



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线性代数 第3版

陈建华 主编

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线 性 代 数

第 3 版

主编 陈建华
参编 刘金林 魏俊潮
主审 蔡传仁

机械工业出版社

本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的。全书分6章,前3章为基础篇,介绍行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组,后3章为应用提高篇,介绍矩阵相似对角化、二次型及线性空间与线性变换的基础知识。

本书是为普通高等院校非数学专业本科生编写的,内容选择突出精选够用,语言表达力求通俗易懂,章节安排考虑了不同专业选用方便。本书也可作为大专院校和成人教育学院的教学参考书,还可供参加自考的广大读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建华主编. —3版. —北京:机械工业出版社,2011.1

普通高等教育“十一五”国家级规划教材 普通高等工科院校基础课规划教材

ISBN 978-7-111-32565-9

I. ①线... II. ①陈... III. ①线性代数—高等学校—教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第235353号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰

版式设计:霍永明 责任校对:刘怡丹

封面设计:赵颖喆 责任印制:杨曦

北京双青印刷厂印刷

2011年5月第3版第1次印刷

184mm×240mm·17.25印张·296千字

标准书号:ISBN 978-7-111-32565-9

定价:29.80元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

普通高等工科院校基础课规划教材

编 审 委 员 会

顾 问：黄鹤汀 左健民 高文龙

章 跃

主任委员：殷翔文

副主任委员：陈小兵 刘金林 陈 洪

魏贤君 季顺利

秘 书：陈建华

委 员：(排名不分先后)

陆国平 何一鸣 李秋新

陈建华 张祖凤 郑 丹

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的 21 世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德,明确的历史责任感和社会使命感,较强的创新精神、创新能力和实践能力,宽广的知识和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力,关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点,以及某些短期功利思想的影响,不少人对大学基础教育的认识相当偏颇,我们有必要在历史的回眸中借前车之鉴,在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想,坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导,以培养新世纪高素质人才为宗旨,以提高人才培养质量为主线,以转变教育思想观念为先导,以深化教学改革为动力,以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点,以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心,努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑,中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅(原江苏省教委)和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会,组织编写了大学基础课程系列教材,作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点:

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化,体现“适、宽、精、新、用”。所谓“适”,就是要深浅适度;所谓“宽”,就是要拓宽知识面;所谓“精”,就是要少而精;所谓“新”,就是要跟踪应用学科前沿,推陈出新,反映时代要求;所谓“用”,就是要理论联系实际,学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点,符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本,以学生为中心的教育思想,不为教而教。注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力,为学生今后持续创造性的学习打好基础。



尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前,但由于是一种新的探索,难免有这样那样的缺点甚至错误,敬请广大读者不吝指教,以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合,在此,一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任 殷翔文

第3版前言

《线性代数》(第2版)是我们为普通高等学校非数学专业学生编写的公共数学基础课教材.其内容选择依据教育部高等学校线性代数课程教学基本要求,涵盖了硕士研究生入学考试大纲的基本要求.其内容组织以矩阵为编写主线,辅以线性空间.其具体阐述遵循了由浅入深,难点分散的原则,力争做到删繁就简,加强基础.本教材出版以来,经几轮使用,师生的反映较好,达到了为学生提供专业学习的数学知识准备和帮助学生打下良好的素质、能力基础的目的.但在纷繁复杂的世界里,数学的新应用不断被发现,需要我们及时传达给学生.伴随我国高等教育改革的推进,教材使用者的情况也在不断变化.需要我们与时俱进,更好地将线性代数作为有用、有趣的课程讲授给学生.

这次教材修订的主要内容包括以下两个方面:

首先,习题编写上作了较大的调整.从习题的层次看,根据小节配置练习,每章再配置习题;从习题的类型看,增加了问答题、选择题、判断题等形式的习题;从习题的容量看,习题的量达到原教材的两倍以上.给学生提供了更大的可选择空间,让学生能按照自己的能力和目标接受到更合理、科学的训练.希望在增强习题训练的目的性的同时,提高习题的教育功能.

其次,正文增加“历史寻根”、“方法索引”、“背景聚焦”等栏目,介绍一些与线性代数课程相关的数学历史、数学应用及重要的数学方法,为开阔学生眼界,提高学生素养铺路架桥.值得注意的是,这部分内容读懂多少算多少,可能回过头再看,自然就能理解,有的也许还需要查阅其他参考书.借助于问答题进一步加强代数与几何的联系,帮助学生体会几何对代数的促进作用.

线性代数是最有用、最有趣的大学数学课程之一.从某种意义上说,线性代数是一种语言.建议同学们用学习外语的方法每天学习这种语言.教材习题是为了让读者理解教学内容,一个显著的特点是数值计算并不复杂.要透彻理解每一节内容,必须完成习题.如果能坚持思考每章的问答题,对理解课程内容也是很有益的.

修订工作得到扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院的大力



支持.感谢扬州大学数学科学学院的全体老师,特别是承担线性代数课程教学任务的老师,本书的形成、成长离不开他们的支持.

限于编者水平,书中定有许多不妥之处,敬请读者指正.

编者

2010年6月

第 2 版前言

普通高等工科院校基础课规划教材《线性代数》自从 2002 年出版,经几轮使用,师生的反映较好.教材内容安排合理,既满足教育部高等学校线性代数课程教学的基本要求,又涵盖了本科院校学生考研的基本要求,但也存在许多不足之处.

这次修订,在内容宏观组织上仍以矩阵为编写主线,辅以线性空间.本书在内容的具体阐述上遵循了由浅入深,难点分散的原则,删繁就简,加强基础;采用“几何观点”和“矩阵方法”并重,贯穿于教材的始终,便于读者掌握线性代数主要内容的内在规律;在培养学生能力要求上,选择最重要、最基本的内容,有利于学生形成扎实的基础,在今后的学习中以不变应万变;一方面为学生学习提供数学知识准备,另一方面要为学生今后学习打下良好的素质、能力基础.

修订的主要内容包括以下几个方面:

1. 侧重于高等学校的理工类专业学生的需要,删去第 1 版第 7 章投入产出的数学模型.
2. 重新选配正文中的部分例题,加以分析,帮助学生理解相关理论.
3. 在习题的编写上,调整部分习题,增强习题的目的性,同时分清层次,让学生能按照自己的能力和目标接受到科学的训练.增加习题答案,方便学生使用.
4. 增加附录 C,介绍数域和多项式的相关知识.
5. 查、纠教材中遗漏和错误.

此次修订工作得到了机械工业出版社、扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院的大力支持.机械工业出版社郑丹和张继宏两位老师对本书的修订出版作了大量工作,在此我们表示衷心感谢.

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编者

2005 年 5 月

第 1 版前言

线性代数是一门重要的基础课.在自然科学、工程技术和管埋科学等诸多领域有着广泛的应用.根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求,编者结合多年从事线性代数课程教学的体会编写了这本书,其目的是为普通高等学校非数学专业学生提供一本适用面较宽的线性代数教材.

在编写过程中,借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法,内容上突出精选够用,表达上力求通俗易懂.根据非数学专业学生使用的需要,以矩阵作为贯穿全书的主线,一方面让线性方法得以充分体现,同时有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理.在概念的引入、理论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与几何结合的思想,这样可以使学生从几何背景中理解代数概念的来龙去脉,并获得解决问题的启示.重视例题和习题的设计和选配,除了选配巩固课程内容的题目外还选配了部分提高题.

全书共分 7 章,既紧密联系又相对独立.本书前 3 章为基础篇,后 4 章为应用提高篇.根据本科线性代数课程教学基本要求,工科类学生应掌握本书的前 6 章的内容;管理专业、财经专业学生应掌握本书的前 5 章和第 7 章的内容;化学、化工专业和农学专业学生应掌握本书的前 4 章的内容.开设工程数学(线性代数)课程的专业,学时数为 27 学时的,选讲本教材的前 3 章以及第 4 章的第 2、3 节;学时数为 36 学时的,选讲本教材的前 4 章以及第 5 章的大部分内容.开设线性代数课程的专业,学时数为 54 学时可讲完前 6 章,或前 5 章和第 7 章.教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节进行教学.根据现行研究生入学考试的考试大纲,从内容上看,本书的前 6 章覆盖了数学(一)的考试要求,本书的前 5 章覆盖了数学(三)的考试要求,本书的前 4 章覆盖了数学(二)和数学(四)的考试要求.

在编写过程中,中国科学技术大学章璞教授对本书编写大纲提出过许多宝贵的意见,扬州大学蔡传仁教授审阅了全书,蒋宏圣副教授校阅了书稿.机械工业出版社,扬州大学教务处、理学院和数学系对本书的编写出版给予了很大的帮助,在此表示衷心的感谢.此外,编者从



线性代数第3版

学习代数学到讲授代数课程,始终得到方洪锦教授、蔡传仁教授的指导和扬州大学数学系老师的关心,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中内容、体系、结构不当甚至错误在所难免,敬请各位专家、学者不吝赐教,欢迎读者批评指正。

编者

2002年2月

目 录

序	历史寻根:范德蒙	25
第3版前言	1.4.5 递推法	26
第2版前言	1.4.6 升阶法(加边法)	26
第1版前言	1.4.7 利用已知行列式	27
第1章 行列式	1.4.8 综合例题	28
1.1 行列式的定义	习题 1.4	30
1.1.1 二阶、三阶行列式	1.5 克莱姆(Cramer)	
1.1.2 数码的排列	法则	30
1.1.3 n 阶行列式的定义	历史寻根:克莱姆	34
历史寻根:行列式	习题 1.5	34
习题 1.1	总习题一	35
1.2 行列式的性质	第2章 矩阵	39
习题 1.2	2.1 矩阵的定义与运算	39
1.3 行列式的展开定理	2.1.1 矩阵的概念	39
1.3.1 余子式和代数余子式	历史寻根:矩阵	41
1.3.2 行列式按行(列)展开定理	2.1.2 矩阵的加法	41
* 1.3.3 拉普拉斯(Laplace)展开定理	2.1.3 数乘矩阵	42
背景聚焦:解析几何中的行列式	2.1.4 矩阵与矩阵的乘法	43
习题 1.3	2.1.5 方阵的幂运算	46
* 1.4 行列式的计算	2.1.6 矩阵的转置	47
1.4.1 利用行列式的定义	2.1.7 共轭矩阵	48
1.4.2 化为上(下)三角形行列式	背景聚焦:天气的马尔可夫(Markov)链	48
1.4.3 利用行列式展开定理	习题 2.1	49
方法索引:数学归纳法	2.2 几种特殊的矩阵	50
1.4.4 数学归纳法	2.2.1 对角矩阵、数量矩阵和单位矩阵	50
	2.2.2 上(下)三角形矩阵	51
	2.2.3 对称矩阵和反对称矩阵	51



2.2.4 基本单位矩阵	53	历史寻根:线性方程组	94
习题 2.2	53	习题 3.1	95
2.3 可逆矩阵	54	3.2 向量组的线性相关性	96
2.3.1 方阵的行列式	54	3.2.1 n 维向量的概念	96
2.3.2 方阵的逆	56	3.2.2 线性表示与线性组合	98
2.3.3 矩阵方程	59	3.2.3 线性相关与线性无关	99
背景聚焦:矩阵密码法	60	3.2.4 线性相关性的几个定理	100
习题 2.3	61	历史寻根:向量	102
2.4 矩阵的分块	62	习题 3.2	103
2.4.1 矩阵的分块及运算	62	3.3 向量组的秩	103
2.4.2 可逆分块矩阵	67	3.3.1 向量组的等价	104
习题 2.4	69	3.3.2 极大线性无关组与向量组的秩	105
2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵	69	3.3.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系	107
2.5.1 矩阵的初等变换	70	习题 3.3	110
2.5.2 初等矩阵	71	3.4 向量空间	111
2.5.3 初等矩阵与初等变换	73	3.4.1 向量空间的概念	111
2.5.4 用初等变换的方法求逆矩阵	74	3.4.2 基、维数与坐标	112
习题 2.5	76	3.4.3 子空间及其维数	114
2.6 矩阵的秩	77	习题 3.4	116
2.6.1 子式	77	3.5 线性方程组解的结构	116
2.6.2 矩阵的秩	78	3.5.1 齐次线性方程组解的结构	116
2.6.3 初等变换求矩阵的秩	78	3.5.2 非齐次线性方程组解的结构	120
2.6.4 几个常见的结论	81	习题 3.5	124
历史寻根:凯莱	82	总习题三	125
习题 2.6	83	第 4 章 矩阵相似对角化	129
总习题二	83	4.1 欧氏空间 \mathbf{R}^n	129
第 3 章 向量与线性方程组	87	4.1.1 内积的概念	129
3.1 线性方程组解的存在性	87		
3.1.1 高斯(Gauss)消元法	87		
3.1.2 线性方程组解的存在性	89		



4.1.2 标准正交基	131	4.5.2 Jordan 标准形	
4.1.3 正交矩阵及其性质	135	定理	159
习题 4.1	136	4.5.3 Jordan 标准形的	
4.2 方阵的特征值和特征		求法	160
向量	137	历史寻根:矩阵论	165
4.2.1 特征值和特征向量的		总习题四	166
基本概念	137	第 5 章 二次型	169
方法索引:求实系数多项式		5.1 二次型及其矩阵	
的实根	138	表示	169
4.2.2 特征值的性质	139	5.1.1 基本概念	169
背景聚焦:特征值与 Buckey		5.1.2 线性替换	171
球的稳定性	142	5.1.3 矩阵的合同	172
4.2.3 特征向量的性质	142	历史寻根:二次型	172
历史寻根:特征值和特征		习题 5.1	173
向量	144	5.2 化二次型为标准形	173
习题 4.2	145	5.2.1 正交替法	174
4.3 矩阵相似对角化		5.2.2 配方法	176
条件	145	5.2.3 初等变换法	178
4.3.1 相似矩阵	145	习题 5.2	180
4.3.2 矩阵可对角化		5.3 化二次型为规范形	181
条件	147	5.3.1 实二次型的规范形	181
4.3.3 矩阵相似对角化的		5.3.2 复二次型的规范形	183
应用	149	习题 5.3	184
背景聚焦:工业增长模型	151	5.4 正定二次型和正定	
习题 4.3	152	矩阵	184
4.4 实对称矩阵的相似		5.4.1 基本概念	185
对角化	153	5.4.2 正定二次型的判定	185
4.4.1 实对称矩阵的特		5.4.3 正定矩阵的性质	191
征值和特征向量	153	5.4.4 其他有定二次型	192
4.4.2 实对称矩阵相似		习题 5.4	193
对角化	153	总习题五	194
背景聚焦:面貌空间	157	* 第 6 章 线性空间与线性	
习题 4.4	157	变换	197
* 4.5 Jordan 标准形		6.1 线性空间的概念	197
介绍	158	6.1.1 线性空间的定义与	
4.5.1 Jordan 矩阵	158		



例子	197	表示	213
6.1.2 线性空间的简单		习题 6.3	215
性质	199	6.4 线性变换在不同基下	
6.1.3 子空间	200	的矩阵	215
6.1.4 实内积空间	201	习题 6.4	218
习题 6.1	203	总习题六	219
6.2 线性空间的基、维数		附录	222
和坐标	204	附录 A 矩阵特征问题的	
6.2.1 基与维数	205	数值解	222
6.2.2 坐标	206	附录 B 广义逆矩阵简介 ..	227
6.2.3 基变换与坐标变换 ..	207	附录 C 数域与多项式	
习题 6.2	210	简介	230
6.3 线性变换	210	附录 D Maple 的基本	
6.3.1 线性变换的概念	210	知识	234
6.3.2 线性变换的简单		部分习题答案与提示	240
性质	212	参考文献	261
6.3.3 线性变换的矩阵			

第 1 章

行 列 式

线性代数是高等学校的一门重要基础课,也是中学代数的继续和发展.行列式是线性代数中主要研究对象方阵的重要数值特征,它在线性代数中起着重要作用.本章介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及简单应用.

1.1 行列式的定义

行列式的概念来源于解线性方程组的问题.在初等数学中,为了简化线性方程组解的表达式,引进了二、三阶行列式的概念.作为线性代数的重要工具,在讨论 n 元线性方程组和向量的运算时,需要把行列式推广到 n 阶,即讨论 n 阶行列式的问题.

1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

的解,实际上为平面上两条直线的交点.当这两条直线不平行时,即 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,利用消元法可解得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

为了便于记忆上述解的公式,引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$



并称之为二阶行列式. 利用二阶行列式的概念, 方程组(1-1)的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D},$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

【例 1-1】 解线性方程组

$$\begin{cases} \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 = a, \\ \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 = b. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -\sin \theta \\ b & \cos \theta \end{vmatrix} = a \cos \theta + b \sin \theta,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos \theta & a \\ \sin \theta & b \end{vmatrix} = b \cos \theta - a \sin \theta,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = a \cos \theta + b \sin \theta,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = b \cos \theta - a \sin \theta.$$

对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1-2)$$

可以进行类似的讨论. 由此引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

并称之为 3 阶行列式. 行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列. 行列式中的数, 称为行列式的元素. 每个元素有两个下标, 第一个下标表示它所在的行, 称为行指标; 第二个下标表示它所在的列, 称为列指标, 如 a_{12} 就是位于第 1 行, 第 2 列的元素. 2、3 阶行列式所表示的数利用对角线法