 试证：三个连续整数的乘积能被 6 整除.

7. 试证：三个连续整数的立方和能被 9 整除.

8. 设 N 是整数，证明 N^5 与 N 的末位数字一定相同.

9. 求证：$\overline{abcabc}$能被 11 整除.

10. 把 19,20,21,…,79,80 这些数连写成数 $N=192021\cdots7980$，试证：$1980|N$.

§1.3 约数、倍数

对于两个整数 a、b(其中 $b\neq0$)，若 $a=bq$ 的整数 q 存在时，则称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数.

若正整数 m 是两个非零整数 a、b 的约数时，则称 m 是 a、b 的公约数. 若正整数 n 具有下列性质时，则称 n 是 a、b 的最大公约数：

(1) n 是 a、b 的公约数，

(2) 若 m 是 a、b 的公约数，则 m 是 n 的约数.

对于任意两个非零的整数 a、b，有最大的公约数 n 存在，且存在满足 $n=ax+by$ 的整数 x，y.

若两个非零的整数 a、b 的最大公约数是 1，则称 a、b 互素.

a、b 互素的充要条件是：1 能表示为 $1=ax+by$(x、y 是整数)的形式.

设 a、b 是所给的整数，当 x、y 取遍所有的整数时，所有 $ax+by$ 的值中的最小正整数恰为 a、b 的最大公约数.

例如所有形如 $12x+18y$(x，y 是整数)的整数集合，实际上就是 6 的倍数集合.

如果一个大于 1 的正整数 p，不存在 p 本身及 1 以外的约数，那么这样的正整数 p 叫做素数.

(素数)2，3，5，7，11，13，…

下面给出素数的几个性质：

性质 1 a 与 b 互素时，若 bc 被 a 整除，则 c 必被 a 整除.

性质 2 若整数积 ab 被素数 p 整除，则 a、b 中至少有一个必被 p 整除.

性质 3 若素数 p 是 $a_1a_2\cdots a_n$ 的约数，则 p 必为 a_1 或 a_2 或…或 a_n 的约数.

性质 4 任意正整数 $a(\geqslant2)$可以分解为素数的积，而且，如果不考虑顺序的话，那么这种表示方法只有一种.

〔关于最大公约数的计算方法的定理〕

定理 设 a、b 是正整数，取满足 $a=bq+r(0\leqslant r\leqslant b)$的整数 q，r. 这时

(1)若 $r=0$，则 $(a,b)=b$；

(2)若 $0<r<b$，则 $(a,b)=(b,r)$. 其中，符号 (a,b)表示 a 与 b 的最大公约数.

设 A、B 的最大公约数为 G，最小公倍数为 L，若 $A=aG$，$B=bG$，则

(1) a、b 互素；

(2) $L=abG=aB=bA$，$AB=GL$.

例 1 105 的约数共有几个?

【分析】 可将 105 分解质因数，再逐一讨论其因数形成的约数的个数.

【解】 共有 8 个.

因为 $105=3\times5\times7$,所以它的约数为 1,3,5,7,15,21,35,105.

【评注】 此题虽然简单,但也是最基础的知识,要掌握好此类题目.

例 2 在 $1,2,3,\cdots,100$ 这前 100 个正整数中任取 27 个数,证明这 27 个数中至少有两个数不互质.

【分析】 可考虑将这 100 个数分成若干类加以讨论.

【证明】 我们把这 100 个自然数按以下的办法来进行分类:

(1)1 单独作一类;

(2)2 的倍数作一类;

(3)3 的倍数中不含约数 2 的数作为一类;

(4)5 的倍数中不含约数 2、3 的数作为一类;…

因为 100 以内共有 25 个素数,所以 100 以内的数可以这样分成 26 类. 这样的分类具有以下特点:

(1)每个数都分在一个类内且只分在一个类内;

(2)每个类中的任意两数都不互素.

我们从这 26 类中任取 27 个数,就至少在一类里取了两个数,这两个数就不互素.

【评注】 此题这种分类实际上运用的是"抽屉原则"的思想,这种方法在"抽屉原则"一节中还会专题介绍.

例 3 设有 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其中每一个不是 1 就是 -1,且

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0,$$

试证:n 是 4 的倍数.

【分析】 我们可从 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每一个不是 1 就是 -1,来分析. $y_i=\frac{x_i}{x_{i+1}},(i=1,2,\cdots,n-1),y_n=\frac{x_n}{x_1}$ 的取值,结合 $y_1+y_2+\cdots+y_n=0$ 来解之.

【证明】 设 $y_i=\frac{x_i}{x_{i+1}},(i=1,2,\cdots,n-1),y_n=\frac{x_n}{x_1}$,

则 y_i 不是 1 就是 -1,但 $y_1+y_2+\cdots+y_n=0$,故其中 1 与 -1 的个数相同. 设为 k,于是 $n=2k$. 又 $y_1y_2y_3\cdots y_n=1$,即 $(-1)^k=1$,故 k 为偶数. 因此,n 是 4 的倍数.

【评注】 在此题中,由 $n=2k$,$y_1y_2y_3\cdots y_n=1$,得到 $(-1)^k=1$ 至关重要. 这是 1 与 -1 的个数相同的一种灵活应用. 要认真体会这一点.

例 4 化简:$\frac{194483585}{427863887}$.

【分析】 要从数的整除性的角度考虑分子和分母的公因数,以便达到化简之目的.

【解】 分子的数字末位等于 5,因而它可被 5 整除. 分母的奇位数字和与偶位数字和之差等于 $32-21=11$. 因此,分母可被 11 整除,得

$$\text{原式}=\frac{38896717\times5}{38896717\times11}=\frac{5}{11}.$$

【评注】 此题正确地使用了数的整除性的知识,在这类化简题目中,应用这种方法解题不仅目的性强,而且简单.

例 5 已知两数和是 60,它们的最大公约数与最小公倍数之和是 84,求此两数.

【解】 设所求两数为 x,y,且$(x,y)=d$

令 $x=ad,y=bd$,则$(a,b)=1$.根据题意有:

$$\begin{cases}a+b=\dfrac{60}{d},\\1+ad=\dfrac{84}{d}.\end{cases}$$

由于$(60,84)=12$,所以 $d=1,2,3,4,6,12$.

而当 $d=1,2,3,4,6$ 时,方程组无解.

当 $d=12$ 时,方程组变为$\begin{cases}a+b=5,\\ab=6.\end{cases}$

解得 $a=2,b=3$ 或 $a=3,b=2$.

故所求的两数为:$x=24,y=36$.

【评注】 遇到这类问题,可设 $x=ad,y=bd$.其中$(x,y)=d$,则$(a,b)=1$,是常用的方法,这样可以把问题归纳为两个互质数的和与积的问题.

奥赛习题 1—3

1. 若在两数中,大数的三倍为小数的四倍,且两数之差为 8,则两数中大数是 ( )

A. 16 B. 24 C. 32 D. 44

2. 若 6432 与 132 的最大公约数减去 8,则它将等于 ( )

A. -6 B. -2 C. 3 D. 4

3. 一个数被 10 除余 9;被 9 除余 8;被 8 除余 7;…被 2 除余 1.此数为 ( )

A. 419 B. 1259 C. 2519 D. 39

4. 试求 5746320819 乘以 125 的值.

5. 把数 316 表示成两个数之和,使其中一个可被 13 整除,另一个可被 11 整除.

6. 自然数 n,除以 3 余 2,除以 4 余 3,除以 5 余 4,除以 6 余 5,试求满足这些条件的 n 中最小的一个.

7. 试证自然数 n 和 n^2+2 的公约数(1 除外)只有 2.

8. 试求最大公约数为 54,最小公倍数为 1944 的两个正整数.

§1.4 整数的十进位数码表示法

通常,凡是整数都是用十进位制表示的.例如 53,609,4871 等,它们的意义是,这些数分别表示为 $5\times10+3$,$6\times10^2+9$,$4\times10^3+8\times10^2+7\times10+1$.

一般地,任何一个 n 位的自然数都可以表示为:

$$a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_3\times10^2+a_2\times10+a_1 \quad ㊅$$

其中,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$表示数码,且 $0\leqslant a_i\leqslant9$,$a_n\neq0$. 上述表达式对于确定的自然数 N 显然是唯一的. 有时,为了简便起见,常将这个数记为 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1}$

整数的十进位数码表示法常应用于有关整数的一些题中,从上节例、习题中,我们已经初步了解了这类问题. 下面我们深入举例来说明问题.

例 1 有一个四位数,已知其十位数字减去 2 等于个位数字,其个位数字加上 2 等于其百位数字,把这个四位数的四个数字反着次序排列所成的数与原数之和等于 9988. 试求这个四位数.

【分析】 可将所求四位数表示成㊅式的形式,以便利用其和反序数的关系列式来解决问题.

【解】 设所求的四位数为 $a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$ 依题意,得

$(a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d)+(d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a)=9988$

即 $(a+d)\times10^3+(b+c)\times10^2+(b+c)\times10+(a+d)=9988$

比较等式两端末两位数字,得 $a+d=8$,于是 $b+c=18$;

又因为 $c-2=d$,$d+2=b$;

所以 $b-c=0$.

从而解得:$a=1$,$b=9$,$c=9$,$d=7$.

故求的四位数为 1997.

【评注】 由本例可见,将四位数用十进位数码表示,有助于将已知条件转化为简单的等式,从而解决问题.

例 2 已知一个三位数,它的百位数字加上个位数字再减去十位数字所得的数是 11 的倍数. 证明:这个三位数也是 11 的倍数.

【分析】 此题可设三位数为

$$\overline{abc}=a\times10^2+b\times10+c$$

从中通过变形,产生 11 的倍数,进而解决问题.

【解】 设三位数为$\overline{abc}$,则

$$\overline{abc}=a\times10^2+b\times10+c$$
$$=(99a+11b)+(a+c-b),$$

由题设知,$a+c-b$ 能被 11 整除,$99a+11b$ 也能被 11 整除.

所以$\overline{abc}$能被 11 整除,即$\overline{abc}$是 11 的倍数.

【评注】 题目解题过程中的恒等变形十分重要,为创造利用已知条件,我们由 $a\times10^2+b\times10+c$ 化出了 $a+c-b$. 其余的必为 $99a+11b$,这就为下一步的分析讨论创造了条件,使证明得以顺利进行.

例 3 一个正整数 N 的各位数字不全相等,如果将 N 的各位数字重新排列,必可得到一个最大数和一个最小数,若最大数与最小数的差正好等于原来的数 N,则称 N 为“新生数”,试求所有的三位“新生数”.

【分析】 可将所有的“新生数”,即三位数的“新生数”写出来,分析后找出最大与最小者,以便求差后解之.

【解】 设 N 为所求的三位"新生数",它的各位数字分别为 a,b,c(a,b,c 不全相等),将其数码重新排列后,连同原数共得到 6 个三位数:$\overline{abc},\overline{acb},\overline{bac},\overline{bca},\overline{cab},\overline{cba}$,设其中最大数为$\overline{abc}$,则最小数为$\overline{cba}$.根据"新生数"定义,得

$$N=\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$$

可知 N 为 99 的整数倍,这样的三位数可能为 198,297,396,495,594,693,792,891,990.这 9 个数中,只有 $954-459=495$.

故 495 是唯一的三位"新生数".

【评注】 先对这些"新生数"进行筛选,选出符合题目要求的数,这是解答数学竞赛题的一种常用方法.

例 4 若一个首位是 1 的六位数$\overline{1abcde}$乘以 3 所得的积是一个末位数为 1 的六位数$\overline{abcde1}$,求原来的六位数.

【分析】 可从六位数的 10 进制表示法入手,考虑将之转化为多项式形式,以便解之.

【解】 设 $\overline{abcde}=x$,则

$$\overline{1abcde}=10^5+\overline{abcde}=10^5+x,$$
$$\overline{abcde1}=10\times\overline{abcde}+1=10x+1.$$

根据题意,得 $3(10^5+x)=10x+1$,即 $x=42857$

故原来的六位数是 142857.

【评注】 此题解题过程中,应用设 $x=\overline{abcde}$,使表示形式大为简化,这种简化表示形式,在解题中应充分注意应用.

例 5 如果一个四位数(从右边算起)奇数位上的数字的总和与它的偶数位上的数字的总和之差是 11 的倍数(包括零在内),那么这个四位数能被 11 整除.若将"四位"换成"五位"时,结果如何?

【分析】 我们可根据四位数的条件,设四位数为$\overline{a_4a_3a_2a_1}$,依照十进位制展开后讨论之.

【证明】 依题意,设所求四位数为

$$\overline{a_4a_3a_2a_1}=a_4\times10^3+a_3\times10^2+a_2\times10+a_1$$
$$=(a_4\times1001-a_4)+(a_3\times99+a_3)+(a_2\times11-a_2)+a_1$$
$$=(a_4\times1001+a_3\times99+a_2\times11)+[(a_1+a_3)-(a_2+a_4)]$$

又 1001,99,11 都是 11 的倍数,

所以$\overline{a_4a_3a_2a_1}=11m+[(a_1+a_3)-(a_2+a_4)]$,($m=91a_4+9a_3+a_2$ 为正整数)

如果$(a_1+a_3)-(a_2+a_4)$是 11 的倍数,那么$\overline{a_4a_3a_2a_1}$也是 11 的倍数.

又设 $N=a_5\times10^4+a_4\times10^3+a_3\times10^2+a_2\times10+a_1$(其中 $1\leqslant a_5\leqslant9,0\leqslant a_4,a_3,a_2,a_1\leqslant9$,且为整数).

$$N=(909\times11+1)a_5+(91\times11-1)a_4+(9\times11+1)a_3+(11-1)a_2+a_1$$
$$=(909a_5+91a_4+9a_3+a_2)\times11+[(a_5+a_3+a_1)-(a_2+a_4)],$$

如果$(a_5+a_3+a_1)-(a_4+a_2)$是 11 的倍数,则 5 位数 N 也是 11 的倍数.

【评注】 此题中 $a_4\times10^3=a_4\times1001-a_4$,$a_3\times10^2=99\times a_3+a_3$ 等变形是此题的关键,这种变形旨在化为 11 的倍数.这在解答整除问题中是常见的.

例 6 试确定最小的正整数 n,其末位数为 6,若将末位的 6 移作首位数,则为原数的