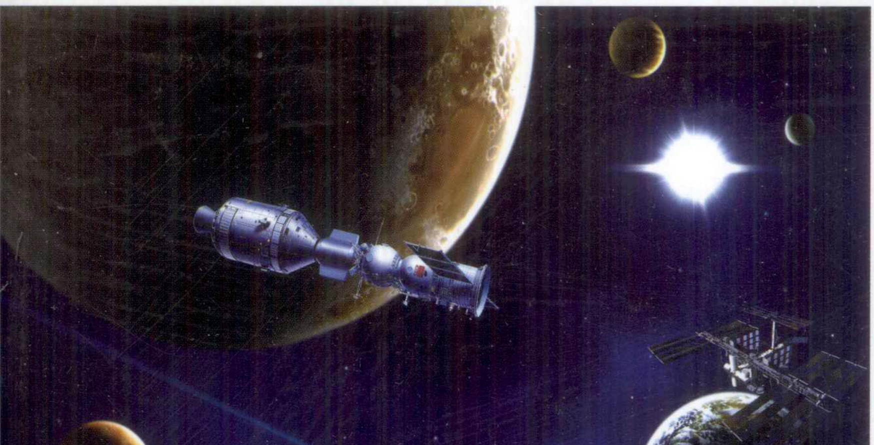
大学物理学习指导



主编　王　青　张国恒

科学出版社

大学物理学习指导

主编　王　青　张国恒

参编　元丽华　张梅玲　张莉萍
　　　戴剑锋　李维学

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部高等学校物理基础课程教学指导分委员会颁布的《理工科类大学物理课程教学基本要求》编写而成的. 全书包括：质点运动学、质点动力学、刚体定轴转动、机械振动、机械波、静电场、静电场中的导体和电介质、电流的磁场、磁场对电流的作用、电磁感应、气体分子运动论、热力学的物理基础、光的干涉、光的衍射、光的偏振、狭义相对论基础、光的量子性、原子的量子理论共18章. 各章分有“基本要求”、“内容简介”、“解题方法指导”、“习题及解答”等部分.

本书作为大学物理课程参考书，可供工科高校的学生使用，也可作为大学非物理专业、职工夜大、电大及成人自学考试的参考书，也可供报考研究生的考生使用和各类高等学校从事物理教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/王青，张国恒主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-032111-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①王… ②张… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第168575号

责任编辑：昌 盛 / 责任校对：朱光兰
责任印制：张克忠 / 封面设计：北京蓝正广告设计有限公司

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011年8月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1—3 500 字数：357 000

定价：32.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

普通物理学是理工科院校本科教学的一门重要基础课程. 由于教学内容多、进度快，大学低年级的学生一时难以适应. 为了帮助学生学好物理学，我们编写了这本书，目的是帮助学生加深对物理概念和物理规律的理解. 通过对解题方法的总结、典型习题答题的训练，帮助学生理清解题思路，增强解题方法与技巧的延展性，并学会分析问题和解决问题的基本方法.

本书中“基本要求”旨在让学生清楚各章所应了解、理解及掌握的基本概念、基本规律、基本观念、基本方法的要求，明确哪些内容是核心知识，哪些是重点知识，使其能灵活运用知识，发挥知识的系统功能，有效地实现知识和能力的转化. “内容简介”系统地介绍了各章的基本概念和基本公式. “解题方法指导”归纳了习题类型和解题技巧. “习题及解答”增强解题方法与技巧的延展性，供学生自我练习、自我评定学习情况、拓宽解题思路. 通过本书的学习，有利于知识的记忆、再生和迁移、有利于创造力的培养、有利于提高学生的学习兴趣、有利于培养学生分析问题和解决问题的能力.

本书是与科学出版社出版的冯旺军等主编的《大学物理》教材配套的学习指导书，编者均为多年从事大学物理教学与研究的骨干教师. 本书由兰州理工大学教师王青、戴剑锋、李维学、元丽华、张梅玲、张莉萍以及西北民族大学张国恒老师等共同编写完成. 执笔分工如下：第 1 章至第 3 章、第 15 章、第 18 章由张梅玲编写，第 4 章、第 5 章、第 13 章、第 14 章由元丽华编写、第 6 章至第 10 章由王青、张国恒、戴剑锋、李维学编写，第 11 章、第 12 章、第 16 章、第 17 章由张莉萍编写. 全书由王青教授负责统稿和定稿.

在编写的过程中，通过与本系的部分教师一起讨论，我们得到了许多编写灵感和想法，在此对他们表示衷心的感谢. 特别感谢冯旺军、蒲忠胜、魏智强、姜金龙、陈玉红等老师，他们为本书编写提出了许多中肯的意见，并提供了部分资料.

在本书的编写过程中，除了总结作者多年的教学经验外，还参考了一些教材和参考书，在许多地方得到启发，在此不再一一指明，对原书的编著者表示谢意. 由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编 者

2011 年 2 月

目 录

前言
第 1 章　质点运动学…… 1
第 2 章　质点动力学 …… 13
第 3 章　刚体定轴转动 …… 29
第 4 章　机械振动 …… 44
第 5 章　机械波 …… 62
第 6 章　静电场 …… 80
第 7 章　静电场中的导体和电介质 …… 96
第 8 章　电流的磁场…… 116
第 9 章　磁场对电流的作用…… 125
第 10 章　电磁感应 …… 134
第 11 章　气体分子运动论 …… 154
第 12 章　热力学的物理基础 …… 167
第 13 章　光的干涉 …… 188
第 14 章　光的衍射 …… 206
第 15 章　光的偏振 …… 223
第 16 章　狭义相对论基础 …… 229
第 17 章　光的量子性 …… 245
第 18 章　原子的量子理论 …… 260

第1章

质点运动学

基本要求

(1) 理解质点模型、参考系及坐标系的概念.

(2) 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述物体运动和运动变化的物理量,理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性.

(3) 掌握位置矢量、运动方程和轨迹方程的概念及其求解方法.

(4) 理解质点圆周运动的角量描述及角量与线量关系.

(5) 熟练掌握运动学两类问题的求解方法.

内容简介

1. 参考系

为了描述物体的运动,被选择的作为参考的物体(或物体系)称为参考系.要定量描述物体的确切位置,首先要在参考系中建立坐标系,常用的坐标系为直角坐标系,如图 1-1 所示.

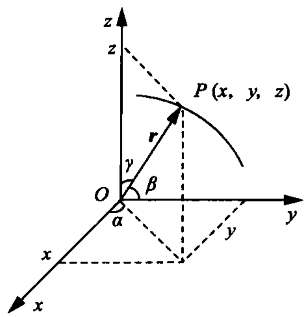


图 1-1 位置矢量

2. 位矢 运动方程和位移

(1) 位矢:描述质点在空间的位置.

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

矢量大小: $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向余弦: $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}$

(2)运动方程:位置矢量随时间的变化关系式.为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

(3) 轨迹方程:物体在空间走过的路线.

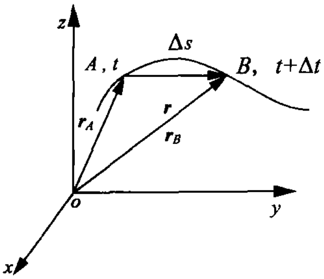


图 1-2　运动中的位移

运动方程中消去时间 t 就得到轨迹方程.

(4)位移:位置矢量的变化量. 为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

直角坐标中的表达式为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k}$$
$$= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

(5)路程:物体运动时其轨迹的长度,路程为标量,只有大小,没有方向. 例如从图 1-2 中 Δs 表示的曲线就是路程.

3. 速度、加速度

(1) 速度:描述物体位置改变快慢的物理量.

平均速度: $\boldsymbol{v} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$　　平均速率　$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速度:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$
$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

速度的大小: $v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

瞬时速率: $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$

瞬时速率与瞬时速度的大小相等.

速度的方向为运动轨迹的切线方向.

(2) 加速度:描述物体运动速度改变快慢的物理量.

平均加速度: $\bar{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$

瞬时加速度:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

加速度的大小: $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

4. 圆周运动的描述

质点做以半径为 R 的圆周运动,其线速度为 v,则有

运动方程为: $\theta = \theta(t)$

角速度为: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{R}$

角加速度为： $\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

线量与角量之间的关系为

$$s=R\theta,\quad v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega$$

切向加速度： $a_t=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\beta$

法向加速度： $a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$

5. 运动学的两大类问题

(1) 已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求解速度、加速度，运用微分法；

(2) 已知速度、加速度，求解运动方程，运用积分法.

6. 相对运动

设运动参考系 S' 相对于静止参考系 S 以速度 u 匀速运动，在 S' 系中质点的速度为 v'，加速度为 a'，在 S 系中的速度为 v，加速度为 a，则有

$$v=v'+u$$
$$a=a'$$

解题方法指导

1. 已知运动方程，求位置矢量、位移、速度、加速度及运动轨迹

做这一部分习题的时候，一定要紧扣概念，使用数学知识解题.

例 1 一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x=5+2t-t^2$（x 以 m 为单位，t 以 s 为单位）. 问：质点的初速度为多少？第 4 秒末的速度为多少？第 4 秒末的加速度为多少？

解 直接根据速度定义就可以得到

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d(5+2t-t^2)}{dt}=-2t+2$$

代入值进行计算可得

当 $t=0$ 时，$v_x=2\text{m/s}$； 当 $t=4$ 时，$v_x=-6\text{m/s}$

同样根据加速度定义可得

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=-2\text{m/s}^2$$

则在任何时候其加速度都为 -2m/s^2.

由此题可以看出，做好这一类型题的关键是必须要牢记概念.

例 2 一质点以 π(m/s)的匀速率做半径为 5m 的圆周运动. 该质点在 5s 内的平均速

度的大小为多少？平均加速度的大小为多少？

解 根据平均速度的定义，在这段时间里，单位时间的速度的大小，即

$$\bar{v}=\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|\left|\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{\Delta t}\right|=\frac{10-0}{5}=2(\mathrm{m/s})$$

平均加速度是在这段时间里单位时间内速度的大小，即

$$\boldsymbol{a}=\left|\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}\right|=\frac{\pi-(-\pi)}{5}=\frac{2}{5}\pi(\mathrm{m/s^2})$$

总结：做这一类题要牢记概念，按定义做计算.

例 3 已知质点的运动方程为 $x=2t, y=2-t^2$. 式中时间以秒计，距离以米计. 试求：

(1) 计算轨道方程；

(2) 第 1 秒和第 2 秒末质点的位置矢量及第 2 秒内质点的平均速度；

(3) 第 2 秒末质点的速度和加速度.

解 (1) 轨迹方程是坐标之间的函数关系，则

$$t=\frac{x}{2},\quad y=2-\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

则所求的轨迹方程为

$$x^2+4y-8=0$$

(2) 当 $t=1$ 时，$x=2, y=1$，则位矢为

$$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

当 $t=2$ 时，$x=4, y=-2$，则位矢为

$$\boldsymbol{r}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}}{1}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$$

(3) $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2, v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2t$；当 $t=2$ 时，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$.

$a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0, a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-2$；当 $t=2$ 时，$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{j}$.

2. 已知加速度和初始条件，求运动方程和速度

根据加速度和速度之间的关系，利用积分学知识解题.

例 4 已知一质点做直线运动，加速度为 $a=-A\omega^2\cos\omega t$，在 $t=0$ 时，$v_0=0, x_0=A$，其中 A、ω 均为正常数，求质点的运动学方程.

解 这类问题是知道加速度求速度和运动方程，所用方法为积分法.

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

积分后得

$$\int_{v_0}^{v_t}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t\Rightarrow v_t=v_0+\int_0^t(-A\omega^2\cos\omega t)\mathrm{d}t=-A\omega\sin\omega t$$

$$\mathrm{d}x=v_t\mathrm{d}t$$

积分后得

$$\int_{x_0}^{x_t} \mathrm{d}x = \int_0^t v_t \mathrm{d}t \Rightarrow x = A + \int_0^t (-A\omega\sin\omega t)\mathrm{d}t = A\cos\omega t$$

例 5 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系是 $a=2+6x^2$(SI). 如质点在 $x=0$ 处的速度为 10m/s，求质点在任意坐标 x 处的速度.

解 由速度和加速度的关系式 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$得

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow a\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

代入已知条件得

$$(2+6x^2)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

两边积分，并利用初始条件 $x=0, v_0=10\text{m/s}$ 有

$$\int_0^x (2+6x^2)\ \mathrm{d}x = \int_{10}^v v\ \mathrm{d}v$$

得到质点在任意坐标 x 处的速度 $v=2\sqrt{x^3+x+25}$.

3. 圆周运动

根据圆周运动中各角量的物理定义，选择合适的坐标进行解题. 做这一部分题的时候，可以类比于直线运动进行解答.

例 6 一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，其运动方程为 $\theta=2+t^2$(式中的 θ 以弧度计，t 以秒计). 质点在第 1 秒末的速度为多少? 切向加速度为多少?

解 根据圆周运动的定义，角速度和角位移之间的关系，角加速度和角速度以及角位移之间的关系进行计算. 即

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2t, \quad v = R\omega = 0.1 \times 2t = 0.2t$$

当 $t=1$ 时，$v=0.2\text{m/s}$，方向沿圆周的切线方向.

根据角加速度与角速度的关系可知

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\text{rad/s}^2$$

而因为角加速度与线加速度之间的关系为 $a_t=R\beta$，所以

$$a_t = 0.1 \times 2 = 0.2(\text{m/s}^2)$$

例 7 已知质点的运动方程为 $x=R\cos\omega t, y=R\sin\omega t$，式中 R 和 ω 均为常数.

试求：(1) 轨道方程；

(2) 任意时刻的速度和加速度；

(3) 任意时刻的切向加速度和法向加速度.

解 (1) 轨道方程为坐标之间的函数关系，则 $x^2+y^2=R^2$ 为轨道方程.

(2)
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega R\sin\omega t, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega R\cos\omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = R\omega$$

方向沿圆周的切线方向；

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 R\cos\omega t, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 R\sin\omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R$$

为匀速圆周运动，加速度方向指向圆心.

(3) 由于质点在做匀速圆周运动，则

$$a_t = 0, \quad a_n = R\omega^2$$

习题及解答

1. 一质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $x=at$，$y=b+ct^2$，式中 a、b、c 均为常数. 当运动质点的运动方向与 x 轴成 45°角时，它的速率为多少？

解 因为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(at)}{\mathrm{d}t} = a, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(b+ct^2)}{\mathrm{d}t} = 2ct$$

又因为质点的运动方向与 x 轴成 45°角，即 $|v_x| = |v_y|$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + v_x^2} = \sqrt{2}a$$

2. 对斜抛运动，如起抛点和落地点在同一水平面上，则抛射角为 $(45°+\alpha)$ 和 $(45°-\alpha)$ 时，射程之间有什么关系？

分析 若起抛速度为 v_0，如果抛射角为 $45°+\alpha$，则运动时间

$$t = \frac{2v_0\sin(45° + \alpha)}{g}$$

射程为

$$x = v_0\cos(45° + \alpha)t = \frac{2v_0^2\sin(45° + \alpha)\cos(45° + \alpha)}{g} = \frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g}$$

如果抛射角为 $45°-\alpha$，则运动时间

$$t = \frac{2v_0\sin(45° - \alpha)}{g}$$

射程为

$$x = v_0\cos(45° - \alpha)t = \frac{2v_0^2\sin(45° - \alpha)\cos(45° - \alpha)}{g} = \frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g}$$

可见，它们的射程相同.

3. 湖中一小船，岸边有人用绳子跨过高出水面 h 的滑轮拉船，如图 1-3 所示. 如用速度 V_0 收绳，计算船行至离岸边 x 处时的速度和加速度.

解 选取如图所示的坐标系，任一时刻小船位移满足：$x^2 = l^2 - h^2$，在整个物理过程中，l 和 x 为变量，两边对时间微分得

$$l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

又根据题意可知收绳速度$V_0=-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$,而$l=\sqrt{x^2+h^2}$,船行至离岸边$x$处时的速度为$V=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,则可知

$$V=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}V_0 \qquad (1)$$

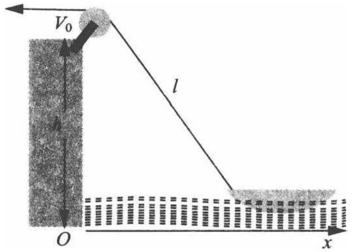


图 1-3

方向沿着x轴的负方向.

$$l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Rightarrow -V_0l=xV$$

对上面方程两边对时间微分可知

$$-V_0\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+V\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Rightarrow V_0^2=xa+V^2$$

则可得

$$a=\frac{V_0^2-V^2}{x}$$

把$V=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}V_0$代入(1)式可得

$$a=-\frac{V_0^2h^2}{x^3}$$

其方向沿着x轴的负方向.

4. 一质点做直线运动,其速度与时间的关系曲线如图1-4所示.图中过A点的切线AC的斜率表示什么含义?割线AB的斜率表示物理意义?曲线下的面积$\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t$表示物理含义?

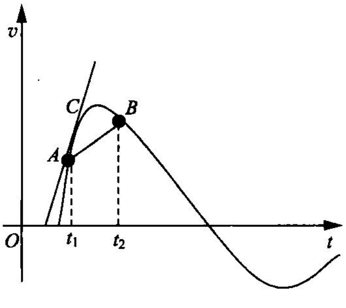


图 1-4

解 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,$A$点的切线斜率表示$A$点的加速度;$\bar{a}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$,则$AB$割线斜率表示$t_1\sim t_2$时间内的平均加速度;$\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$,$s=\int\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}v\mathrm{d}t$,表示$t_1\sim t_2$时间段内的位移.

5. 一人站在山坡上,山坡与水平面成α角,他扔出一个初速为v_0的石子,v_0与水平面成θ角(斜向上),如图1-5所示,求石子在斜坡上由抛出点到落地点的距离s_0.

解 以抛射点为坐标原点,取如图所示坐标系,则落地点坐标满足

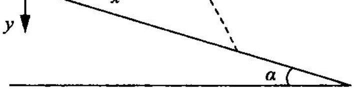


图 1-5

$$x=v_0\cos\theta t$$

$$y=-v_0\sin\theta t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$s_0=\sqrt{x^2+y^2}$$

又因为抛射点水平线与山坡夹角也为 α,所以 $\cot\alpha=\frac{|x|}{|y|}$,则

$$\cot\alpha=\frac{v_0t\cos\theta}{\frac{1}{2}gt^2-v_0t\sin\theta}\Rightarrow t=\frac{2}{g}\left(\frac{v_0\cos\theta}{\cot\alpha}+v_0\sin\theta\right)$$

把时间 t 代入式 $s_0=\sqrt{x^2+y^2}$ 则可得

$$s_0=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(v_0t\cos\theta)^2+\left(\frac{1}{2}gt^2-v_0t\sin\theta\right)^2}=\frac{2v_0^2\cos\theta}{g}\left(\frac{\cos\theta}{\cot\alpha}+\sin\theta\right)\left(1+\frac{v_0}{\cot\alpha}\right)$$

6. 一质点从静止出发沿半径为 $R=3\text{m}$ 的圆周运动,切向加速度为 $a_t=3\text{m/s}^2$. 问:

(1) 经过多少时间它的总加速度恰好与半径成角 45°?

(2) 在上述时间内,质点所经过的路程和角位移各为多少?

解 (1)因为 $\boldsymbol{a}$ 与半径的夹角为 45°,所以 $a_n=a_t=\frac{v_t^2}{R}=3\Rightarrow v_t=3\text{m/s}$,又因为 $v_t=a_tt$,所以 $t=1\text{s}$.

(2) 路程 $s=\frac{1}{2}a_tt^2=\frac{1}{2}\times3\times1^2=1.5(\text{m})$

角量与线量之间的关系得角位移

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{1.5}{3}=0.5(\text{rad})$$

7. 已知两质点运动方程分别为 $\boldsymbol{r}_1=(3+2t)\boldsymbol{i}+(t-1)\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{r}_2=(3+2t)\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$,求质点的轨迹方程.

解 轨迹方程是位置坐标之间的关系.

质点 1 运动方程的直角坐标表示为

$$x_1(t)=3+2t,\ y_1(t)=t-1$$

用消元法可得,质点 1 轨迹方程为

$$x_1-2y_1-5=0$$

质点 2 运动方程的直角坐标表示为

$$x_2(t)=3+2t,\ y_2(t)=5$$

用消元法可得,质点 2 轨迹方程为 $y_2=5$.

8. 一质点做直线运动,运动方程为 $x=3t-2t^2+5$,则该质点作什么样的运动?

分析 质点做直线运动,知道运动方程可以知道运动速度和加速度.

运动速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-4t$$

运动加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-4$$

则加速度沿 x 轴的负方向.

由此可知,$t=0$ 时,$v_x=3$,加速度 $a_x=-4$ 是不随时间发生变化的,则质点做匀减速

直线运动.

9. 质点沿 x 轴运动，其速度与时间的关系为 $v=4+t^2$(m/s)，当 $t=3$s 时质点位于 $x=9$m 处，求质点的运动方程. 当 $t=2$s 时，质点的位置在哪里？

解 质点的位置满足

$$x=\int v\mathrm{d}t=\int(4+t^2)\mathrm{d}t\Rightarrow x=4t+\frac{1}{3}t^3+C$$

由初始条件 $t=3$s 时质点位于 $x=9$m 得到 $C=-12$，则

$$x=4t+\frac{1}{3}t^3-12$$

当 $t=2$s 时，质点的位置

$$x=8+\frac{8}{3}-12=-\frac{4}{3}(\mathrm{m})$$

10. 一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x=5+2t-t^2$(位移以 m 为单位，时间以 s 为单位)求：

(1) 质点的初速度；

(2) 质点第 4 秒末的速度；

(3) 质点第 4 秒末的加速度.

解 由运动方程可求出运动速度和加速度.

(1) $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2-2t$，则当 $t=0$s 时，$v_{x0}=2$m/s.

(2) 当 $t=4$s 时，$v_{x4}=-6$m/s.

(3) $a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2\mathrm{m/s^2}$，则不管在什么时候，其加速度都为 $-2\mathrm{m/s^2}$，则在 $t=4$s 时，其加速度也为 $-2\mathrm{m/s^2}$.

11. 一质点做半径为 0.1m 的圆周运动，其运动方程为 $\theta=t^2+3t+1$(式中的 θ 以弧度计，t 以秒计). 求：

(1) 第 1 秒末的角速度和角加速度；

(2) 第 1 秒末的线速度和切向加速度.

解 由圆周运动方程可求出运动角速度和角加速度.

(1) $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=2t+3$，则当 $t=1$s 时，$\omega=5$rad/s.

$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=2$，则不管是什么时候，角加速度都为 $2\mathrm{rad/s^2}$. 在 $t=1$s 时也为 $2\mathrm{rad/s^2}$.

(2) 线速度与角速度之间的关系为：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，圆周运动中，半径方向与角速度方向垂直，叉乘积看为标量积进行计算.

$$v=r\omega=0.1\times5=0.5(\mathrm{m/s})$$

切向加速度与角加速度之间的关系为

$$a_{\mathrm{t}}=r\beta=0.1\times2=0.2(\mathrm{m/s^2})$$

12. 已知一质点做直线运动，加速度大小为 $a=-A\omega^2\cos\omega t$，在 $t=0$ 时，$v=0$，$x=A$，

其中 A、ω 均为正常数，求质点的运动学方程.

解 这类问题是知道加速度求速度和运动方程，所用方法为积分法.

由 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 得

$$\int_{v_0}^{v_t}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t\Rightarrow v_t=v_0+\int_0^t(-A\omega^2\cos\omega t)\mathrm{d}t=-A\omega\sin\omega t$$

由 $\mathrm{d}x=v_t\mathrm{d}t$ 得

$$\int_{x_0}^{x_t}\mathrm{d}x=\int_0^t v_t\mathrm{d}t\Rightarrow x=A+\int_0^t(-A\omega\sin\omega t)\mathrm{d}t=A\cos\omega t$$

13. 一质点沿直线运动，运动方程为 $x=2t^2+t+6$（位移为 m，时间为 s），如果(1)将坐标原点沿 x 轴正方向移动 2m；(2)将计时起点前移 1s，求以上两种情况下质点的运动方程、初速度和加速度.

解 (1) 将坐标原点沿 x 正方向移动 2m，则

$$x'=x-2=2t^2+t+4,\quad v'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=4t+1,\quad a'=\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}=4$$

则 $t=0$ 时，$v'=1\mathrm{m/s}$，$a'=4\mathrm{m/s^2}$.

(2) 将计时起点前移 1s，则

$$x=2(t'-1)^2+(t'-1)+6=2t'^2-3t'+7$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t'-3,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4$$

则 $t=0$ 时，$v=-3\mathrm{m/s}$，$a=4\mathrm{m/s^2}$.

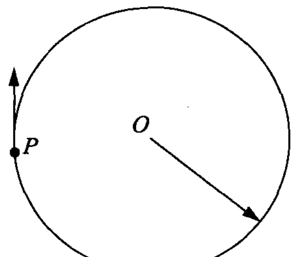


图 1-6

14. 如图 1-6 所示，质点 P 在水平面内沿一半径为 $R=1\mathrm{m}$ 的圆轨道转动，转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega=kt^2$（k 为常量）. 已知 $t=2\mathrm{s}$ 时，质点 P 的速度值为 32 m/s. 试求 $t=1\mathrm{s}$ 时，质点 P 的速度和加速度的大小.

解 (1) 根据圆周运动角量与线量之间的关系可得

$$v_t=R\omega=kRt^2$$

当 $t=2\mathrm{s}$ 时，$v_t=32\mathrm{m/s}$，可得 $k=8$，则 $v_t=8Rt^2$，当 $t=1\mathrm{s}$，$v_t=8\mathrm{m/s}$.

(2) 在圆周运动中角加速度与角速度之间的关系为

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(8t^2)}{\mathrm{d}t}=16t$$

$$a_t=R\beta=16t$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2=(kt)^2=64t^2$$

当 $t=1\mathrm{s}$ 时，$a_t=16\mathrm{m/s^2}$，$a_n=64\mathrm{m/s^2}$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{16^2+64^2}=16\sqrt{17}(\mathrm{m/s^2})$$

15. 一圆盘半径为 3 m，初始角速度为 π rad/s，以后均匀的减小，4s 时角速度为零. 试计算在圆盘边缘上一点 2s 时的切向加速度和法向加速度的大小，并在图上画出它们的

方向.

解 根据圆周运动的角速度与角加速度的关系可知 $\omega=\omega_0+\beta t$，当 $t=4\text{s}$ 时，$\omega=0$，则

$$\beta=-\frac{\omega_0}{t}=-\frac{\pi}{4}\text{rad/s}^2$$

当 $t=2\text{s}$ 时，

$$a_t=R\beta=3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{4}(\text{m/s}^2)$$

$$\omega=\omega_0+\beta t=\pi+2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}(\text{m/s})$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2=3\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{3\pi^2}{4}(\text{m/s}^2)$$

16. 一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，其角坐标表示的运动方程为 $\theta=2+4t^3$（式中的 θ 以弧度计，t 以秒计）. 求：

(1) 2s 时，质点切向加速度和法向加速度的大小；

(2) 当 θ 等于多少时，质点的加速度和半径的夹角成 45°.

解 (1)

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2\Rightarrow v_t=R\omega=1.2t^2$$

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=24t\Rightarrow a_t=R\beta=2.4t$$

当 $t=2$ 时，

$$a_t=4.8\text{m/s}^2$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2=14.4t^4=230.4\text{m/s}^2$$

(2) 依题意可知，要想使得加速度和半径成 45°角，则必须切向加速度和法向加速度大小相等.

$$a_t=a_n\Rightarrow\left.\begin{cases}a_t=R\beta=2.4t\\ a_n=\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2=14.4t^4\end{cases}\right\}\Rightarrow 2.4t=14.4t^4\Rightarrow 4t^3=\frac{2}{3}$$

$$\theta=2+4t^3=2+\frac{2}{3}=2.67\text{rad}$$

17. 一质点沿直线运动，其速度为 $v=v_0e^{-kt}$（式中 k，v_0 为常量），当 $t=0$ 时，质点的坐标为 $x=0$，求质点的运动方程.

解 运动学中质点的速度与位移之间的关系可得：运动方程为质点的位置随时间的变化关系

$$dx=vdt\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^t vdt\Rightarrow x=\int_0^t v_0e^{-kt}dt=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$$

18. 一正在行驶的船只，发动机关闭后，得到一个与船速方向相反、大小与船速平方成正比的加速度，并设关闭发动机时船的速度大小为 v_0，经过 10s 后船的速度大小为 $\frac{1}{2}v_0$，证明：

(1) 在发动机关闭后，船在 t 时刻速度的大小满足$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{10v_0}t$；

(2) 船在时间 t 内行驶的距离为 $x=10v_0\ln\left(\frac{1}{10}t+1\right)$；

(3) 船在行驶距离 x 后的速度为 $v=v_0 e^{-\frac{x}{10v_0}}$.

证明 (1) 由加速度与速度的关系可知

$$a=\frac{dv}{dt}=kv^2\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_0^t k dt\Rightarrow-\frac{1}{v}\bigg|_{v_0}^{v}=kt\bigg|_0^t\Rightarrow\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt$$

当 $t=10s$ 时，速度为$\frac{1}{2}v_0$，则

$$\frac{2}{v_0}=\frac{1}{v_0}+k\times 10\Rightarrow k=\frac{1}{10v_0}$$

则

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{10v_0}t$$

(2)
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{10v_0}t\Rightarrow v=\frac{10v_0}{10+t}$$

$$dx=vdt\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^t vdt$$

$$x=10v_0\ln\left(\frac{t}{10}+1\right)$$

(3)
$$x=10v_0\ln\left(\frac{t}{10}+1\right)\Rightarrow t=10\left(\exp\left(\frac{1}{10v_0}\right)-1\right)$$

代入$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{10v_0}t$，可得

$$v=v_0 e^{-\frac{x}{10v_0}}$$