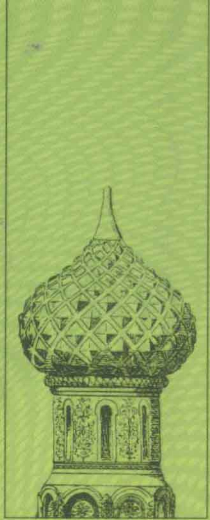


吉米多维奇数学分析习题集学习指引

(第二册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

吉米多维奇
数学分析习题集
学习指引

(第二册)

□ 谢惠民　沐定夷　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUEXI ZHIYIN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2010年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道路、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集学习指引. 第2册/谢惠民，沐定夷编著.—北京：高等教育出版社，2011.4
ISBN 978-7-04-032356-6

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①谢…②沐… Ⅲ.①数学分析-高等学校-题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第055450号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×1092　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	26.25	版　　次	2011年4月第1版
字　　数	600 000	印　　次	2011年4月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 32356-00

使用说明

《学习指引》的第二册对应于《吉米多维奇数学分析习题集》(以下简称为《习题集》) 的第三章、第四章和第五章, 即从不定积分、定积分到无穷级数.

与本书的第一册相同, 由于很多节内的习题量相当大, 含有不同的内容和层次, 因此在大多数节中, 都将习题分成若干小节. 例如 §3.1.7 就是第三章第 1 节的第 7 小节. 又如 §1.4.7, §2.8 和 §2.12.2 等则均见于《学习指引》的第一册.

这样的安排也会带来一些不便, 这就是在节内的各个小节之间的习题顺序与原有的题号顺序不完全一致. 为了方便读者对习题的检索, 本书的目录中在每一节和每一小节的标题后都在括号内标明它们所覆盖的习题编号. 这样的安排在第二册中只有一个例外, 即在 §3.1.8 小节集中了 §3.1 节中所有与双曲函数有关的习题, 但没有在目录中标出这些习题的位置变动.

本书在各节或各小节所覆盖的习题中只能选取部分习题进行讲解或作分析. 在解答时, 无论是计算题还是证明题一律用"**解**"开始. 在交叉引用前后的习题时, 如果它在本书有讲解, 则会指明所在的节或小节. 否则, 一般会简述其内容, 至于该题的完整叙述则请看《习题集》的全译本.

在不少节的最后, 本书会添加一小节, 称为补注, 其中包含对某些难题的解、对某些内容的注解和补充.

根据需要, 本书还增加了若干命题和少量例题, 其中命题按章编号, 例题不独立编号. 第二册在正文后设置一个附录, 其中列出前面所有命题的内容和页码.

本书的编写中利用了大量的参考资料. 在参考文献中只列出第二册引用到的书籍. 对于引用的论文, 只在引用处写明其所在杂志、标题、页码和年份.

本书采取以下常用的数学记号:

(1) 用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数, 用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数, 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体有理数, 用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数.

(2) 设 P, Q 为命题, 用 $P \iff Q$ 表示 P 与 Q 等价; 用 $P \Longrightarrow Q$ 表示若 P 成立, 则 Q 成立.

(3) 用记号" □ "表示解、分析和证明等的结束.

附 下面列出在第二册中尚未解决的两个问题, 敬请读者赐教或告知有关文献.

(1) 证明: 当 $x \geqslant 1$ 时成立不等式:

$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} + x^{-\frac{1}{x}} > 2.$$

(见 §5.9.2 的习题 3094 的一个底注, 但与该题的解无直接关系.)

(2) 证明: 当 $|x| > 1$ 时无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$$

发散. (见 §5.9.2 的习题 3083.)

目　　录

第三章 不定积分

内容简介 这一章学习不定积分的计算. §3.1 包含了最为基本的积分方法和习题. 此后的 §3.2–§3.5 则按照被积函数为有理函数、无理函数、三角函数与其他超越函数分别介绍各种计算方法. §3.6 是综合和复习, 并含有少量带有理论性的习题.

对不定积分来说, 最基本的出发点就是第一册 §2.6.4 的习题 1259, 即在区间上导数处处等于 0 的函数只能是这个区间上的常值函数. 由此即可推出, 若在区间上定义的函数 $f(x)$ 有原函数, 则其所有原函数彼此之间只相差一个任意常数. 我们将 $f(x)$ 的所有原函数全体称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

在进入计算题之前, 先介绍下列结果. 它在理论和计算方面都是基本的.

命题 3.1 设在区间上定义的函数 $f(x)$ 有原函数, 则有以下结论成立:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则它的每一个原函数都是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则它的原函数中必有唯一的一个奇函数;

(3) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 则其所有原函数都是周期为 T 的周期函数与同一个线性函数之和.

证 用 $F(x)$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 于是在 f 的定义区间上有 $F'(x)=f(x)$.

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则有

$$[F(x)-F(-x)]'=f(x)+f(-x)=0,$$

由此可见 $F(x)-F(-x)=c$, 即在 f 的定义区间上为常值函数. 令 $x=0$ 代入, 可见 $c=0$. 于是有 $F(x)=F(-x)$, 即是偶函数[①].

(2) 任取一个原函数 $F(x)$, 则 $F(x)-F(0)$ 也是原函数. 从 $F'(x)=f(x)$ 为偶函数出发, 可见 $[(F(x)-F(0))+(F(-x)-F(0))]'=f(x)-f(-x)=0$, 于是 $(F(x)-F(0))+(F(-x)-F(0))=c$ 为常值函数. 用 $x=0$ 代入可见 $c=0$. 于是得到 $F(x)-F(0)=-(F(-x)-F(0))$, 这表明 $F(x)-F(0)$ 为奇函数. 其他所有原函数 $F(x)+C\ (C\neq -F(0))$ 在 $x=0$ 处不等于 0, 因此都不会是奇函数.

(3) 若 f 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 $T\,(>0)$ 的周期函数, 即有 $f(x+T)=f(x)$. 若 $F(x)$ 是一个原函数, 则 $[F(x+T)-F(x)]'=f(x+T)-f(x)=0$, 因此 $F(x+T)-F(x)=c$ 是常值函数. 用 $x=0$ 代入, 则 $c=F(T)-F(0)$, 于是就有 $F(x+T)-F(x)=c$.

这时考察函数 $G(x)=F(x)-\dfrac{c}{T}x$, 则就有

---

① 对于区间上定义的奇函数或偶函数, 其定义区间一定包含点 $x=0$.

$$G(x+T)-G(x)=[F(x+T)-\frac{c}{T}(x+T)]-[F(x)-\frac{c}{T}x]$$
$$=F(x+T)-F(x)-c=0,$$

因此 G 是周期为 T 的周期函数. 从而 $F(x)=G(x)+\frac{c}{T}x$, 即一个周期函数与一个线性函数之和. 可以看出, 由此加上任意常数得到的所有原函数中, 其中关于 x 的一次项 $\frac{c}{T}x$ 都是相同的. □

注 在学了第四章的定积分之后, 可以对于命题 3.1 给出新的证明, 参见 §4.2.5 的习题 2259 和 2267.

§3.1 最简单的不定积分 (习题 1628–1865)

内容简介 本节学习不定积分中最为基本的方法. 各个小节基本上按照方法将习题分类. 这里比较重要的是要学会换元法和分部积分法. 其中换元法有两种. 为简单起见, 假设以下出现的函数或导函数都是连续函数.

第一种换元法 (直接代换法) 是将不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 改写为

$$f(x)\,\mathrm{d}x=g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x,$$

于是通过代换 $u=\omega(x)$ 就得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x=\int g(u)\,\mathrm{d}u. \tag{3.1}$$

如果这时右边的不定积分能够求出为

$$\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C,$$

则答案为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(\omega(x))+C.$$

由此可见, 这种方法包含三个要点. 首先是将被积函数 $f(x)$ 分拆为两个因子 $f(\omega(x))\omega'(x)$, 使得第二个因子与 $\mathrm{d}x$ 成为微分 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}\omega(x)=\omega'(x)\,\mathrm{d}x$, 同时又使得第一个因子是 $u=\omega(x)$ 的函数; 其次是能够求出 $g(u)$ 的不定积分 $G(u)+C$; 最后必须将 $u=\omega(x)$ 代入到这个不定积分中, 得到以 x 为自变量的原函数全体.

由于以上的第一步经常是凑出来的, 而最后又有 $\mathrm{d}G(\omega(x))=g(\omega(x))\omega'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x$, 因此这个方法也常称为凑微分法.

第二种换元法 (逆代换法) 是用某个可微函数 $x=\varphi(t)$ 代入到被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 中, 于是就得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

这时如果上式右边的不定积分能够积出为 $F(t)+C$, 且 $x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 则就得到答案为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(\varphi^{-1}(x))+C.$$

两种换元法很相似, 都要求在采用新变量后的不定积分能够积出来. 然而它们之间又有不同:

(1) 等式 (3.1) 主要是将左边积分号下的表达式凑成微分, 而等式 (3.2) 是用 $x=\varphi(t)$ 代入, 因此第二种换元法常称为代入法.

(2) 在得到 (3.1) 之前, 往往已经知道, 或者估计能够求得 $\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C$, 因此在上式右边代入 $u=\omega(x)$ 就给出了问题的答案. 然而在用代入法时, 却往往是写出 (3.2) 的右边之后, 再看用什么方法求积. 若右边积不出, 则这次用 $x=\varphi(t)$ 的代入不成功, 还要另想别法, 其中包括用别的函数代入, 或用其他方法.

以下按照《习题集》原有的安排分成若干小节来学习. 除了 §3.1.1 为直接用积分表求积之外, 从 §3.1.2 到 §3.1.7 的每一小节的标题即指出了所用的主要方法, 但并非绝对. 有不少题可以考虑用其他方法来求解, 也许可能更好. 为此我们对部分题给出了多种解法以供比较. 又将分散在各个小节中有关双曲函数的习题全部集中在最后一个小节 §3.1.8 中, 其中包括对于双曲函数的基本知识的介绍.

本节以下提到的函数 $f(x)$ 等, 在不作其他说明时, 均假设是区间上的连续函数.

3.1.1 直接用积分表求积 (习题 1628–1653)

《习题集》在本节开始列出了最简单的积分表, 它相当于一般教科书中的积分表. 然而, 对本小节中的不定积分习题, 除了用最简单积分表中的公式之外, 还经常要利用不定积分的线性性质, 这就是在已知

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad \int g(x)\,\mathrm{d}x=G(x)+C,$$

且设 a,b 为常数时, 就有

$$\int[af(x)+bg(x)]\,\mathrm{d}x=aF(x)+bG(x)+C.$$

由于这里的问题比较简单, 只举少数例题. 然而对于第一次学习积分的读者来说, 本小节的习题都是不可或缺的基础训练.

习题 1628 求 $\int(3-x^2)^3\,\mathrm{d}x$.

解 用二项式定理将被积函数展开后即可逐项求积如下:

$$\begin{aligned}\int(3-x^2)^3\,\mathrm{d}x&=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)\,\mathrm{d}x\\&=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1646 求 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数的分子在因式分解后可为分母整除, 因此可展开求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x&=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C.\quad\square\end{aligned}$$

3.1.2　用线性代换求积 (习题 1654–1673)

本小节的求积都依赖于习题 1654 给出的公式, 这种方法称为用线性代换求积.

习题 1654 证明: 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$, 则

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$$

解 利用不定积分是求导运算的逆运算, 从题设条件有 $F'(x)=f(x)$, 因此只要用链式法则就有

$$\Big[\frac{1}{a}F(ax+b)\Big]' = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b),$$

这与所要求证的结论等价. □

注 习题 1654 既可以从第一种换元法 (即凑微分法) 来理解, 也可以从第二种换元法 (即代入法) 来理解. 下面对此作一些解释.

写出

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b),$$

并利用已知 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C$, 就可见上述不定积分的答案为

$$\frac{1}{a}F(u)\Big|_{u=ax+b}+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

由此可见, 这就是凑微分法的最简单情况之一.

现在对积分 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ 用第二种换元法, 令 $ax+b=t$, 即 $x=\frac{1}{a}(t-b)$, 则有

$$\begin{aligned}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x &= \int f(t)\Big(\frac{1}{a}(t-b)\Big)'\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由于已知有 $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$, 因此上述最后一式即等于 $\frac{1}{a}F(t)\Big|_{t=ax+b}+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

由此可见, 两种换元法的思路虽然不同, 但对于习题 1654 来说几乎没有区别. 本小节的标题表明, 它是用线性代换求不定积分的一种方法.

对于第一次学习不定积分的读者来说, 上述两种换元法的解释中还有两个值得注意之处, 它们都是不定积分中的基本常识.

一方面, 有了 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$ 之后, 那么也就成立 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C$, $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C$ 等等.

另一方面, 不定积分 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ 作为原函数全体的集合, 其自变量必须是 x, 因此在前面的解释中最后必须用 $u=ax+b$ 或者 $t=ax+b$ 代入, 才能得到正确的结果.

习题 1656 求 $\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$.

解 用习题 1654 的结果可求积如下:

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}(2x-3) = \frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C. \quad \square$$

习题 1661 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

解 按照习题 1654 的方法可求积如下:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{3}{2}x^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C. \quad \square\end{aligned}$$

习题 1668 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

解 用三角函数的半角公式即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} + C. \quad \square$$

利用线性代换可以从《习题集》中的基本积分公式得到如下含有参数的积分公式 (在被积函数中出现 a^2 时设 $a>0$), 它们在许多教科书中都作为基本公式出现. 本书以下也将直接引用.

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C \ \ (\alpha \lessgtr 0).\end{aligned}} \tag{3.3}$$

3.1.3 用凑微分法求积 (习题 1674–1720)

如本节一开始所说, 第一种换元法是求不定积分的主要方法之一, 它的要点是将被积表达式凑成为某一个已知函数的微分, 故亦称为凑微分法. 这一小节的习题是这方面的基本训练. 当然其中的题也经常可以用其他方法求解.

如前所述, 在使用第一种换元法的公式 (3.1) 时, 实际上是分两步做, 即先将被积表达式看成为 $g(\omega(x))$ 与 $\mathrm{d}\omega = \omega'(x)\,\mathrm{d}x$ 之积, 然后令 $u=\omega(x)$, 再计算出 $f(u)$ 的不定积分为 $F(u)+C$, 最后用 $u=\omega(x)$ 代入.

从本小节的较后的习题可见, 上述第二步, 即求 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$, 也还可能再用凑微分法 (或其他方法) 做下去.

习题 1675 求 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

解 用 $x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}x^3$ 不如用 $x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(1+x^3)$, 然后即可用凑微分法求积如下:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(1+x^3)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1680 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

解 利用 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}(2\sqrt{x})$, 即可求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}=2\arctan\sqrt{x}+C.\quad\square$$

习题 1682 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 1 将积分中的被积函数改写如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

然后利用 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$, 即可用凑微分法求积如下:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C.\quad\square$$

解 2 也可以将以上计算改写为用第二种换元法 (即代入法), 所用的代换 $x=\frac{1}{t}$ 称为倒代换. 这时有 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}x}{x}=t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$, 于是可求积如下:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}&=\int\frac{t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=-\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+C\\&=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 本题的被积函数在 $x=0$ 处无定义, 因此应当在两个区间 ($x>0$ 和 $x<0$) 上分别求积. 上述解 1 和解 2 都只对 $x>0$ 有效. 对于 $x<0$ 的另一半情况可以用代换 $x=-t$ 解决. 这与我们熟知的积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$ 相同.

为简明起见, 今后我们对类似的不定积分题一般只写出某些情况 (例如 $x>0$ 或 $t>0$ 等) 的求解过程和答案, 对于其余情况可用类似的代换得到. 对于被积函数为区间上的奇函数或偶函数的情况, 则可用命题 3.1 之 (1) 或 (2) 解决.

习题 1684 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 1 将被积函数的分母作类似于习题 1682 解 1 中的处理, 即可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C. \quad \square$$

解 2 用倒代换 $x = 1/t$ 可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

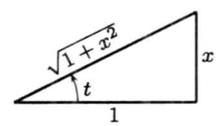
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C. \quad \square$$

解 3 用三角代换 $x = \tan t$ 则可求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^3 t} = \int \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C. \quad \square$$



辅助三角形

注 在解 3 的代换中可设 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 从而对 $x \geqslant 0$ 和 $x < 0$ 同时有效, 而解 1 和解 2 均只对 $x \geqslant 0$ 有效, 然后利用命题 3.1 可知其答案对 $x < 0$ 也成立. 此外, 解 3 的最后一步要将 $\sin t$ 写成为 x 的函数, 这可以用附图中的辅助三角形来完成.

习题 1692 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

解 1 仿照习题 1682 解 1 的方法, 可凑微分求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}} = -\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{-x})^2}}$$

$$= -\ln(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}) + C$$

$$= x - \ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}) + C. \quad \square$$

解 2 用代入法. 令 $\mathrm{e}^x = t$, 即 $x = \ln t$, 于是可将积分归结为习题 1682 如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}\right) + C,$$

其中由于 $t = \mathrm{e}^x > 0$, 在取对数时的绝对值号可以略去. 最后再用 $t = \mathrm{e}^x$ 代入即可得到与解 1 相同的答案. $\square$

习题 1700(a) 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

解 1 不妨设 $a,b\geqslant 0$, 且不同时为 0.

若 $a=b>0$, 则有

$$\int \frac{\sin x\cos x}{a}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\sin^2 x+C.$$

若 $a\neq b$, 则可凑微分求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2]}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.\quad\square$$

解 2 利用

$$\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\mathrm{d}(\cos 2x),$$

即可凑微分求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\int \frac{\mathrm{d}\left(a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\right)}{\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.\quad\square$$

习题 1702 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

解 这可用 $\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (或者 $\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$) 凑微分求积如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\tan^2 x+2}=\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.\quad\square$$

下一个习题的答案是基本的积分公式之一, 其中所用的各种方法也都值得学习.

习题 1703 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

解 1 利用 $(\tan u)'_u=\sec^2 u$ 和正弦函数的半角公式, 可凑微分求积如下:

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.\quad\square$$

解 2 也可以不用半角公式而凑微分求积如下:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x - 1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C. \quad \square \end{aligned}$$

解 3 利用所谓的万能代换 (参见后面的 §3.4.3), 令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则就有

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

于是可求积如下:

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

注 本题的答案还可有其他形式, 为今后引用方便将几个常用答案列表如下:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C \\ &= \ln|\csc x - \cot x| + C. \end{aligned}} \tag{3.4}$$

习题 1704 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 利用代换 $x + \frac{\pi}{2} = t$ 就有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)},$$

于是已经将问题归结为上一个习题, 以下只列出与 (3.4) 平行的几个答案. $\square$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{\cos x}{1-\sin x}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}} \tag{3.5}$$

习题 1712 求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解 将被积函数的分子分母同除以 x^2, 然后可凑微分求积如下:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C. \quad \square$$

习题 1718 求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解 1 利用三角恒等式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 可将被积函数的分母改写为

$$\sin^4 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2x),$$

然后利用凑微分

$$\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{d}(\cos 2x),$$

即可求积如下:

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x} = -\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C. \quad \square$$

解 2 将被积函数的分子分母同除以 $\cos^4 x$, 然后可凑微分求积如下 (也就是作代换 $t=\tan x$):

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x\,\mathrm{d}(\tan x)}{1+\tan^4 x} = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2)}{1+(t^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x)+C. \quad \square$$

注 此题的两个解所得到的答案不同, 这在不定积分求积中是常见的. 对本题来说, 可以利用 §1.8.2 的习题 776 (即反正切加法定理) 证明[①]

$$\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos 2x+\tan^2 x}{1-\cos 2x\tan^2 x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8},$$

从而知道上述两个答案都是正确的. 然而这样的证明推导有时是很困难的. 反之, 只要两个解都正确的话, 根据不定积分的基本定理, 即 §2.6.4 的习题 1259, 就可以肯定任何两个原函数之差为常数. 对本题来说, 即可断定有

$$\frac{1}{2}\arctan(\tan^2 x)-\left(-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\right) = C_1,$$

然后令 $x=0$ 代入就知道 $C_1=\frac{\pi}{8}$. 这比上面应用习题 776 要容易得多.

因此对于今后遇到类似的情况, 即某个不定积分出现多个不同答案时, 最简单的方法就是通过求导计算去验证每个答案求导后是否得到原题中的被积函数. 由于求导数是数学分析中最为简单的运算, 因此这是切实可行的方法.

① 为清楚起见, 将本题的变量 x 改记为 t, 则需要证明当 $x(t)=\cos 2t$, $y(t)=\tan^2 t$ 时, 反正切加法定理中的 $\varepsilon(x(t),y(t))=0$. 由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为周期 π 的偶函数, 因此只需证明在 $[0,\pi/2)$ 上 $x(t)y(t)<1$. 在 $t\in[0,\pi/4]$ 时可从 $0\leqslant\cos 2x\leqslant 1$ 和 $0\leqslant\tan^2 t\leqslant 1$ 得到, 而在 $t\in(\pi/4,\pi/2)$ 时则明显有 $x(t)y(t)<0$.