

# 状元 学习方案

ZHUANGYUAN  
XUEXIFANGAN

八年级数学 **下**

人教版



学案=方法+考点  
状元=有方法+知考点



北京出版集团公司  
北京教育出版社

★ 内含教材习题答案 ★

# 状元 学习方案


THUANGYUAN  
XUEXIFANGAN



YZLL  
八年级数学 下  
人教版



本书的主编：仇玉奎 赵秀彬

 北京出版集团公司  
北京教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

状元学习方案:人教版.八年级数学.下/刘强主编.

—北京:北京教育出版社,2011.10

ISBN 978 - 7 - 5303 - 9008 - 5

I. ①状… II. ①刘… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 207759 号

**状元学习方案**

八年级数学(人教版)下

刘强 主编

\*

北京出版集团公司 出版  
北京教育出版社  
(北京北三环中路6号)

邮政编码:100120

网址:www.bph.com.cn

北京出版集团公司总发行  
全国各地书店经销  
北京铭传印刷有限公司印刷

\*

880 × 1230 32 开本 8.625 印张 170000 字  
2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5303 - 9008 - 5

定价:17.80 元

版权所有 翻印必究

质量监督电话:(010)62698883 58572750 58572393

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

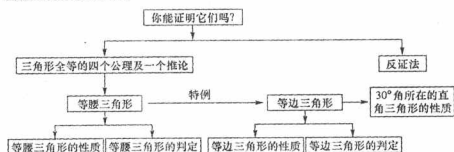
## 状元学法

概括本节要点，指明学习方向，链接背景知识，让你整体把握，有的放矢，对本节知识的学习做到心中有数。



### 1.1 你能证明它们吗

#### 状元学法 提纲挈领 一目了然



#### 状元笔记 善于归纳 活学活用

▶ 知识点1 ◀ 三角形全等的四个公理及一个推论(★★)

全等三角形的判定方法有四个：三个公理 SSS、SAS、ASA 及推论 AAS。判定两个三角形全等时应依据已知条件准确地选择判定方法。全等三角形的性质公理：全等三角形的对应边相等，对应角相等。在应用该公理时，一定要满足“对应”的条件，否则将得出错误的结论。

评注：在两个三角形中，已知“三对对应角相等”(简记“AAA”)及“两边和其中一边的对角对应相等”(简记“SSA”)不能用来判定两个三角形全等。比如图 1-1-1 中的  $DE \parallel BC$ ，则  $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ， $\angle A = \angle A$ ，但显然  $\triangle ADE$  与  $\triangle ABC$  不全等；比如图 1-1-2 中  $AD = AC$ ，这样在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ABC$  中，有  $AB = AB$ ， $AD = AC$ ， $\angle ABD = \angle ABC$ ，但是显然  $\triangle ABD$  与  $\triangle ABC$  不全等。

**易错警示：**  
“AAA”及“SSA”  
不能用来判定两个三角形全等。

#### 状元实践 借鉴中考 未雨绸缪

等腰三角形、等边三角形的性质及判定是判定线段、角相等的重要依据，而判定线段、角相等又是判定其他几何结论的两块基石，因此等腰三角形的性质、判定是中考的重要考点。另外含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质给出了直角三角形中边角之间的关系，是几何计算的重要依据，因此也是中考的重要考点。考查本节知识的题型多样，填空题、选择题、推理证明题、计算题都有可能，分值一般在 3~10 分之间，属中等难度的题。

**例 13** [2019·楚雄] 已知等腰三角形的一个内角为  $70^\circ$ ，则另外两个内角的度数 是( )

- A.  $55^\circ, 55^\circ$     B.  $70^\circ, 40^\circ$     C.  $55^\circ, 55^\circ$  或  $70^\circ, 40^\circ$     D. 以上都不对

【分析】应分两种情况讨论：(1)当顶角为  $70^\circ$  时，则两个底角为  $55^\circ, 55^\circ$ ；(2)当底角为  $70^\circ$  时，顶角为  $40^\circ$ 。

## 状元笔记

采用“讲、例、练”三结合的方式，系统梳理和剖析本节知识，对易错进行警示，从教材出发又适当拓展延伸，让你事半功倍，轻松突破重难点。

## 状元实践

再现本节知识在中考中出现过的考查类型、角度和深度。只有知道过去曾经考过什么，做到心中有数，方能立于不败之地。

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

## 状元学习方案

八年级数学(人教版)·下

## 栏目功能说明

### 状元心得

总结本节的规律方法和易错误区，以表格的形式清楚展示，使学生在学时事半功倍。

第一章 证明(二)

**状元心得** 归纳总结 了然于胸

规律方法总结	易错误区总结
掌握的打“√”	犯过的打“!”
1. 全等三角形的判定及性质。( ) 2. 等腰三角形的性质及判定。( ) 3. 等边三角形的性质及判定。( ) 4. 在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半。( ) 5. 反证法的定义及简单应用。( ) 6. 等腰三角形的性质及判定的综合应用。( )	1. 判定两三角形全等时，用了“SSA”。( ) 2. 误把等腰三角形当成等边三角形。( ) 3. 在一些较难的题目中，不知如何添加辅助线。( ) 4. 误认为只要有一角为60°的三角形即为等边三角形。( ) 5. 已知等腰三角形一角的度数(为锐角)求其他角时，没分情况讨论。( ) 6. 已知等腰三角形两边求周长时，没结合三角形三边关系的定理，或漏掉了其中一种情况。( )

### 状元素养

诺贝尔为何创设数学奖

诺贝尔奖在全世界有很高的地位，许多科学家梦想着能获得诺贝尔奖。数学被誉为“科学女王的骑士”，却得不到每年瑞典科学院颁发的诺贝尔奖，过去没有，将来也不会有，因为瑞典著名化学家诺贝尔留下的遗嘱中，没有提出设立数学诺贝尔奖。

### 状元思维

### 状元思维

针对本节知识与科技发展、生活实际相联系的问题，或是学科内、学科间的综合问题，进行探究讨论，举例说明。

### 探究1

等腰三角形中常用辅助线的添加方法(重难点)

方法1:通常作顶角平分线、底边中线、底边高线(最常用)。

例9 已知:如图1-1-15所示,  $AB=AC$ ,  $BD \perp AC$  于点  $D$ . 求证:  $\angle BAC=2\angle DBC$ .

【分析】若作顶角  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于  $E$ , 则  $AE \perp BC$ , 然后利用直角三角形两锐角互余, 可得  $\angle 2 = \angle DBC$ , 而  $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle BAC$ , 就可证出。

证明: 作  $\angle BAC$  的平分线  $AE$  交  $BC$  于  $E$ ,

则  $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle BAC$ .

又  $\because AB=AC$ ,

$\therefore AE \perp BC$ .

### 答案专区

1. 解: (1) 当顶角为  $50^\circ$  时, 其余两角为  $\frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ ; 当底角为  $50^\circ$  时, 则另一底角也为  $50^\circ$ , 顶角为  $180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$ . 故其余两角的度数为  $65^\circ, 65^\circ$  或  $50^\circ, 80^\circ$ .

(2)  $100^\circ$  的这个角一定为顶角, 此时底角为  $\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$ , 故其余两角的度数为  $40^\circ, 40^\circ$ .

### 状元素养

精选名人轶事, 数学趣话, 让学生在掌握课本知识的同时, 更能拓展视野, 培养学习兴趣。

### 答案专区

详细分析解题思路, 点拨解题方法, 方便学生自学, 让学生不但知其然, 且知其所以然, 并养成良好的、规范的答题习惯。

今天教育的内容百分之八十都应该是方法——方法比事实更重要。

——纳依曼(联合国教科文组织总干事)



# 目 录

(S2) ..... 卷素元升

(E2) ..... 写升数

(FB) ..... 升数升

(28) ..... 数形升式升

## 第十六章 分式

(28) ..... 升数升

(18) ..... 升数升

16.1 分式 ..... (2)

状元学法 ..... (2)

状元笔记 ..... (2)

状元思维 ..... (8)

状元实践 ..... (12)

状元心得 ..... (13)

状元素养 ..... (13)

答案专区 ..... (14)

16.2 分式的运算 ..... (17)

状元学法 ..... (17)

状元笔记 ..... (17)

状元思维 ..... (28)

(80) 状元实践 ..... (31)

状元心得 ..... (32)

状元素养 ..... (32)

答案专区 ..... (34)

16.3 分式方程 ..... (38)

状元学法 ..... (38)

状元笔记 ..... (38)

状元思维 ..... (43)

状元实践 ..... (46)

状元心得 ..... (47)

状元素养 ..... (47)

答案专区 ..... (48)

章末总结提高 ..... (50)

状元知识总结 ..... (50)

状元专题归纳 ..... (50)

答案专区 ..... (53)

(S3) ..... 升数升

## 第十七章 反比例函数

17.1 反比例函数 ..... (56)

状元学法 ..... (56)

状元笔记 ..... (56)

状元思维 ..... (64)

状元实践 ..... (68)

状元心得 ..... (70)

状元素养 ..... (70)

答案专区 ..... (71)

17.2 实际问题与反比例函数 .....

..... (74)

状元学法 ..... (74)

状元笔记 ..... (74)

状元思维 ..... (78)

状元实践 ..... (80)

状元心得 ..... (82)

状元素养 ..... (82)

答案专区 ..... (83)

章末总结提高 ..... (85)

状元知识总结 ..... (85)

状元专题归纳 ..... (85)

答案专区 ..... (91)

## 第十八章 勾股定理

18.1 勾股定理 ..... (95)

状元学法 ..... (95)

状元笔记 ..... (95)

状元思维 ..... (100)

状元实践 ..... (105)

状元心得 ..... (106)

状元素养 ..... (107)

答案专区 ..... (108)





(311) 状元心得 .....	(193)
(411) 状元素养 .....	(193)
(811) 答案专区 .....	(194)

19.4 课题学习 重心(略)

章末总结提高 .....	(197)
--------------	-------

(191) 状元知识总结 .....	(197)
(192) 状元专题归纳 .....	(197)
答案专区 .....	(205)

第二十章 数据的分析

20.1 数据的代表 .....	(209)
------------------	-------

状元学法 .....	(209)
状元笔记 .....	(209)
状元思维 .....	(216)
状元实践 .....	(219)
状元心得 .....	(221)

(111) 状元素养 .....	(222)
(112) 答案专区 .....	(222)
20.2 数据的波动 .....	(224)

(113) 状元学法 .....	(224)
(114) 状元笔记 .....	(224)
(115) 状元思维 .....	(228)
(116) 状元实践 .....	(229)
(117) 状元心得 .....	(230)
(118) 状元素养 .....	(230)
答案专区 .....	(231)

20.3 课题学习 体质健康测试中的

数据分析(略)

章末总结提高 .....	(232)
状元知识总结 .....	(232)
状元专题归纳 .....	(232)
答案专区 .....	(236)
附录:教材课后习题答案 .....	(237)

## 第十六章 分式

### ★ 本章整体解说 ★

本章的主要内容包括:分式的概念,分式的基本性质,分式的约分与通分,分式的加、减、乘、除运算,整数指数幂的概念及其运算性质,分式方程的概念以及可化为一元一次方程的分式方程的解法.

全章共包括三节:

16.1 分式;16.2 分式的运算;16.3 分式方程.

第 16.1 节,类比分数的概念给出了分式的概念,类比分数的基本性质探讨了分式的基本性质,类比分数的约分探讨了分式的通分、约分等,这些内容为后面两节的学习打下了理论基础.

第 16.2 节,讨论分式的四则运算法则,首先研究了分式的乘除运算,类比着分数的乘除,探讨了分式的乘除运算法则;接下来,从实际问题出发,采用与分数加减相类比的方法,研究了分式的加减运算,得出了运算法则,并学习分式的四则混合运算;最后,教科书结合分式的运算,研究了整数指数幂的问题,将正整数指数幂的运算性质推广到整数范围,并完善了科学记数法.本节内容是全章的重点,其中分式的混合运算也是全章的一个难点.

第 16.3 节,讨论分式方程的概念和解法,主要涉及可以化为一元一次方程的分式方程.教科书从实际问题出发,分析问题中的数量关系,列出分式方程,由此引出分式方程的概念,接下去研究分式方程的解法,教科书采用与同学们已有的经验相联系的方式,探讨了如何将分式方程转化为整式方程,从而得到分式方程的解的问题.解分式方程中要应用分式的基本性质,并且出现了必须验根的情况,这是以前学习的方程中没有遇到的问题,教科书结合具体例子,对分式方程为什么需要验根进行了解释.分式方程提供了一种解决实际问题的数学模型,它具有整式方程不可替代的特殊作用,根据实际问题列出分式方程,是本章教学中的另一个难点.

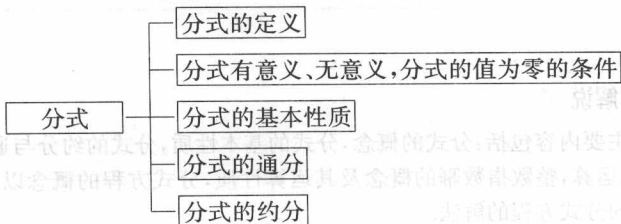
分式是不同于整式的另一类有理式,是代数式中重要的基本概念;相应地,分式方程是一类有理方程,解分式方程的过程比解整式方程更复杂.然而,分式或分式方程更适合作为某些的问题的数学模型,它们具有整式或整式方程不可替代的特殊作用.

借助对分数的认识学习分式的内容,是一种类比的认知方法,这在本章学习中经常使用.解分式方程时,化归思想很有用,分式方程一般要先化为整式方程再求解,并且要注意检验是必不可少的步骤.

## 16.1 分式

### 状元学法

提纲挈领 一目了然



### 状元笔记

善于归纳 活学活用

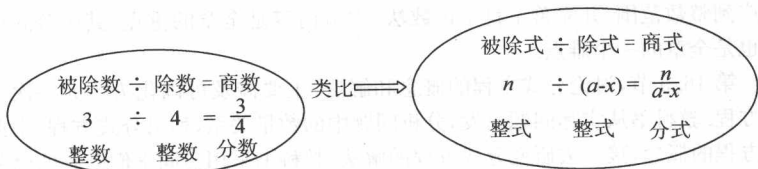
#### 知识点1 分式的概念(★★)

(1)探索交流:

①议一议:你们所发现的这一类新代数式: $\frac{s}{t}, \frac{n}{a-x}, \dots$ 它们有什么共同特征?

它们与整式有什么不同?

②类比分数,概括分式的概念及表达形式:



③小组内互举例子,判定是否为分式.

(2)归纳总结:

分式的定义:一般地,如果  $A, B$  表示两个整式,并且  $B$  中含有字母,那么式子  $\frac{A}{B}$  叫做分式.

在分式  $\frac{A}{B}$  中,  $A$  叫做分式的分子,  $B$  叫做分式的分母.

理解分式的定义要注意以下几个问题:

- ①分式是两个整式相除的商,其中分子为被除式,分母为除式,分数线起除号的作用;
- ②分式的分母中必须含有字母,而分子中可以含有字母,也可以不含字母;
- ③分式的分母表示除数,由于除数不能为0,所以分式的分母不能为0,即当  $B \neq 0$  时,分式  $\frac{A}{B}$  才有意义.



**例 1** 下列各式中,哪些是整式? 哪些是分式?

$$\frac{b-3}{2\pi}, \frac{x^2}{2x-1}, \frac{4}{5b+c}, \frac{2}{7}, 3x^2-1, \frac{2a}{3a},$$

$$\frac{2a}{3} + \frac{1}{2}b, -6.$$

**易错警示:**  $\pi$  是圆周率的值,它是一个无理数.

**【分析】** 要判别一个代数式是否为分式,关键点:(1)代数式中必须有分母;(2)分母中必须含有字母.

其中  $3x^2-1, -6$  不含有分母,是整式而不是分式;

$$\frac{b-3}{2\pi}, \frac{2}{7}, \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}b \text{ 分母中不含有字母,是整式而不是分式.}$$

解:  $3x^2-1, -6, \frac{b-3}{2\pi}, \frac{2}{7}, \frac{2a}{3} + \frac{1}{2}b$  是整式;

$$\frac{x^2}{2x-1}, \frac{4}{5b+c}, \frac{2a}{3a} \text{ 是分式.}$$

 跟踪训练

1. 下列各式:①  $\frac{2}{x}$ ; ②  $\frac{x+y}{5}$ ; ③  $\frac{1}{2-a}$ ; ④  $\frac{x}{\pi-1}$  中,是分式的有( )

- A. ①②      B. ③④      C. ①③      D. ①②③④

2. (数学与生活)甲种水果每千克  $a$  元,乙种水果每千克  $b$  元,取甲种水果  $m$  千克,乙种水果  $n$  千克,混合后,平均每千克价格是\_\_\_\_\_.

**知识点 2** 分式有意义、无意义,分式的值为零的条件(★★★)

分式有意义的条件是分式的分母不为 0;

分式无意义的条件是分式的分母为 0;

分式的值为 0 的条件是分式的分子为 0,且分式的分母不为 0.

说明:(1)分式分母的值不为 0,是指整个分母的值不为 0;如果分母中的字母的值为 0,但整个分母的值不为 0,则分式是有意义的.

(2)如果没有特别说明,所遇到的分式都是有意义的.例如在分式  $\frac{x}{6ab^2}$  中就隐含着  $6ab^2 \neq 0$ ,即  $a \neq 0, b \neq 0$  这一条件,也就是说分式  $\frac{x}{6ab^2}$  中分母的值不等于 0.

**例 2** 当  $x$  取何值时,下列分式有意义?

$$(1) \frac{x-3}{x^2+1}; (2) \frac{3}{|x|-3}; (3) \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}.$$

**【分析】** 分式有意义的条件是分式的分母不为 0,与分式的分子的值无关.

解:(1)由于分母  $x^2+1 > 0$ ,知  $x$  取任何数时分式都有意义;

(2)由分母  $|x|-3 \neq 0$ ,得  $x \neq \pm 3$ , $\therefore$  当  $x \neq \pm 3$  时,分式  $\frac{3}{|x|-3}$  有意义.

(3)由分母  $x^2+5x+4=(x+1)(x+4) \neq 0$ ,得  $x \neq -1$  且  $x \neq -4$ ,

∴当  $x \neq -1$  且  $x \neq -4$  时,分式  $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}$  有意义.

**点拨:**(1)到目前为止,分式的字母取值是在有理数范围内,今后,随着所学数的范围的扩大,字母的取值范围将跟着扩大.

(2)如果分母是二次三项式的形式,则首先考虑分解成两个一次式的乘积,再令分母为零.

(3)对于分式,弄清其字母的取值范围,对今后分式的进一步学习有着重要的意义.

(4)在解决此类问题时,应能综合运用已学的绝对值、因式分解等知识,灵活处理.

 跟踪训练

3. 填空:

(1)当  $x$  \_\_\_\_\_ 时,分式  $\frac{2}{3x}$  有意义;当  $x$  \_\_\_\_\_ 时,分式  $\frac{x}{x-1}$  有意义;

(2)当  $b$  \_\_\_\_\_ 时,分式  $\frac{1}{5-3b}$  无意义;当  $x, y$  满足关系 \_\_\_\_\_ 时,分式  $\frac{x+y}{x-y}$  无意义.

4. 求使下列分式有意义的  $x$  的取值范围:

(1)  $\frac{x+1}{2x-5}$ ; (2)  $\frac{3x+4}{2-|x|}$ ;

(3)  $\frac{1}{(x-2)(5x+3)}$ ; (4)  $\frac{x^2-2x-3}{x^2+0.5}$ .

**例 3** 当  $x$  为何值时,分式  $\frac{x^2-9}{x+3}$  的值为零?

**解:**由题意得:  $\begin{cases} x^2-9=0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$ , 解得  $x=3$ .

∴当  $x=3$  时,分式  $\frac{x^2-9}{x+3}$  的值为零.

**易错警示:**必须在分式有意义的前提下,才能谈分式的值是多少,也就是说,必须在分式有意义的前提下,才能讨论分式何时值为 0. 例如 3 易误认为当  $x = \pm 3$  时,分式  $\frac{x^2-9}{x+3}$  的值为零. 因为当  $x = -3$  时,分式的分母也为 0, 此时分式无意义,所以  $x$  不能等于 -3.

**点拨:**要使分式的值为零,必须使分子为零,且分母的值不为零.

 跟踪训练

5. (原创题)下列各式中,可以取值为零的是( )

A.  $\frac{m^2+1}{m^2-1}$

B.  $\frac{m^2-1}{m+1}$

C.  $\frac{m+1}{m^2-1}$

D.  $\frac{m^2+1}{m+1}$

6. 当  $x =$  \_\_\_\_\_ 时,分式  $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$  的值为零.

**知识点 3** 分式的基本性质 (★★★)

(1)探索交流:

观察下面的分数加法.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

这里将异分母分数化为同分母分数的依据是什么?

分式的基本性质:一个分数的分子、分母同乘(或除以)一个不为0的数,分数的值不变.

由分式的基本性质可知,如果数  $c \neq 0$ ,那么  $\frac{2}{3} = \frac{2c}{3c}, \frac{4c}{5c} = \frac{4}{5}$

所以,一般地,对于任意一个分数  $\frac{a}{b}$ ,都有:  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} (c \neq 0)$ .

(2)归纳总结:

分式的基本性质:分式的分子与分母同乘(或除以)一个不等于0的整式,分式的值不变,用式子表示为:  $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C} (C \neq 0)$ ,其中  $A, B, C$  是整式.

说明:①运用分式的基本性质时,千万不能忽略  $C \neq 0$  这一条件;

②分式的基本性质要求“同乘(或除以)一个不等于0的整式”,即分式的分子、分母要做相同的变形,要防止只乘(或除以)分子(或分母)的错误;分子、分母都乘(或除以)的整式必须相同.

**例4** 填空:利用分式的基本性质对分式进行等值变形.

$$(1) \frac{a+b}{ab} = \frac{(\quad)}{a^2b}; (2) \frac{x^2+xy}{x^2} = \frac{x+y}{(\quad)}.$$

**【分析】**显然这里的变形都是恒等变形,必须符合分式的基本性质.首先比较等式两边分式的分子(或分母)发生了怎样的变化,然后根据分式的基本性质,分式的分母(或分子)也应发生相同的变化.

**解:**(1)  $\frac{a+b}{ab}$  的分母  $ab$  乘  $a$  才能得到  $a^2b$ ,根据分式的基本性质,分子也需要乘  $a$ ,得  $a^2+ab$ .

(2)  $\frac{x^2+xy}{x^2}$  的分子除以  $x$  才能得到  $x+y$ ,根据分式的基本性质,分母也需要除以  $x$ ,得  $x$ .

### 跟踪训练

7. 下列变形:  $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+b}, \frac{a+b+c}{a+b} = c, \frac{a^2-b^2}{a-b} = a-b, \frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = -1, \frac{a+b}{(a+b)(c+d)} = \frac{1}{c+d}$ ,正确的个数为( )

A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

8. 不改变分式的值,把下列各式的分子与分母中各项的系数化为整数.

$$(1) \frac{0.3x-0.6y}{0.7x^2+0.4y^2}; (2) \frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c}{\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}y}.$$

**易错警示:**根据分式的基本性质判断分式的变形是否正确时,一定要注意“同乘(或除以)一个不等于0的整式”.

例如  $\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$  这个变形是分式、分母同乘  $c$  得到的,但是没有  $c \neq 0$  这个条件,所以是错误的.

### 知识点4 分式的变号法则(★★)

一个分式的分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变.

说明:(1)改变符号时应该是分子、分母整体的符号,而不是分子、分母中某一项的符号;

(2)一个分式的分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何一个或三个,得到的分式成为原分式的相反数.

**例5** 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母都不含“-”号.

$$(1) -\frac{x}{3y}; (2) \frac{n}{-4m}; (3) -\frac{-6x^2}{-11y^2}; (4) \frac{-x-y}{5xy}.$$

**【分析】**根据“分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变”进行变形.

**解:**(1)同时改变分子和分式本身的符号,得 $-\frac{-x}{3y} =$

$$\frac{x}{3y};$$

(2)同时改变分母和分式本身的符号,得 $\frac{n}{-4m} = -\frac{n}{4m};$

(3)同时改变分子和分母的符号,得 $-\frac{-6x^2}{-11y^2} = -\frac{6x^2}{11y^2};$

(4)同时改变分子和分式本身的符号,得 $\frac{-x-y}{5xy} = -\frac{x+y}{5xy}.$

**点拨:**在运用分式的变号法则时,应注意在分子、分母与分式本身的符号三者中,只有同时改变其中任何两个才能保证分式的值不变.

#### 跟踪训练

9. (探究题)下列等式:① $-\frac{(a-b)}{c} = -\frac{a-b}{c}$ ; ② $\frac{-x+y}{-x} = \frac{x-y}{x}$ ; ③ $\frac{-a+b}{c} = -\frac{a+b}{c}$ ;

④ $\frac{-m-n}{m} = -\frac{m-n}{m}$ 中,成立的是( )

A. ①②

B. ③④

C. ①③

D. ②④

10. 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母的最高次项的系数化为正数.

$$(1) \frac{25+13a-8a^2}{9-5a-a^2}; (2) \frac{36-x-y}{1-x-14y^2}; (3) \frac{x^4-2x^2+7x-10}{12-8x-x^3}.$$

### 知识点5 分式的通分(★★)

利用分式的基本性质,使分子和分母同乘适当的整式,不改变分式的值,把不同的分式化成相同分母的分式叫做分式的通分.

通分应注意以下几个问题:

**易错警示:**例5(4)题在运用分式的变号法则进行分式的变形时,易错误地得到 $-\frac{x-y}{5xy}$ ,变号应得 $x+y$ ,故答案应为 $-\frac{x+y}{5xy}$ .

(1)通分的方法是先求各分式的最简公分母,然后以每个分式的分母去除这个最简公分母,用所得的商去乘分式的分子、分母;

(2)通分的依据是分式的基本性质;

(3)通分的关键是寻求几个分式的最简公分母;

(4)最简公分母:几个分式进行通分时,通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母,这样的分母叫做最简公分母;

(5)寻求最简公分母应注意以下几点:

①“各分母所有因式的最高次幂”是指凡出现的字母(或含字母的式子)为底数的幂选取指数最大的;

②如果各分母的系数都是整数时,通常取它们系数的最小公倍数作为最简公分母的系数;

③如果分母是多项式,一般应先分解因式.

**例6 通分:**

$$(1) \frac{3}{2a^2b} \text{ 与 } \frac{a-b}{ab^2c}; (2) \frac{2x}{x-5} \text{ 与 } \frac{3x}{x+5}.$$

**【分析】**为通分要先确定各分式的公分母,一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母,它叫做最简公分母.

**解:**(1)最简公分母是  $2a^2b^2c$ .

$$\frac{3}{2a^2b} = \frac{3 \cdot bc}{2a^2b \cdot bc} = \frac{3bc}{2a^2b^2c},$$

$$\frac{a-b}{ab^2c} = \frac{(a-b) \cdot 2a}{ab^2c \cdot 2a} = \frac{2a^2-2ab}{2a^2b^2c}.$$

(2)最简公分母是  $(x-5)(x+5)$ .

$$\frac{2x}{x-5} = \frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2x^2+10x}{x^2-25}, \quad \frac{3x}{x+5} = \frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{3x^2-15x}{x^2-25}.$$

**易错警示:**分式的通分关键是确定几个分式的最简公分母,要防止遗漏只在一个分母中出现的字母.例如例6(1)题,易错误地认为最简公分母是  $2a^2b^2$ ,  $c$  虽然只在后一个分式中出现,也要作为最简公分母的一部分,应为  $2a^2b^2c$ .

**点拨:**通分的理论依据是分式的基本性质,通分只改变分式的形式,而分式的值不变.

### 跟踪训练

11. 分式  $\frac{b}{2a}$ ,  $\frac{x}{3b^2}$ ,  $\frac{1}{4ab}$  的最简公分母是( )

A.  $24a^2b^3$

B.  $24ab^2$

C.  $12ab^2$

D.  $12a^2b^3$

12. 对下列各式通分:(1)  $\frac{3}{8x^2y}$ ,  $\frac{4}{-12x^3y^2z^2}$ ,  $\frac{-3}{20xy^3z}$ ; (2)  $\frac{a+2b}{a^2-b^2}$ ,  $\frac{a+b}{(a-b)^2}$ ,  $\frac{2a+b}{b-a}$ .

### 知识点6 分式的约分(★★)

与分数的约分类似,利用分式的基本性质,约去分子和分母的公因式,不改变分式的值,这样的分式变形叫做分式的约分,对分式进行约分时应注意以下几个问题:



(1)约分的依据是分式的基本性质;

(2)约分的方法是:先把分子、分母分解因式(分子、分母是多项式时),然后约去它们的公因式;

(3)找公因式的方法:先分解因式后,系数取最大公约数,字母(或字母因式)取相同字母(或字母因式)的最低次幂;

(4)约分要彻底,使分子、分母没有公因式,分子、分母没有公因式的分式叫做最简分式.

例7 约分:

$$(1) \frac{a^2-b^2}{a-b}; (2) \frac{x-\frac{1}{x}}{x+2+\frac{1}{x}}$$

【分析】(1)分子、分母是多项式,先把分子、分母因式分解,找出公因式,然后约去公因式,使得分式变成最简分式,在这个分式的分母 $-a-b=-(a+b)$ 中,可把负号提到分式的前面.

(2)该分式的分子、分母中含有分式,可通过分式的基本性质同乘一个数,使分子、分母变为整式.

$$\text{解: (1)} \frac{a^2-b^2}{-a-b} = -\frac{a^2-b^2}{a+b} = -\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = -(a-b) = b-a;$$

$$(2) \frac{x-\frac{1}{x}}{x+2+\frac{1}{x}} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right) \cdot x}{\left(x+2+\frac{1}{x}\right) \cdot x} = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$$

**易错警示:**分式的约分是对分式的分子与分母整体进行的,分子和分母必须都是乘积的形式才能进行约分.例如易错误地将 $\frac{x-1}{5x}$ 化成 $\frac{-1}{5}$ ,因为 $x$ 与 $1$ 不是积的形式,因此与分母的 $x$ 不能约分.

**点拨:**约分的关键是求出分子、分母的公因式,若分式的分子、分母是多项式,必须先把分子、分母分解因式;约分的结果必须是最简分式.

 跟踪训练

13. 分式 $\frac{4y+3x}{4a}$ ,  $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ ,  $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ ,  $\frac{a^2+2ab}{2b-ab^2}$ 中最简分式的有( )

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

14. 对下列各式约分:(1)  $\frac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}$ ; (2)  $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ .

 **状元思维**  提高素质 培养兴趣

► 探究1 ◀ 字母取值对分式值的影响

根据分式值的情况,可以列出方程(方程组)、不等式(不等式组)来求字母的值(或范围).

例8 若分式 $\frac{3x+2}{1-2x}$ 的值为非负数,求 $x$ 的取值范围.