新锐丛书

21世纪高等学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下）

主　编　王国政

副主编　刘璟忠　黎国玲

主　审　韩旭里

復旦大學出版社

新锐丛书

21世纪高等学校教材

高 等 数 学

（下）

主　编　　王国政
副主编　　刘璟忠　黎国玲
主　审　　韩旭里

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册)/王国政主编. 一上海:复旦大学出版社,2005.5
(新锐丛书)
ISBN 978-7-309-05589-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 王… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 099678 号

高等数学(上、下册)

王国政 主编

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 浙江临安市曙光印务有限公司
开 本 787×960 1/16
印 张 36
字 数 666 千
版 次 2005 年 5 月第一版第一次印刷

书 号 ISBN 978-7-309-05589-4/O·361
定 价 52.00 元(上下册)

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

前　言

教材作为高等学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革，全面推进素质教育，培养创新人才中有着举足轻重的地位. 根据教育部《高等数学课程基本要求》与课程改革精神，编者总结了自己多年的教学经验与教改成果编写了本套教材.

本教材有如下特点：

1. 以实例引入概念，并最终回到数学应用中，以加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生应用数学的原理和方法消化吸收工程概念和原理的能力，消化吸收专业知识的能力. 加强了数学建模教学内容，以培养学生将工程问题转化为数学问题的能力. 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算和变换.

2. 本教材恰当地把握教学内容的深度与广度，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性和逻辑性.

3. 本教材引入了工程数值软件 Matlab，将其结合具体教学内容分散在各章中，易教、易学、易懂.

4. 本教材符合高等工科学生的知识结构，便于学生自学. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及熟练的运算能力的培养.

5. 本教材注重数学思想与数学方法的阐述，以培养学生的综合素质，体现数学课程改革的新思路——数学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练功能和文化素质教育功能. 重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

本教材分上下两册，第一章到第七章为上册，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分和定积分的应用、微分方程. 第八章到第十一章为下册，主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、多元函数的积分学、无穷级数.

本教材由王国政主编，刘璟忠、黎国玲任副主编，中南大学韩旭里主审，参加编写的还有：曹爱华、黄江华、周斌、张千宏、万云涛、段志刚等.

罗俊波教授、马维民教授审阅了书稿,并提出许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,时间也较仓促,本书中难免有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

编　者

2005年4月

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就,法国数学家笛卡儿和费马均于17世纪上半叶对此做出了开创性的工作.我们知道,代数学的优越性在于推理方法的程序化.鉴于这种优越性,人们产生了用代数方法研究几何问题的思想,这就是解析几何的基本思想.要用代数方法研究几何问题,就必须沟通代数与几何的联系,而代数和几何中最基本的概念分别是数和点,于是首先要找到一种特定的数学结构,来建立数与点的联系,这种结构就是坐标.通过坐标系,人们建立起数与点的一一对应关系,就可以把数学研究的两个基本对象数和形结合起来,统一起来,于是既可以用代数方法来研究解决几何问题——这是解析几何的基本内容,也可以用几何方法来解决代数问题.

本章首先介绍向量的概念及向量的某些运算,然后再介绍空间解析几何,其主要内容包括平面和直线方程,一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题,这些方程的建立和问题的解决是以向量为工具的.正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在自然科学和工程技术中经常遇到的量大致可分两大类:其中的一类是只有大小的量,例如,长度、质量、温度、距离、体积等,这一类量叫做数量(或标量);另一类是既有大小又有方向的量,例如,力、位移、速度、电场强度等,这一类量叫做向量(或矢量).

在数学上,常用有向线段表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M 为起点,N 为终点的有向线段表示的向量,记

作$\overrightarrow{MN}$. 如图 8－1 所示,印刷时也用小写黑斜体字母表示向量,比如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等.

图 8－1

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量的模(或向量的长度),记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量叫做单位向量,模为零的向量叫做零向量,记为 $\boldsymbol{0}$,零向量没有确定的方向,也可以认为其方向是任意的.

在许多实际问题中,有些向量与其始点有关,有些向量与始点无关,在数学上我们仅讨论与始点无关的向量,这种向量称为自由向量,如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,且方向相同,则称这两个向量相等. 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即向量在空间经过平行移动后所得的向量与原向量是相等的. 这样,今后如有必要,就可以把几个向量移到同一个起点.

二、向量的线性运算

下面分别介绍向量的加法、减法以及数与向量的乘法运算.

1. 向量的加法

由力学知道,如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在同一质点上,那么它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 可按平行四边形法则求得. 仿此,对向量的加法定义如下:

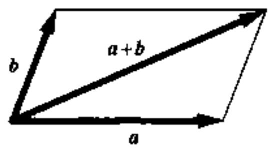

图 8－2

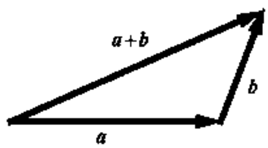

图 8－3

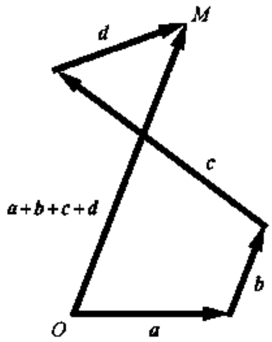

图 8－4

定义 1　把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,那么从起点到平行四边形的对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (图 8－2).

这种求向量和的方法称为平行四边形法则. 由于向量可以平行移动,所以,如果把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,那么从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,这种求和方法称为向量加法的三角形法则(图 8－3).

3 个或 3 个以上向量相加时，只要将前一向量的终点作为下一向量的起点，直至最后一个向量，那么从第一个向量的起点 O 到最后一个向量的终点 M 所作的向量 $\overrightarrow{OM}$ 就是这些向量的和(图 8 −4).

2. 向量与数的乘法

定义 2　设 λ 为一实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，引入一个新的向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 与数 $|\lambda|$ 的乘积，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意，则称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积.

当 $\lambda=-1$ 时，记 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，那么 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，模相等，称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**. 有了负向量的概念后，我们可以定义向量的减法为(图 8 −5).

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

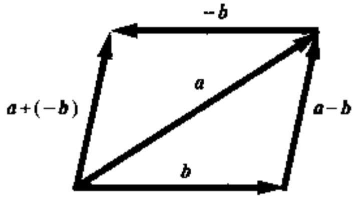

图 8 −5

向量的加法与数乘满足以下规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，
$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

(3) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，
$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

从数与向量乘法的定义可以看出，两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\quad(\lambda\neq 0).$$

我们把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$. 显然有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\text{ 或 }\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$

解　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}.$

例 2　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(如图 8 −6).

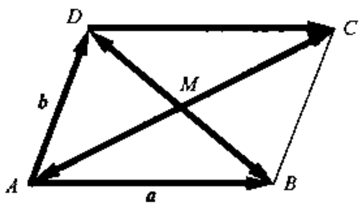

图 8 −6

解　因为平行四边形的对角线相互平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$.

故　$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

同理 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

【思考题 8－1】

1. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 两两不平行，把 $\boldsymbol{b}$ 的始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点，$\boldsymbol{c}$ 的始点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点，$\boldsymbol{a}$ 的始点与 $\boldsymbol{c}$ 的终点重合，那么 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成什么图形，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 等于什么？

2. 任意两个向量相等吗？

习题 8－1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$，$\overrightarrow{D_4A}$.

第二节 空间直角坐标系 向量的坐标

本节将建立空间的点及向量与有序数组的对应关系，引进研究向量代数方法，从而建立代数方法与几何直观的联系.

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，应用平面直角坐标系，将平面上的点 P 与有序实数对 (x,y) 建立一一对应关系，由此将平面曲线与方程建立了一一对应关系. 为了建立空间图形与方程的联系，我们需要建立空间的点与有序数组间的一一对应. 这种对应关系是通过建立空间直角坐标系来实现的.

在空间任意取一定点 O，过点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位. 这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴. 三个坐标轴正向构成右手系，即用右手握着 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 8－7 所示. 这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系. 点 O 称为坐标原点.

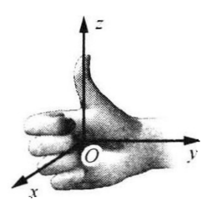

图 8－7

在空间直角坐标系中，任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面. 例如，由 x 轴

和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 平面. 类似地还有 yOz 平面和 zOx 平面. 三个坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个**卦限**,其顺序规定如图 8－8 所示.

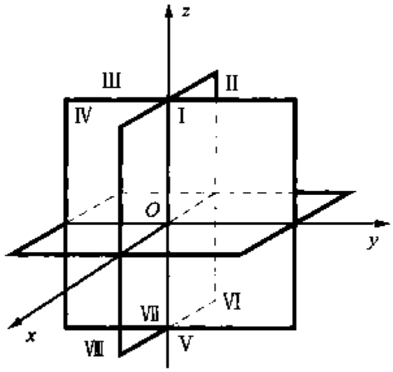

图 8－8

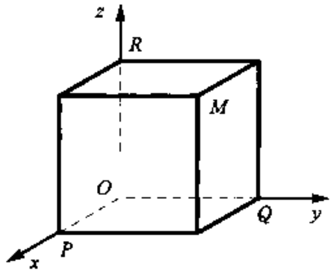

图 8－9

设 M 为空间直角坐标系中的任一点,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴,y 轴和 z 轴,它们的交点分别为 P,Q 和 R. 这三点在 x 轴,y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x,y 和 z. 于是空间一点 M 就唯一确定了一组有序数 x,y,z,如图 8－9 所示. 反之,对任意一组有序实数 x,y,z,可依次在 x 轴,y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x,y 和 z 的点 P,Q,R,过 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴,y 轴和 z 轴的平面,这三个平面相交于唯一的一点 M. 可见任何一组有序实数 x, y 和 z 唯一确定空间一点 M. 所以通过空间直角坐标系,我们就建立了空间的点 M 与一组有序实数 x,y 和 z 之间的一一对应关系,称 x,y 和 z 为 M 的坐标,通常记为 $M(x,y,z)$. x,y 和 z 依次称为点 M 的**横坐标,纵坐标和竖坐标**.

坐标轴上和坐标面上的点,其坐标各有一定的特征. 若点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上,则 $y=z=0$;在 y 轴上,则 $x=z=0$,在 z 轴上,则 $x=y=0$. 若点 $M(x,y,z)$ 在 xOy 平面上,则 $z=0$;在 yOz 平面上,则 $x=0$;在 zOx 平面上,则 $y=0$.

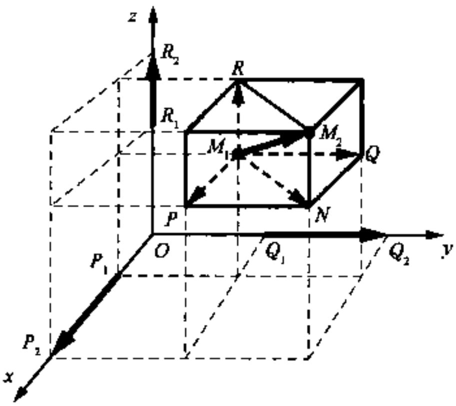

图 8－10

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,我们可以用这两点的坐标来表示它们之间的距离 d.

过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于

三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-10),依据勾股定理容易推得长方体的对角线的长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和,即

$$\begin{aligned}d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,\end{aligned}$$

所以
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地,点 (x,y,z) 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 设 P 在 x 轴上,它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为它到 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍,求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上,故可设 P 点坐标为 $(x,0,0)$,由于

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11}.$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2}.$$

$$|PP_1| = 2|PP_2|,\ 即 \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}.$$

从而得 $x = \pm 1$. 所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

三、向量的坐标表示

前面讨论的向量的各种运算称为几何运算,只能在图形上表示,计算起来不方便,现在我们引入向量的坐标表示,以便将向量的几何运算转化为代数运算.

1. 向径及其坐标表示

起点为坐标原点,终点为空间一点 $M(x,y,z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**,如图 8-11 所示,记为 $\boldsymbol{r}(M) = \overrightarrow{OM}$.

设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为与 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴同向的单位向量,并称它们为**基本单位向量**. 由图 8-11 及向量加法,得

$$\boldsymbol{r}(M) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{M'M}.$$

又
$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{PM} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{M'M} = z\boldsymbol{k},$$

所以
$$\boldsymbol{r}(M) = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{8-1}$$

或记为　$$r(M)=\overrightarrow{OM}=(x,y,z).\qquad(8-2)$$

(8-1)式称为向径$\overrightarrow{OM}$按基本单位向量的**分解式**,$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为$\overrightarrow{OM}$在 x 轴,y 轴,z 轴上的**分向量**.(8-2)式称为$\overrightarrow{OM}$的**坐标表示式**.x,y,z 叫做向径 $\boldsymbol{r}(M)$的坐标.

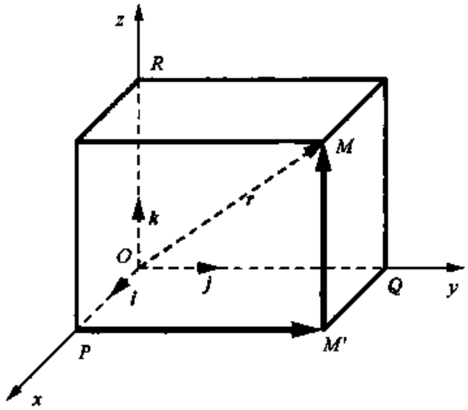

图 8-11

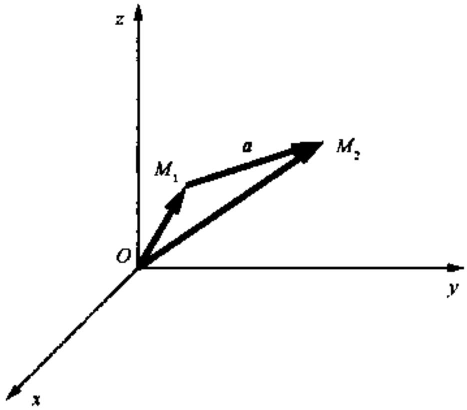

图 8-12

2. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式

在空间直角坐标系中有以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量 $\boldsymbol{a}$(图 8-12),则由向量的减法,得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}(M_2)-\boldsymbol{r}(M_1),$$

故
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}\qquad(8-3)$$

或简记为　$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\qquad(8-4)$$

其中,$a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$.称(8-3)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**.a_x,a_y,a_z 称为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影.(8-4)式称为 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示式**.

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(3,2,1),\boldsymbol{b}=(3,-5,-7)$,求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},3\boldsymbol{a}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})\\&=(3-3)\boldsymbol{i}+[2-(-5)]\boldsymbol{j}+[1-(-7)]\boldsymbol{k}\\&=7\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}&=3(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=(3\times3)\boldsymbol{i}+(3\times2)\boldsymbol{j}+(3\times1)\boldsymbol{k}\\&=9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$