21 Century

21世纪高等院校电气信息类系列教材

Electrical Information Science and Technology

线性系统理论

陈晓平 和卫星 傅海军 编著

附赠电子教案

http:// www.cmpedu.com

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪高等院校电气信息类系列教材

线性系统理论

陈晓平　和卫星　傅海军　编著

机械工业出版社

本书主要阐述线性系统时域理论，给出了线性系统状态空间的概念、组成方法和基本性质，进而导出系统的状态空间描述。在此基础上，本书对线性系统进行了定量和定性分析，分别给出了连续时间系统和离散时间系统状态运动的一般表达式。对于系统的能控性和能观测性概念，本书分别从直观的物理意义和严格的数学定义两个方面作了详细、深入的阐述，并给出了相应的判断准则。对于系统的稳定性，书中也进行了较详细的介绍，并针对有关线性系统的时域综合理论，给出了系统观测器的设计方法。

本书可作为高等院校电气信息类专业教材，也可供相关技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论/陈晓平，和卫星，傅海军编著. —北京：机械工业出版社，2010.9

21世纪高等院校电气信息类系列教材

ISBN 978-7-111-31883-5

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①陈…②和…③傅…　Ⅲ.①线性系统理论—高等学校—教材　Ⅳ.①O231.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第178563号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：时　静　责任编辑：时静　常建丽

版式设计：张世琴　责任校对：陈延翔

责任印制：李　妍

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

2011年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm・19.25印张・476千字

0001—3500册

标准书号：ISBN 978-7-111-31883-5

定价：33.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

前　言

所谓系统，就是一些部件的组合。这些部件按照一定的规律组合起来，成为具有一定功能的整体，并能完成某项特定的任务。在本课程研究范围内，系统这个概念是指确定的物理系统，例如，导弹的飞行控制系统、飞机的自动驾驶系统、加热炉的温度控制系统等都是为完成预定任务而由一些物理部件组合起来的集合体。

线性系统理论的研究对象是线性系统，它通常是实际系统的一类理想化模型。实际系统可以具有完全不同的属性，在系统理论中常常抽去具体系统的物理属性，而把它抽象为一个一般意义下的系统模型来加以研究。这样对于同一个系统模型可对应不同的实际物理系统。同样，由于研究的目的不同，一个实际物理系统可以有不同的系统模型。一旦获得系统模型，就要建立起系统模型的数学方程描述。在系统和控制理论中主要研究的是动态系统，通常也称为动力学系统。动态系统一般可以用一组微分方程或差分方程来描述。当描述的动态系统的数学方程具有线性属性时，则称相应的系统为线性系统。线性系统是一类最简单且研究得最多的动态系统。线性系统的主要特征是满足叠加定理和齐次定理，这一属性导致了在数学上处理的简便性，使得可以用比较成熟和比较简单的数学工具和矩阵理论来研究它的运动。

尽管任何实际系统都含有非线性因素，但在一定条件下，许多实际系统可用线性系统模型加以描述。对于线性系统，通常还可进一步细分为线性时不变系统和线性时变系统两类。线性时不变系统也称为线性定常系统或线性常系数系统。其特点是，描述系统动态过程的线性微分方程或差分方程中的每个系数都是不随时间变化的函数。所以，线性时不变系统也是实际系统的一种理想化模型。但是，由于线性时不变系统在研究上的简便性和基础性，并且为数很多的实际系统都可以在一定范围内足够精确地用线性时不变系统来描述，因此，线性时不变系统成了线性系统理论的主要研究对象。

线性系统理论主要研究线性系统状态的运动规律，揭示系统中固有的结构特性，建立系统的结构、参数与性能之间的定性、定量的关系，以及为改善系统性能以满足工程指标要求而采取的各类控制器设计方法。通常，研究系统运动规律的问题称为分析问题，研究改变运动规律的可能性和方法的问题称为综合问题。

线性系统的分析问题还可进一步区分为“定量分析”和“定性分析”两类情况。在线性系统的定量分析中，关心的是系统对某一输入信号的实际响应和性能。从数学的角度来看，系统分析归结为求解作为系统数学模型的微分方程组或差分方程组。从计算的角度来看，当应用一般关系式来分析比较复杂的线性系统的响应时，将会涉及很多复杂的计算，常需借助于计算机并可利用 MATLAB 应用软件来进行。

线性系统的定性分析着重研究对系统性能和控制具有重要意义的基本结构特性。结构特性主要包括稳定性、能控性与能观测性等。可见，定性分析在线性系统理论中占据重要位置。

线性系统综合问题是对线性系统分析的一个反命题，如果所得到的系统的响应不能令人

满意，就要对系统加以改善或优化，这往往需要在系统中通过引入控制器来完成。这类问题即为系统的综合，它是建立在分析基础上的。系统综合的目的是使系统的性能达到期望的指标或实现最优化。应当注意的是，系统的综合设计是在系统模型上完成的。如果模型选取得适当，则所设计出的控制器经适当的调整就能够相应地改变实际系统的特性。

由于在数学上处理线性系统较为方便，所以线性系统理论在系统和控制理论领域中首先得到研究和发展，并成为应用最广、成果最多的分支。线性系统理论所研究的概念、原理、方法、结论的基础性，为最优控制、数字滤波与估计、过程控制、非线性控制、系统辨识、自适应控制等许多学科分支提供了预备知识。因此，线性系统理论是控制类、系统工程类、电类、计算机类及机电类等许多学科专业硕士研究生的一门基础理论课程。

本书共7章，第1章系统地导出了线性系统的输入-输出描述和状态空间描述，给出了状态空间的概念、组成方法和基本性质；第2章是对线性系统的运动分析，分别给出了连续和离散时间系统状态运动的一般表达式；第3章着重讨论线性系统的能控性与能观测性，并给出了线性系统能控性和能观测性的充要条件，讨论了系统的能控规范形和能观测规范形以及系统状态空间描述的规范分解方法；第4章引入了系统实现的概念，介绍了能控规范实现、能观测规范形实现、最小实现以及最小实现的解法，进一步揭示了状态空间描述与传递函数矩阵之间的关系；第5章对线性系统的运动稳定性问题做了较详细的介绍，一个实际运行的系统必须是稳定的，在此分别给出了输入-输出稳定性和李亚普诺夫稳定性的概念及判别方法，还介绍了李亚普诺夫直接法在系统综合方面的应用；第6章介绍了线性系统的状态反馈，包括状态反馈与输出反馈对系统能控性和能观测性的影响、系统的极点配置、输出反馈极点配置、不完全能控系统状态反馈极点配置和镇定、状态反馈解耦等；第7章介绍了状态观测器的有关理论和设计方法。

本教材是作者在总结多年教学实践的基础上，参考已出版的同类优秀教材编写而成的。参加本书编写的有陈晓平（第1～4章）、和卫星（第6～7章）和傅海军（第5章）。本书由陈晓平教授担任主编，负责全书的统稿。

由于编者水平有限，书中难免存在不足与错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第3章 线性系统的能控性与能观测性

第4章 传递函数矩阵的状态空间实现

第1章 线性系统的数学描述

建立起系统中各变量间的数学关系和变换关系，是系统分析与综合的前提条件。由于分析方法或解决问题的目的不同，描述系统行为的数学方程也有所不同。在线性系统时域理论中所使用的数学描述可分为两大类，即系统的输入-输出描述和系统的状态空间描述。系统的输入-输出描述又称为外部描述，它是通过建立系统的输入和输出之间的数学关系来描述系统特性的。在经典线性系统控制理论中的传递函数和微分方程都属于系统的外部描述。系统的状态空间描述又称为内部描述，它选用能够完善描述系统行为的被称为状态的内部变量，通过建立状态和系统的输入以及输出之间的数学关系，来描述系统行为的。系统的外部描述不是对系统的全部特性的描述，而状态空间描述是对系统行为的完善描述。

本章首先论述系统的外部描述，接着着重讨论系统的内部描述。线性系统的状态空间描述是分析和综合线性系统的基础，在此给出线性系统状态空间的概念、组成方法、基本性质、描述特性和变换等，这些概念和结论对于后面各章的讨论是不可缺少的。

1.1 线性系统的输入-输出描述

系统的输入-输出描述揭示了系统的输入和输出之间的某种数学关系。在建立系统输入-输出描述时，可以假设系统的内部特性是完全未知的，即将系统看作一个“黑箱”。向该“黑箱”施加各种类型的输入并测量出与之相应的输出，根据这些输入-输出数据，可以确定出系统的输入和输出之间的数学关系。在图1-1所示的系统中，外部对系统施加的作用或激励称为系统的输入变量，系统对外部的影响则称为系统的输出变量。假设系统有 p 个输入，q 个输出，分别用 $u_1,u_2,\cdots,u_p$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_q$ 来表示，或记为向量的形式：$\boldsymbol{u}=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots y_q]^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}$ 为系统的外部变量，其中“T”表示向量的转置。如果系统只有一个输入和一个输出（$p=1,q=1$），则称系统为单变量系统，用符号 SISO 表示；当系统的输入量或输出量多于一个时，则称其为多变量系统，用符号 MIMO 表示。可见，系统输入-输出描述是系统的外在表现，只接触系统的输入端和输出端，不去表示系统内部的结构及变量，只从输入-输出的因果关系中获悉系统内在的本质特性，因此称系统的输入-输出描述为系统的外部描述，是一种不完全的描述。若系统是一个单输入-单输出的线性定常系统，其外部描述的数学方程就是一个 n 阶微分方程及对应的传递函数。

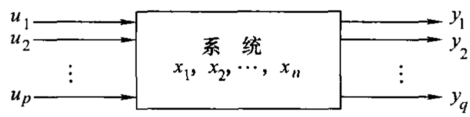


图1-1 系统的外部描述

1.1.1 线性系统

如果一个系统满足叠加定理和齐次定理，那么这个系统就叫做线性系统。

叠加定理：当有多个输入同时作用于系统时，这个系统产生的输出等于每个输入单独作

用于系统所产生的输出之和。

齐次定理：当所有输入同时增大 K 倍或缩小为 $\frac{1}{K}$ 时，相应的输出也同样增大或缩小 K $(K>0)$ 倍。

上述表述可写为
$$L(u_1+u_2)=L(u_1)+L(u_2) \tag{1-1}$$
$$L(\alpha u)=\alpha L(u) \tag{1-2}$$
或者
$$L(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1 L(u_1)+\alpha_2 L(u_2) \tag{1-3}$$

其中，L 为线性映射。满足式(1-1)称为可加性，满足式(1-2)称为齐次性，满足式(1-3)称为叠加性。

注意：不能简单地把输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 有线性关系的系统称为线性系统，满足线性关系的系统不一定是线性系统。

【例 1-1】 若 $y(t)$ 和 $u(t)$ 之间存在线性关系 $y(t)=au(t)+b$，但该系统却不是一个线性系统。因为当输入分别为 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 时，相应的输出为
$$y_1(t)=au_1(t)+b \tag{1-4}$$
$$y_2(t)=au_2(t)+b \tag{1-5}$$

然而，当输入为 $u_1(t)+u_2(t)$ 时，其输出为
$$a(u_1(t)+u_2(t))+b\neq y_1(t)+y_2(t) \tag{1-6}$$

显然，不满足叠加定理。

对于线性系统来说，叠加性是其本质特性。当 a 为有理数时，齐次性可由叠加性导出。相反，一般情况下，具有齐次性的系统未必具有叠加性。

另外还应说明，对于线性系统所提出的叠加性和齐次性这两个要求是独立的。因为有些非线性系统尽管满足叠加定理，但不一定满足齐次定理。

线性系统又分为时变系统和定常系统两类。系统的参数随时间而变化的系统称为时变系统，这种系统常用带时变系数的线性微分方程或差分方程来描述。系统参数不随时间而变化的系统称为定常系统，这种系统常用常系数线性微分方程或差分方程来描述。

1.1.2 非零初始条件与冲激输入

在图 1-2 所示的简单电路中，如电阻、电容值均为已知的，根据电路定律，有
$$\begin{cases} u_R=Ri \\ i=C\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{1-7}$$

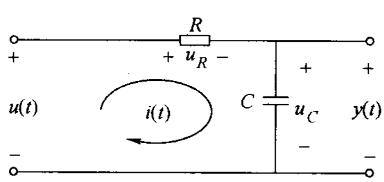


图 1-2 RC 电路

其输入量 u 与输出量 y 之间的关系可用如下微分方程来表示：
$$RC\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y(t)=u(t) \tag{1-8}$$

由式(1-8)，有
$$\dot{y}(t)=-\frac{1}{RC}y(t)+\frac{1}{RC}u(t) \tag{1-9}$$

设初始时刻为 t_0，此时电容上的电压为 y_0，则式(1-9)对于 $y(t)$ 的解为
$$y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}y_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\frac{1}{RC}u(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (t\geqslant t_0) \tag{1-10}$$

令 L 表示 u 与 y 之间的映射，即　$y=L[u]$。

如果在 $t \geqslant t_0$ 处有两个不同的输入信号 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$，则相应的输出分别为

$$y_1(t)=L[u_1(t)] \tag{1-11}$$

$$y_2(t)=L[u_2(t)] \tag{1-12}$$

$$y_{12}(t)=L[u_1(t)+u_2(t)] \tag{1-13}$$

可以验证，如果 $y_0=0$ 时，则有

$$y_{12}(t)=y_1(t)+y_2(t) \tag{1-14}$$

且有

$$\alpha y_1(t)=L[\alpha u_1(t)] \quad (\alpha \text{ 为实常数}) \tag{1-15}$$

这说明，映射为线性的，式(1-10)所代表的系统是线性系统。

如果 $y_0 \neq 0$，则有

$$y_{12}(t) \neq y_1(t)+y_2(t) \tag{1-16}$$

这说明，此时映射 L 为非线性的。同样，由式(1-10)可知，对于给定输入 $u(t)$，由于 y_0 的不同，得到的输出 $y(t)$ 也不同，这种没有唯一确定性关系的输入-输出映射，对于决定系统的重要特性是毫无意义的。这也是经典控制理论中关于传递函数的定义为什么要假设初始条件为零的原因。从这里也可得出一个结论，只有系统在初始时刻没有能量储存(初始条件为零)，在建立线性系统的输入-输出描述时，才能获得唯一确定的关系。但在实际系统中，初始条件常常不为零，对此可以将非零的初始条件等效为在初始时刻的一个冲激输入。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 为

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 & \begin{cases} t>0 \\ t<0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases} \tag{1-17}$$

下面考虑两个不同的初始值的方程：

$$\begin{cases} \dot{y}=f(y(t),t)+\varphi(t)\delta(t-t_0) \\ y(t_0)=0 \end{cases} \tag{1-18}$$

对于任意时刻，连续函数 $\varphi(t)$ 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\varphi(t_0)$

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=f(y(t),t) \\ y(t_0)=\varphi(t_0) \end{cases} \tag{1-19}$$

式(1-18)比式(1-19)多了一个强度为 $\varphi(t)$ 的冲激输入项，但其初始条件为零，而式(1-19)的初始条件不为零。

设 $f(y(t),t)$ 满足方程具有唯一解的条件，$\varphi(t)$ 为连续函数，则不难验证两个方程有相同的解：

$$y(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(y(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-20}$$

这表明，非零初始值可以用一个相应的冲激输入来等效，其物理意义是一个系统的初始能量可以是以往积累的结果，也可以由瞬时冲激输入来建立。这样，任何系统的初始条件都可以假设为零，其作用效果等同于一个冲激输入。

在后面的系统分析中，按照系统输入 u 能唯一确定输出 y 的要求，在映射关系 $y=L(u)$ 中均假设其隐含着系统初始条件为零的要求，即在系统的输入-输出描述中均假设系统的初

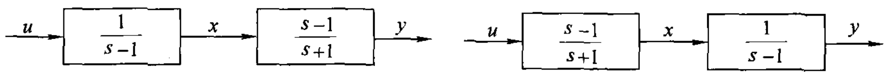
始条件为零。反之，若系统的输入 u 能够唯一地确定其输出 y 时，则系统的初始条件都可认为是零。

1.2 线性系统的状态空间

1.2.1 输入-输出描述的局限性

输入-输出描述仅表示在初始条件为零的情况下，输入向量与输出向量之间的数学关系。对于非零初始条件，这种描述不能应用。更为重要的是，输入-输出描述不能揭示系统的全部内部行为，即不能对系统进行全面的描述。

【例 1-2】 比较图 1-3 所示两个系统的异同。



a) b)

图 1-3 输入-输出描述的局限性

a) 系统 1 b) 系统 2

从输入-输出描述看，图 1-3 所示的两个系统具有相同的外部特性，即它们的传递函数都为

$$g(s)=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{s-1}{s+1}=\frac{s-1}{s+1}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s+1} \tag{1-21}$$

因此，从输入-输出角度来看系统是稳定的。但对于图 1-3a 来讲，当初始条件不为零时，系统内部变量 x 的运动过程为

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(t-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-22}$$

式中，x_0为 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 时的初值，系统内部变量 x 的运动过程中具有 $\mathrm{e}^{(t-t_0)}$ 增长项。经过一段时间后，这个系统将达到饱和或失效，因此系统不能令人满意地工作。若系统的内部结构未知，上述现象在其系统的传递函数中不可能被表现出来，因此系统的输入-输出描述不足以完全刻画出一个系统的运动行为。

对于图 1-3b 所示的系统，从输入输出关系来看，与图 1-3a 所示的系统具有相同的传递函数，但事实上这两个系统具有完全不同的内部结构。在以后的系统分析中可以看到，两个系统的确不是等价的，一个是能观不能控的，另一个是能控不能观的，这表明系统的内部特性比起由传递函数表达的外部特性要复杂得多。输入-输出描述没有包含系统的全部信息，它不能完整地描述一个系统，为此必须探求更完善的系统描述方法，这就是在线性系统时域理论中普遍采用的状态空间描述。

1.2.2 状态与状态空间

在系统的输入-输出描述中，必须假设其初始条件为零。若初始条件不为零，则 $y=L(u)$的线性映射关系不再成立。如果要唯一地确定系统的输出，除已知输入外，还要知道系统的一组初始条件。例如，根据牛顿定律可给出质点的运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F \tag{1-23}$$

式(1-23)中，m 为质点的质量；x 为在给定坐标系下质点的位移；F 为质点所受的外力。

为确定出在外力 F 作用下，质点的位移 x 的运动规律，仅知道 F 是不够的，还必须知道初始时刻 t_0质点的位置 x_0和速度$\dot{x}_0$，x_0和$\dot{x}_0$ 代表 t_0时刻以前质点运动过程对 t_0时刻质点运动状态的影响结果。至于 x_0和$\dot{x}_0$ 是如何获得的，这对于确定 t_0之后质点的运动规律是无关紧要的，重要的是 F 为已知时，x_0和$\dot{x}_0$ 完全刻画了质点在 t_0以后任意时刻的运动状态。从这个例子中可以归纳出状态的本质特点。

1. 状态

动力学系统的状态定义：能够唯一地确定系统时间域行为的一组独立(数目最少的)变量，只要给定 t_0时刻的这组变量和 $t\geqslant t_0$ 的输入，则系统在 $t\geqslant t_0$ 的任意时刻的行为随之完全确定。

必须指出，系统在 $t\geqslant t_0$ 的任意时刻的状态是由 t_0 时刻的系统状态(初始状态)和 $t\geqslant t_0$ 的输入唯一确定的，而与 t_0 时刻以前的状态和输入无关。

状态是状态空间描述的一个重要概念，下面介绍组成状态的状态变量。

2. 状态变量

状态变量是构成系统状态的变量，是指能完全描述系统行为的最小变量组的每一个变量，记为$\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$，$t\geqslant t_0$，其中 t_0 为初始时刻，n 为正整数。独立状态变量的个数，即系统微分方程的阶次 n。

对于如下系统：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

式中，$y^{(i)}=\dfrac{\mathrm{d}^iy}{\mathrm{d}t^i}$；$y$ 是系统的输出；u 是系统的输入。系统的阶数为 n，即系统的阶数为输出 y 关于时间 t 的导数的最高阶次，用来描述系统的状态变量的个数，被称为系统的阶数。

众所周知，一个用 n 阶微分方程描述的系统，当 n 个初始条件 $x(t_0)$，$\dot{x}(t_0),\cdots,x^{(n-1)}(t_0)$ 及 $t\geqslant t_0$ 的输入 $u(t)$ 给定时，可以唯一确定方程的解 $x(t)$，故变量 $x(t)$，$\dot{x}(t)$，$\cdots$，$x^{(n-1)}(t)$是一组状态变量。

对系统的状态变量有以下说明。

1）状态变量不是所有变量的总和，而是 n 个变量，这 n 个变量可以完善地描述系统的行为，而且其个数是最小的。这 n 个状态变量是线性无关的。当状态变量的个数小于 n 时，便不能完全确定系统状态；当状态变量的个数大于 n 时，则必有不独立变量，对于确定系统状态是多余的。

2）状态变量的选取不是唯一的。可以有多组状态变量，只要它们是能够完善描述系统行为的最少的一组变量即可。选择不同的状态变量只是以不同形式描述系统，由于不同的状态变量组之间存在着确定的关系，对应的系统描述随之存在的确定关系，而系统的特性则是不变的。

3）状态变量在系统的分析中是一个辅助变量，它可以是具有物理意义的量，也可以是没有物理意义的量。应优先考虑在物理上可测量的量作为状态变量，如机械系统中的转角、

位移及速度；电路系统中的电感电流和电容电压等，这些可测量的状态变量可用于实现反馈控制，以改善系统性能。

4）状态变量有时是不可测量的。在实际系统中，有些状态变量是不能被传感器所测量的。例如，对于角度随动系统，角度、角速度和角加速度可由传感器进行测量，但如果系统中有一个状态变量为角度的 4 阶导数，那就没有相应的传感器进行测量了。

5）输入量不允许选作状态变量。

6）输出量可以选作状态变量。

7）状态变量是时间域的。不能选取时间域以外的变量作为状态变量，如频率域的变量等。

状态变量可以完整地描述系统的行为，具体体现在对于任意的初始时刻 t_0，当已知状态变量在 t_0时刻的值以及 $t\geqslant t_0$的输入时，则系统中任何变量在 $t\geqslant t_0$时的运动特性就可以被完全确定。

3. 状态向量

由状态变量构成的列向量称为系统的状态向量，记为

$$[x(t)]=[x_1(t)x_2(t)\cdots x_n(t)]^{\mathrm{T}}\qquad t\geqslant t_0$$

4. 状态空间

状态空间是指状态向量的取值空间。以 n 个状态变量 $\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$ 为坐标构成的 n 维欧氏空间称为状态空间。

考虑到一个实际系统的状态变量只能取实数，因此状态空间为定义在实数域上的向量空间。设其维数为 n，则状态空间记为 $\mathfrak{R}^n$。状态空间中的每一点代表了状态变量特定的一组值，即系统中某一特定的状态。而系统在任何时刻的状态都可以用状态空间中的一个点来表示。当给定 $t=t_0$时刻的初始状态 $x(t_0)$，以及 $t\geqslant t_0$的输入函数时，随着时间的推移，状态不断变化，则 $x(t)$将在状态空间中描绘出一条轨迹，这条轨迹称为状态轨迹。

1.2.3 线性系统的状态空间描述

在了解状态及状态空间概念的基础上，就可建立起系统的状态空间描述。线性系统的状态空间描述可将系统的动态过程描述得更为细致完整，即输入引起系统内部状态的变化，而状态和输入则决定了系统输出的变化。

从系统状态空间描述的角度来看，一个动态系统的结构可分为“动力学部件”和“输出部件”，并可用如图 1-4 所示的结构图来表示。图中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是表征系统行为的状态变量组，$u_1,u_2,\cdots,u_p$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_q$ 为系统的输入变量组和输出变量组，箭头表示信号的作用方向和部件变量组间的因果关系。

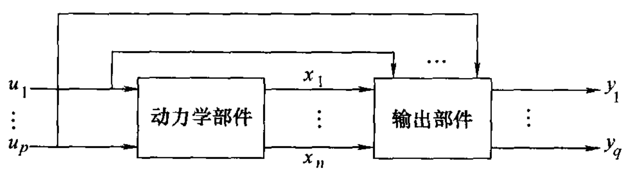


图 1-4　动态系统结构示意图

动态系统的状态空间描述需要由两个过程来反映。它们是由动力学部件所决定的“输

入引起状态变化的过程”和由输出部件所决定的“状态与输入导致输出变化的过程”。

输入引起系统状态的变化是一个动态过程，数学上必须用微分方程或差分方程来表示。每个状态变量的一阶导数与所有状态变量、输入变量关系的数学方程称为系统的状态方程。

由于 n 阶系统有 n 个独立的状态变量，故系统状态方程是由 n 个联立的一阶微分方程或差分方程组成的。

输入和状态对输出的影响是一个变量间的转换过程，数学上可以用代数方程来表示，此代数方程称为输出方程。

系统的状态空间描述分别由状态方程和输出方程来表达，统称为系统的动态方程。对于连续时间的线性系统，其动态方程的形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} & (1\text{-}24\text{a}) \\ y = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u} & (1\text{-}24\text{b}) \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量；$\boldsymbol{u}$ 为 p 维输入向量；$\boldsymbol{y}$ 为 q 维输出向量；$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 分别是维数为 $n\times n$，$n\times p$，$q\times n$ 和 $q\times p$ 的时变实值矩阵，即

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \Re^n \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \Re^q \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \in \Re^p$$

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$ 和 $\boldsymbol{D}(t)$ 分别是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上 t 的连续函数矩阵，被统称为该系统的状态空间描述的参数矩阵，简称状态参数矩阵。矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 反映了系统的许多重要特性，如稳定性等，因此常称矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 为系统的特征矩阵，简称为系统矩阵（状态阵）；矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 称为输入矩阵；矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 称为输出矩阵；矩阵 $\boldsymbol{D}(t)$ 称为耦合矩阵（前馈矩阵）。式(1-24)可简写为 $\{\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t),\boldsymbol{D}(t)\}$。式(1-24a)被称为系统的状态方程，式(1-24b)被称为系统的输出方程。由于式(1-24)所描述系统的状态空间是 n 维的，因此称此系统是 n 维动态系统。

线性系统状态空间描述的结构可以用图 1-5 所示的系统结构框图来表示。

从图 1-5 所示的结构框图中可以看出，矩阵 $\boldsymbol{D}(t)$ 描述了系统输入 u 不经状态变量对输出 y 的直接影响，它不影响系统的动态过程，实质上是系统外部模型的一部分。当利用状态模型来分析系统动态行为时，常假设 $\boldsymbol{D}(t)=0$，这样并不失去对问题讨论的一般性，而且也符合大多数系统的实际情况。

对于线性系统，系统状态空间描述中的参数矩阵只要有某元是时间 t 的函数，即式(1-24)中矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$ 的元是时间 t 的函数时，便是时变系统。而当参数矩阵的所有元均为实常数时，便是时不变系统，或称定常系统。对于定常系统，其状态空间

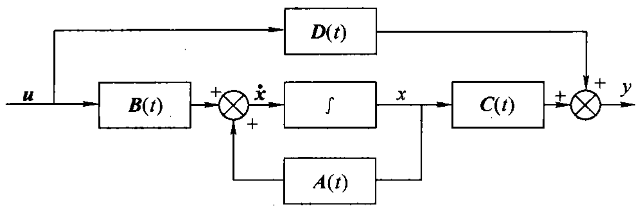


图 1-5　线性系统的结构框图

描述可改写为

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}u & (1\text{-}25)\\ y=\boldsymbol{C}x+\boldsymbol{D}u & (1\text{-}26)\end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为常值阵，系统可简记为$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\}$。

对于单变量线性时不变系统，其状态空间描述可表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{b}u & (1\text{-}27)\\ y=\boldsymbol{c}x+du & (1\text{-}28)\end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{b}$ 为 $n\times1$ 的列向量；$\boldsymbol{c}$ 为 $1\times n$ 的行向量；d 为标量。

系统的状态空间描述的优越性在于：能揭示处于系统内部的状态信息，并加以利用；一阶微分方程组比高阶微分方程宜于在计算机上求解；采用向量-矩阵形式，当各种变量数目增加时，并不增加数学表达的复杂性；可适应于单变量或多变量、线性或非线性、定常或时变、确定性或随机性各类系统的描述。

1.2.4　物理系统状态方程的建立

根据物理系统所含元件遵循的定律列写出微分方程组，选择可以测量的物理量作为状态变量，便可以导出状态方程；根据系统的输出要求来确定输出量与状态变量及输入量之间的输出方程。

【例 1-3】　考察图 1-6 所示的 RLC 电路，输入变量取电压源两端的电压 $u_S(t)$，输出变量取电容 C 两端的电压 $y(t)$，试列写系统的状态方程和输出方程。

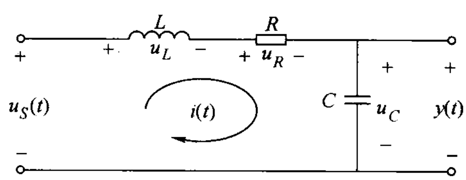


图 1-6　*RLC* 电路

解：由基尔霍夫电压定律可得该电路的 KVL 方程为 $u_L+u_R+u_C=u_S$，即该电路的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \qquad (1\text{-}29)$$

取电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 i 为状态变量，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{C}i\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}(u_S-u_C-Ri)\end{cases} \qquad (1\text{-}30)$$

让 $x_1=u_C$，$x_2=i$，即