

可下载教学资料

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



高等学校教材
计算机科学与技术

离散数学习题集

谢美萍 陈 媛 编著

清华大学出版社

高等学校教材
计算机科学与技术

离散数学习题集

谢美萍 陈 媛 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本习题集是清华大学出版社出版的《离散数学》(ISBN 978-7-302-17509-4)的辅导用书。在本习题集中针对《离散数学》教材的每一章都配备了一定数量的例题,给出了详细的解答,同时,也对教材的习题作了相应的解答。

本习题集可作为计算机专业及相关专业学习《离散数学》的辅导用书,也可作为计算机专业及相关专业考研的辅导用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题集/谢美萍,陈媛编著. —北京:清华大学出版社,2011.9

(高等学校教材·计算机科学与技术)

ISBN 978-7-302-26018-9

I. ①离… II. ①谢… ②陈… III. ①离散数学—高等学校—习题集 IV. ①O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 131085 号

责任编辑:郑寅堃 张为民

责任校对:白 蕾

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62795954, jsjic@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:8.5 字 数:204 千字

版 次:2011 年 9 月第 1 版 印 次:2011 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:15.00 元

编审委员会成员

(按地区排序)

清华大学

周立柱 教授
 覃 征 教授
 王建民 教授
 冯建华 教授
 刘 强 副教授
 杨冬青 教授
 陈 钟 教授
 陈立军 副教授
 马殿富 教授
 吴超英 副教授
 姚淑珍 教授
 王 珊 教授
 孟小峰 教授
 陈 红 教授
 周明全 教授
 阮秋琦 教授
 赵 宏 副教授
 孟庆昌 教授
 杨炳儒 教授
 陈 明 教授
 艾德才 教授
 吴立德 教授
 吴百锋 教授
 杨卫东 副教授
 苗夺谦 教授
 徐 安 教授
 邵志清 教授
 杨宗源 教授
 应吉康 教授
 乐嘉锦 教授
 孙 莉 副教授
 吴朝晖 教授
 李善平 教授
 李 云 教授

北京大学

北京航空航天大学

中国人民大学

北京师范大学

北京交通大学

北京信息工程学院

北京科技大学

石油大学

天津大学

复旦大学

同济大学

华东理工大学

华东师范大学

东华大学

浙江大学

扬州大学

南京大学	骆 斌 教授
南京航空航天大学	黄 强 副教授
	黄志球 教授
南京理工大学	秦小麟 教授
南京邮电学院	张功萱 教授
苏州大学	朱秀昌 教授
	王宜怀 教授
江苏大学	陈建明 副教授
中国矿业大学	鲍可进 教授
武汉大学	张 艳 教授
华中科技大学	何炎祥 教授
中南财经政法大学	刘乐善 教授
华中师范大学	刘腾红 教授
	叶俊民 教授
	郑世珏 教授
江汉大学	陈 利 教授
国防科技大学	颜 彬 教授
	赵克佳 教授
中南大学	邹北骥 教授
湖南大学	刘卫国 教授
西安交通大学	林亚平 教授
	沈钧毅 教授
长安大学	齐 勇 教授
哈尔滨工业大学	巨永锋 教授
吉林大学	郭茂祖 教授
	徐一平 教授
山东大学	毕 强 教授
	孟祥旭 教授
中山大学	郝兴伟 教授
厦门大学	潘小轰 教授
仰恩大学	冯少荣 教授
云南大学	张思民 教授
电子科技大学	刘惟一 教授
	刘乃琦 教授
成都理工大学	罗 蕾 教授
	蔡 淮 教授
西南交通大学	于 春 副教授
	曾华燊 教授

改革开放以来,特别是党的十五大以来,我国教育事业取得了举世瞩目的辉煌成就,高等教育实现了历史性的跨越,已由精英教育阶段进入国际公认的大众化教育阶段。在质量不断提高的基础上,高等教育规模取得如此快速的发展,创造了世界教育发展史上的奇迹。当前,教育工作既面临着千载难逢的良好机遇,同时也面临着前所未有的严峻挑战。社会不断增长的高等教育需求同教育供给特别是优质教育供给不足的矛盾,是现阶段教育发展面临的基本矛盾。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2001年8月,教育部下发了《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》,提出了十二条加强本科教学工作提高教学质量的措施和意见。2003年6月和2004年2月,教育部分别下发了《关于启动高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作的通知》和《教育部实施精品课程建设提高高校教学质量和人才培养质量》文件,指出“高等学校教学质量和教学改革工程”是教育部正在制定的《2003—2007年教育振兴行动计划》的重要组成部分,精品课程建设是“质量工程”的重要内容之一。教育部计划用五年时间(2003—2007年)建设1500门国家级精品课程,利用现代化的教育信息技术手段将精品课程的相关内容上网并免费开放,以实现优质教学资源共享,提高高等学校教学质量和人才培养质量。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上;精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展、顺应并符合新世纪教学发展的规律、代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻

性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。首批推出的特色精品教材包括:

(1) 高等学校教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。

(2) 高等学校教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。

(3) 高等学校教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。

(4) 高等学校教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。

(5) 21 世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。

(6) 21 世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。

(7) 21 世纪高等学校规划教材·电子商务。

(8) 21 世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过近 20 年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材经过 20 多年的精雕细刻,形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会
E-mail: dingl@tup.tsinghua.edu.cn

离散数学是计算机专业的一门重要基础课,它所研究的对象是离散数量关系和离散结构数学模型,计算机的许多领域都要用到离散数学中的概念。

离散数学课程主要介绍离散数学的各个分支的基本概念、基本理论和基本方法,这些概念、理论以及方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络等专业课程中,同时,该课程所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高,也有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养。

本习题集的目的是使学生加深对基本概念及主要定理的理解,并应用这些概念和定理去解决具体的问题。离散数学理论课与习题课互相配合,各有侧重。理论与习题的有机结合,可使学生的抽象思维能力、逻辑推理能力等方面得到进一步提高。学生只要掌握了这些能力和方法,能够做到举一反三、触类旁通,就可以在老师的启发下去主动地发现问题、思考问题、解决问题。

2008年9月,主教材《离散数学》(谢美萍编著)已由清华大学出版社出版发行,作为对该教材的补充,我们又编写了本习题集。本习题集在章这一层次结构上与主教材一致,每章分为内容提要、典型例题、习题解答三个部分。内容提要部分是主教材相应章节内容的提炼,典型例题部分针对主教材补充介绍了一些例题,习题解答部分对主教材每一章的习题给出了完整的答案。

另外,本书的出版得到了国家自然科学基金(71001058)的资助。

由于作者水平有限,书中难免有疏漏和不足之处,欢迎大家批评指正,在此表示感谢。

作 者

2011年6月

目 录

高等学校教材·计算机科学与技术

第 1 章 集合的基本概念	1
1.1 内容提要	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 集合间的关系	1
1.1.3 集合的运算	2
1.1.4 幂集和编码	3
1.1.5 集合恒等式的证明	4
1.2 典型例题	4
1.3 习题解答	9
第 2 章 关系	13
2.1 内容提要	13
2.1.1 关系的基本概念	13
2.1.2 关系的表示方法	14
2.1.3 关系的运算	14
2.1.4 关系的性质	15
2.1.5 关系的闭包	15
2.1.6 等价关系与划分	16
2.1.7 偏序关系	17
2.2 典型例题	17
2.3 习题解答	25
第 3 章 函数	30
3.1 内容提要	30
3.1.1 函数的基本概念	30
3.1.2 特殊函数	30
3.1.3 复合函数与逆函数	31

3.2 典型例题	31
3.3 习题解答	33
第4章 代数系统及其性质	36
4.1 内容提要	36
4.1.1 二元运算及其性质	36
4.1.2 代数系统	37
4.1.3 同态与同构	37
4.2 典型例题	37
4.3 习题解答	41
第5章 几个典型的代数系统	44
5.1 内容提要	44
5.1.1 群	44
5.1.2 环和域	44
5.1.3 格与布尔代数	45
5.2 典型例题	45
5.3 习题解答	48
第6章 命题逻辑	51
6.1 内容提要	51
6.1.1 命题与命题联结词	51
6.1.2 命题公式与真值表	52
6.1.3 命题公式的等价关系和蕴涵关系	52
6.1.4 命题公式的范式表示	53
6.1.5 命题演算的推理理论	54
6.2 典型例题	54
6.3 习题解答	66
第7章 一阶谓词逻辑	73
7.1 内容提要	73
7.1.1 一阶逻辑基本概念	73
7.1.2 谓词公式及其解释	73
7.1.3 谓词公式之间的关系与范式表示	74
7.1.4 谓词演算的推理理论	74
7.2 典型例题	75
7.3 习题解答	82

第 8 章 图	88
8.1 内容提要	88
8.1.1 图的基本概念	88
8.1.2 通路、回路和连通图	90
8.1.3 图的连通性	91
8.1.4 图的矩阵表示	91
8.2 典型例题	92
8.3 习题解答	102
第 9 章 特殊图	106
9.1 内容提要	106
9.1.1 欧拉图及其应用	106
9.1.2 哈密顿图及其应用	106
9.1.3 二分图	107
9.1.4 平面图与对偶图	108
9.1.5 平面图的着色	109
9.1.6 树与生成树	110
9.2 典型例题	111
9.3 习题解答	116
参考文献	120

集合的基本概念

1.1 内 容 提 要

1.1.1 集 合

1. 集合的定义

一般认为,集合的概念是不能精确定义的,它是指一些可以确定的可分辨的事物构成的整体。

2. 元素的定义

如果一个特定的事物属于这个集合,则称其为这个集合的元素。一个集合可以作为另一个集合中的元素。元素和集合之间的关系是属于关系或者不属于关系,前者用符号 $\in$ 表示,后者用符号 $\notin$ 表示。

3. 集合的表示方法

- (1) 列举法:将集合中的元素一一列举,并用一对花括号括起来。
- (2) 描述法:将集合中元素所具备的某种特性刻画出来,通常采用某种函数来概括元素共性。
- (3) 文氏图法:用平面上封闭曲线包围点集的图形来表示集合。

1.1.2 集合间的关系

1. 包含关系

设 A 和 B 是两个集合,若 A 中的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$,读作“ A 包含于 B ”;或者“ B 包含 A ”, $\subseteq$ 为包含关系。

2. 相等关系

设 A 和 B 是两个集合, 如果 A 和 B 的元素完全相同, 则称 A 和 B 相等, 记作 $A=B$ 。

定理 1.1 设 A 和 B 是两个集合, $A=B$ 的充要条件是: $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

3. 特殊集合

不包含任何元素的集合为空集, 用 $\emptyset$ 表示。

定理 1.2 空集是一切集合的子集。

定理 1.3 空集是唯一的。

在一定范围内, 如果所有集合均为某一集合的子集, 则该集合为全集, 记作 U 。

1.1.3 集合的运算

1. 基本运算

并集: 设 A, B 是两个集合, 由集合 A 和 B 中所有的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ 。

交集: 设 A, B 是两个集合, 由集合 A 和 B 中公共元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$ 。

相对补: 设 A, B 是两个集合, 由在集合 A 中且不在集合 B 中的所有元素组成的集合, 称为集合 B 对 A 的相对补集, 记作 $A - B$ 。

绝对补: 设 U 为全集, 则集合 A 的绝对补集是由不在集合 A 中的所有元素构成的集合, 称为 A 的绝对补集, 记作 A' 。

对称差: 设 A, B 是两个集合, 其对称差记作 $A \oplus B$ 。

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

2. 运算律

双重否定律 $(A')' = A$

交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ $A \oplus B = B \oplus A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B - C) = (A - B) \cap (A - C) \quad (A \cup B) - (A \cup C) \subseteq A \cup (B - C)$$

同一律 $A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$

$$A - \emptyset = A \quad A \oplus \emptyset = A$$

互补律 $A \cup A' = U$

矛盾律 $A \cap A' = \emptyset$

幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

零一律 $A \cup U = U \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$$A - A = \emptyset \quad A \oplus A = \emptyset$$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$

德摩根律 $\emptyset' = U \quad U' = \emptyset'$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

功能完备律 $A - B = A \cap B'$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

$$= (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

3. 有限集合的计数

文氏图法：每一条性质定义为一个集合，用一个圆来表示，如无特殊说明，任何两个圆画成相交的，然后将已知集合的元素填入表示该集合的区域内。通常从 n 个集合的交集填起，根据计算的结果逐步将数字填入其他各空白区域。如果交集的值是未知的，可以设为 x ，根据题目的条件列出方程或方程组，求出所需结果。

排斥原理法：设 U 为全集， $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 U 的有限子集，则有如下 3 个公式。

(1) 两个集合的排斥原理公式：

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

(2) 三个集合的排斥原理公式：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

(3) n 个集合的排斥原理公式：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

1.1.4 幂集和编码

1. 幂集

给定集合 A ，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，称为集合 A 的幂集，记作 $P(A)$ 或 2^A 。

2. 编码

设集合 A 中有 n 个元素，确定下标为 n 位的二进制数，每一位对应集合 A 中的一个元素。如果元素在某个子集中出现，则相应的二进制位为 1，否则为 0。

1.1.5 集合恒等式的证明

1. 基本定义法

利用集合以及集合之间的关系的定义,来证明所要的结论。

2. 公式法

利用已证明过的集合恒等式去证明新的集合恒等式。在用公式法证明集合恒等式的时候,要充分利用集合的运算定律。同时注意以下几个基本原则:

- (1) 将集合运算表达式中其他运算符号转换为 $\cup$ 和 $\cap$;
- (2) 将补运算作用到单一集合上;
- (3) 左边 $\Rightarrow$ 右边,右边 $\Rightarrow$ 左边,左边 $\Rightarrow$ 中间式,右边 $\Rightarrow$ 中间式;
- (4) 根据基本运算符号的定义和运算定律转换。

3. 集合成员表法

通过构造集合成员表,应用二进制下的逻辑运算,比较两个集合成员表,看它们是否相同,可以判定这两个集合是否相等。

1.2 典型例题

1. 在下列描述中,哪些是集合?

- (1) 计算机书籍的全体。
- (2) 平面上的所有的点。
- (3) 所有自然数的全体。
- (4) 所有汽车的全体。
- (5) 一些自行车。

解答与分析: 本题考查对集合基本概念的理解。集合的元素必须是确定的,元素之间是可以区分的,集合之间元素是无序的。在(5)中,一些自行车范围不确定,无法知道是哪些自行车,因此不是集合。(1)~(4)都是集合。

2. 请列出下列集合的元素。

- (1) $A = \{x: x \in N, 4 < x < 12\}$;
- (2) $B = \{x: x \in N, x \text{ 是偶数}, x < 15\}$;
- (3) $C = \{x: x \in N, 6 + x = 4\}$ 。

解答与分析: 利用列举法表示集合。

- (1) A 由 4 和 12 之间的正整数组成,因此, $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;
- (2) B 由小于 15 的正偶数组成,因此, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$;
- (3) 没有正整数满足条件 $6 + x = 4$,因此, C 不包含元素,即 C 为空集。

3. 下面4个集合 A, B, C, D 中, 哪些集合是相等的?

$$A = \{r, s, t\}; B = \{t, s, r\}; C = \{s, r, t\}; D = \{t, r, s\}$$

解答与分析: 根据集合相等关系的定义, 需比较判别集合中的元素是否相同, 与元素的排列顺序无关, 因此, 上述4个集合均相等。

4. 证明集合 $A = \{2, 3, 4, 5\}$ 不是集合 $B = \{x: x \in N, x\}$ 的子集。

证明: 根据子集的定义, 集合 A 中的任意元素都应在集合 B 当中, 因此, 只需证明集合 A 中至少有一个元素不在 B 中, 由于 $5 \in A$, 但是 5 不是偶数, 即 $5 \notin B$, 故集合 A 不是集合 B 的子集。

5. 指出包含下列集合 A, B, C 的最小集合 M 。

$$A = \{\text{dog}, \text{cat}\}, B = \{\text{horse}, \text{cat}, \text{cow}\}, C = \{\text{dog}, \text{cow}\}$$

解答与分析: 最小集合即包含上述三个集合中的所有元素, 则 $M = \{\text{dog}, \text{horse}, \text{cat}, \text{cow}\}$ 。

6. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。求所有可能的集合 N , 使得 $A \subset N$, 且 $N \subset B$ 。

解答与分析: N 必须由 A 的元素 $1, 2, 3$ 以及 B 的至少一个其他元素 4 或 5 组成, 因此可以得到 $N = \{1, 2, 3, 4\}$ 或 $N = \{1, 2, 3, 5\}$ 。

7. 设 A 是一个集合, $B = \{A, \{A\}\}$, 则 $\{A\} \subseteq B$ 和 $\{A\} \in B$ 成立吗?

解答与分析: 由于集合 A 和 $\{A\}$ 是集合 B 的元素, 因此有 $A \in B$ 和 $\{A\} \in B$, 因为 $A \in B$, 可知 $\{A\} \subseteq B$, 所以 $\{A\} \subseteq B$ 和 $\{A\} \in B$ 都是成立的。

8. 下列三个集合之间有什么样的关系?

$$\emptyset, \{0\}, \{\emptyset\}$$

解答与分析: $\emptyset$ 是空集, 不包含任何元素, $\{0\}$ 含一个 0 元素, $\{\emptyset\}$ 含一个元素 $\emptyset$, 因此, $\emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{0\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 且三个集合互不相同。

9. 下列各式中正确的有哪些?

- (1) $\emptyset \in \emptyset$; (2) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; (3) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$;
 (4) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$; (5) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$; (6) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
 (7) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; (8) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; (9) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}\}$;
 (10) $\emptyset \subseteq \emptyset$; (11) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; (12) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$ 。

解答与分析: 本题考查对特殊集合空集 $\emptyset$ 、元素和集合之间的所属关系、集合与集合之间的包含关系的理解。根据定理 1.2, 空集是一切集合的子集。因此, 正确的是 (2), (5), (6), (7), (10), (11), (12)。

10. 结合一个例子定义全集 U , 并叙述该全集为空集的情形。

解答与分析: 本题考查对特殊集合全集的认识, 在集合理论的应用中, 通常所研究的全体集合属于某个固定的大集合, 即全集 U , 例如, U 是某学校所有舞蹈课程的集合。如果某学期内该校没有这样的课程, 即 U 为空集。

11. 下列集合中哪些集合是可比较的?

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 2, 3, 4\} \quad C = \{1, 5\} \quad D = \{3, 4, 5\} \quad E = \{4, 5\}$$

解答与分析: 可比较指的是集合之间具有包含关系。因为 $A \subseteq B$, 所以 A 和 B 是可比较的; 因为 $E \subseteq D$, 因此 D 和 E 是可比较的; 其他任何一对不同的集合都是不可比较的。

12. $U=\{1,2,3,\cdots,8,9\}, A=\{1,2,3,4\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{3,4,5,6\}$, 求下列集合的运算结果。

- (1) $A \cup B$;
- (2) $A \cup C$;
- (3) $(A \cup B) \cup C$;
- (4) $(A \cap B) \cap C$.

解答与分析: 根据集合的基本运算, 可以得到如下结果。

- (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$;
- (2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- (3) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$;
- (4) $(A \cap B) \cap C = \{4\}$.

13. 设 $A=\{0,1,2\}, B=\{2,3\}$, 计算 $A \oplus B$ 。

解答与分析: 根据对称差的定义, 可以得到

$$A \oplus B = \{0, 1\} \cup \{3\} = \{0, 1, 3\}$$

14. 设 Z_+ 为正整数集合, 集合 A, B, C 如下:

$$A = \{a \mid a = x\pi, x \in Z_+\}$$

$$B = \{a \mid a = 2x\pi + \pi/2, x \in Z_+\}$$

$$C = \{a \mid a = x\pi/2 + 2\pi, x \in Z_+\}$$

求下列集合 A, B, C 之间的运算结果。

- (1) $A \cap B \cap C$;
- (2) $A \cup B - C$;
- (3) $A - (B \cup C)$;
- (4) $C - (A \oplus B)$.

解答与分析: 本题考查集合的列举法和描述法, 理解集合的运算性质。为了方便运算, 把题中用描述法表示的集合用列举法表示如下:

$$A = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$$

$$B = \{2\pi + \pi/2, 4\pi + \pi/2, 6\pi + \pi/2, \cdots\}$$

$$C = \{\pi/2 + 2\pi, 3\pi, \pi/2 + 3\pi, \cdots\}$$

由集合的运算性质可知:

- (1) $A \cap B \cap C = \emptyset$
- (2) $A \cup B - C = \{\pi, 2\pi\}$
- (3) $A - (B \cup C) = \{\pi, 2\pi\}$
- (4) $C - (A \oplus B) = C - ((A \cup B) - (A \cap B))$
 $= C - ((A \cup B) - \emptyset)$
 $= \{3\pi + \pi/2, 5\pi + \pi/2, 7\pi + \pi/2, \cdots\}$

15. 使用包含排斥原理求不超过 120 的素数的个数。

解答与分析: 因为 $11^2=121$, 不超过 120 的合数(除了 1 和它自身还能被其他数整除的数)至少有 2, 3, 5 或 7 这几个素因子之一, 首先考虑不能被 2, 3, 5, 7 整除的整数, 设

$$S = \{x \mid x \in Z, 1 \leq x \leq 120\}$$