五年制高等职业教育教材学习指导与训练

数学

（第二册）

《数学》编写组　编

苏州大学出版社

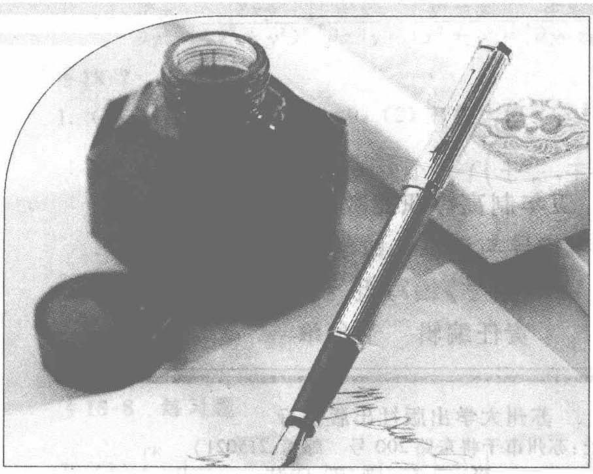
五年制高等职业教育教材学习指导与训练

MATH

数学

（第二册）

《数学》编写组　编



苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 第2册 / 张昉主编;《数学》编写组编. —苏州:苏州大学出版社, 2003.7(2004.8重印)
五年制高等职业教育教材学习指导与训练
ISBN 7-81090-084-6

Ⅰ.数… Ⅱ.①张… ②数… Ⅲ.数学—高等学校:技术学校—教学参考资料 Ⅳ.O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第034480号

五年制高等职业教育教材
学习指导与训练·数学(第二册)
《数学》编写组 编
责任编辑 董张维

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
武进第三印刷厂印装
(地址:武进市村前镇 邮编:213154)

开本787×1092 1/16 印张9.5 字数236千
2003年7月第1版 2004年8月第5次印刷
印数35001~47000册
ISBN 7-81090-084-6/O·6 定价:9.50元

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

编写说明

高等职业教育数学课程设置的目的在于让学生获得有实用价值的数学知识和更广泛意义的数学思想及方法，从而获得一种文化素养.

为了能让学生在教师指导下自主地、积极地进行学习，不只是“学会”，更主要的是“会学”，我们编写了这套与五年制高等职业教育《数学》教材配套的《五年制高等职业教育教材学习指导与训练·数学》.

该书按每章的知识结构、教学要求、学法指导、典型例题分析、同步练习、自测题等六个部分编排.根据五年制高等职业教育数学课程的教学目标及学生的实际，本书的立足点是夯实基础，增强同步性，指导学生有效地独立获取知识，逐步培养学生的自学能力与应用能力，力求做到根据各章内容的不同特点，简明扼要地说明知识要点、思想方法及注意点，精选例题，始终体现基础性.

本书由五年制高等职业教育《数学》教材编写组编写.本册由张昉主编，高安力参编，其中第十二、十三、十四、十五章由张昉编写，第十六、十七、十八章由高安力编写.

本书编写是在五年制高等职业教育《数学》教材总主编谈兴华的指导、关心下完成的，在此表示衷心感谢.限于时间仓促及编者水平，缺点和不完善之处在所难免，敬请同行指正.

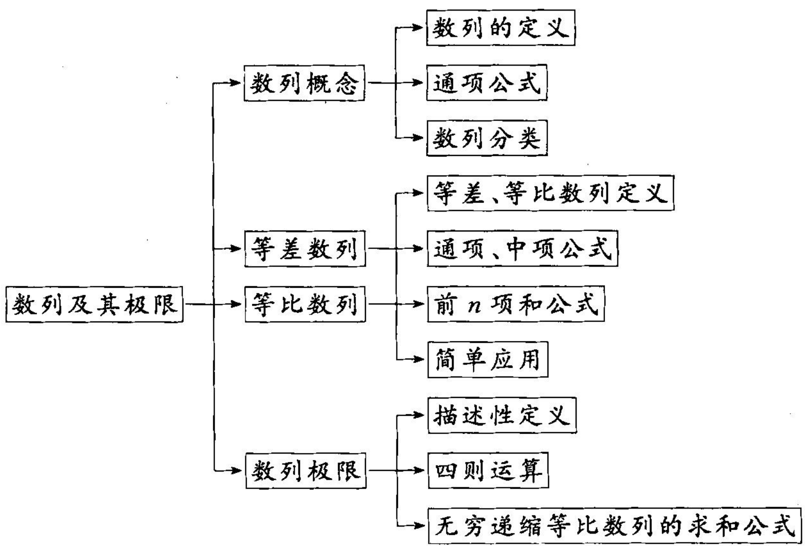
编　者

2003 年 3 月

Contents 目录

第 12 章
数列及其极限

一　知识结构



二　教学要求

1. 了解数列的概念，会写出简单数列的通项公式，了解数列的分类，掌握数列的通项 a_n 与前 n 项的和 S_n 之间的关系.

2. 理解等差数列和等比数列的定义和性质，掌握等差等比数列的通项公式、中项公式和前 n 项求和公式.

3. 了解数列极限的定义，掌握数列极限的四则运算法则和无穷递缩等比数列的求和公式.

4. 培养学生的观察分析能力、综合运用能力和逻辑思维能力.

本章重点：

(1) 数列概念；
(2) 等差数列与等比数列的定义，通项公式与前 n 项和公式；
(3) 数列极限的定义.

三 学法指导

1. 数列的概念是学习本章的基础.在学习了第一节后应进行小结，以便对数列的定义、通项公式和数列的分类有较清楚的理解和掌握.

2. 等差数列和等比数列是两个特殊的数列.教材通过对具体例子的分析和归纳，得出了它们的定义、通项公式和中项公式.学习时要注意以下几点：(1) $d=0$ 的等差数列与 $q=1$ 的等比数列都是常数列；(2) 等差中项与等比中项公式虽然简单，但应用较为广泛；(3) 在等差（或等比）数列中，只要知道首项 a_1 与 d（或 q）就可以由通项公式写出数列的所有项；(4) 解决有关等差或等比数列的问题时，作出合理的假设很重要.

3. 教材用三个具体的有代表性的有极限的数列，帮助同学们对“变化趋势”有较直观的认识.在学习数列极限的定义时，要注意理解“一个”和“确定”的含义；而数列极限的四则运算法则在数列有极限的前提下才成立，否则不成立；最后，对于等比数列：$a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots$，当 $|q|<1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，这是推导出无穷递缩等比数列求和公式的关键.

四 典型例题分析

例 1 求下列数列的一个通项公式：

(1) $3,6,12,24,48,\cdots$；

(2) $\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$；

(3) $\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{5}{8},-\frac{7}{16},\frac{9}{32},\cdots$.

解 (1) 原数列变形为

$$1\times3,2\times3,4\times3,8\times3,\cdots,$$

即

$$3\times2^0,3\times2^1,3\times2^2,3\times2^3,\cdots,$$

即得通项公式为

$$a_n=3\times2^{n-1}.$$

(2) $\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$ 中每一项都是一个分数，其分子 $2,4,6,8,10,\cdots$ 组成偶数列，其通项为 $2n$；其分母 $3,15,35,63,99,\cdots$ 组成数列 $1\times3,3\times5,5\times7,7\times9,9\times11,\cdots$，

它的通项为$(2n-1)(2n+1)$. 所以原数列的通项公式为

$$a_n=\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

(3) 此数列每项的符号为正负相间. 因此，通项中应有因子$(-1)^{n+1}$. 此数列各项的绝对值都是分数，其分子 1,3,5,7,9,…组成奇数列(通项应为 $2n-1$)；其分母 2,4,8,16,32,…组成数列 $2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$(通项为 2^n)，所以原数列的通项公式为

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

例 2　$2\sqrt{5}$是否为数列$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$中的一项？若是，求出它是第几项？

解　把数列$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$化成

$$\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{8},\sqrt{11},\cdots.$$

很明显，被开方数 2,5,8,11,…组成等差数列，且首项为 2，公差为 3. 因此，通项为 $2+(n-1)\cdot 3=3n-1$. 所以$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$的通项公式为

$$a_n=\sqrt{3n-1}.$$

令

$$2\sqrt{5}=\sqrt{3n-1},$$

解之，得

$$n=7.$$

所以　$2\sqrt{5}$是原数列的第 7 项.

例 3　已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=16$，$a_1\cdot a_5=28$，求 a_3.

解法 1　因为 $a_2+a_4=a_1+a_5$，所以得方程组

$$\begin{cases}a_1+a_5=16,\\ a_1\cdot a_5=28.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a_1=2,\\ a_5=14;\end{cases}\quad \begin{cases}a_1=14,\\ a_5=2.\end{cases}$$

由 $a_5=2+(5-1)d=14$，得

$$d=3,$$
$$a_3=2+2\cdot 3=8;$$

由 $a_5=14+(5-1)d=2$，得

$$d=-3,$$
$$a_3=14+2\cdot(-3)=8.$$

解法 2　设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，则

$$a_2+a_4=a_1+d+a_1+3d=2a_1+4d=16,$$
$$a_1\cdot a_5=a_1(a_1+4d)=28,$$

即

$$\begin{cases}a_1+2d=8,\\ a_1{}^2+4a_1d=28.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a_1=2,\\ d=3,\end{cases}\qquad \begin{cases}a_1=14,\\ d=-3.\end{cases}$$

把它们分别代入 $a_3=a_1+2d$ 中，得

$$a_3=8.$$

例 4 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，$a_6=-\dfrac{81}{8}$，求 a_7.

解 $\because \begin{cases}a_3=a_1q^2=3,\\ a_6=a_1q^5=-\dfrac{81}{8},\end{cases}$

$\therefore\ q^3=-\dfrac{27}{8}$,

$\therefore\ q=-\dfrac{3}{2}$.

$\therefore\ a_7=a_6\cdot q=-\dfrac{81}{8}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{243}{16}$.

例 5 有四个数，前三个数依次成等比数列，其积为 27，后三个数依次成等差数列，其和也是 27，求这四个数.

解法 1 设前三个数依次为 $\dfrac{a}{q}$，a，aq，依题意则有

$$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=27,$$

解之，得

$$a=3.$$

再设后三个数为 3，$3q$，$3q+(3q-3)$，依题意则有

$$3+3q+3q+(3q-3)=27,$$

解之，得

$$q=3.$$

因此，所求的四个数为 1，3，9，15.

解法 2 设后三个数依次为 $a-d$，a，$a+d$，依题意得

$$a-d+a+a+d=27,$$

解之，得

$$a=9.$$

再设前三个数为 $\dfrac{(9-d)^2}{9}$，$9-d$，9，依题意有

$$\frac{(9-d)^2}{9}\cdot(9-d)\cdot 9=27.$$

解之，得

$$9-d=3,$$

于是

$$d=6.$$

因此，所求四数为 1，3，9，15.

例 6　用汽车运送 30 根水泥杆，送至从 1000 米处起，每隔 50 米放一根，每次只能运输三根，全部运送完后再返回，问这辆汽车共走了多少公里？

解　根据题意，可知：

第一次运送，汽车走过的路程为 1100×2，

第二次运送，汽车走过的路程为 1250×2，

第三次运送，汽车走过的路程为 1400×2，

…

这是一个等差数列，其公差 $d=150$，若运送十次，第十次汽车走过的路程为 2200×9×150.

所以，汽车共走过的路程为

$$\begin{aligned} s &= \frac{10(2200+2200+9\times150)}{2} \\ &= 35500(\text{米}) \\ &= 35.5(\text{千米}). \end{aligned}$$

五　同步练习

§12-1　练习题

1. 选择题：

(1) 数列 $\frac{1}{1+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}, \cdots$ 的通项公式是(　　).

(A) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$　　(B) $\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$　　(D) 以上答案都不对

(2) 以下命题正确的是(　　).

(A) 有穷数列一定是有界的

(B) 无穷数列一定是无界的

(C) 无穷递增数列一定是有界的

(D) 无穷递减数列一定是有界的

(3) 数列 $\frac{1}{1\times3}, \frac{1}{3\times5}, \frac{1}{5\times7}, \cdots, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \cdots$ 的前 n 项和为(　　).

(A) $\frac{n}{2n+1}$　　(B) $\frac{n}{2n-1}$

(C) $\frac{2n}{n+1}$　　(D) $\frac{2n}{n-1}$

(4) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$，则该数列是(　　).

(A) 递增数列　　(B) 递减数列

(C) 常数列　　(D) 摆动数列

(5) 已知数列$\{a_n\}$的首项是 2，第二项是 1，以后各项由公式 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$ 给出，则该数列前五项的和 S_5 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

2. 填空题：

(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n^2+15$，那么 $a_5=$________；

(2) 写出数列 $1,\frac{7}{4},\frac{12}{8},\frac{17}{16},\cdots$的通项公式 $a_n=$________；

(3) 如果数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=a\cos\frac{n\pi}{2}-b\sin\frac{n\pi}{2}$，$a$、$b$ 是常数，则它的第 3 项、第 4 项分别为________.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2+n+1$，问 273 是这个数列的第几项？

4. 根据条件 $S_n=n^2+2n+3$，写出数列的通项公式.

§12-2　练习题

1. 选择题：

(1) 若 $a,x,b,2x$ 成等差数列，则 $a:b$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$或 1　　(D) $\frac{1}{2}$

(2) 一个首项为 23，公差是整数的等差数列，如果前 6 项均为正数，第 7 项为负数，则它的公差是(　　).

(A) -2　　(B) -3　　(C) -4　　(D) -5

(3) 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_5+a_8=a$，那么 $a_2+a_5+a_8+a_{11}$ 的值等于(　　).

(A) a　　(B) $2a$　　(C) $3a$　　(D) $4a$

(4) 下列各组数中，成等差数列的是(　　).

(A) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$　　(B) lg2，lg4，lg8

(C) $8^2,8^4,8^8$　　(D) $2,-2\sqrt{2},4$

2. 填空题：

(1) 两个数$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$与$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$的等差中项为________；

(2) 等差数列$-5,-9,-13,\cdots$的第________项是-405；

(3) 在等差数列中，第 3 项是 9，第 9 项是 12，则前 12 项的和是________；

(4) 已知$(x+1)+(x+3)+(x+5)+\cdots+(x+15)=96$，那么$x=$________；

(5) 等差数列的第 1 项是 13，若前 3 项的和等于前 11 项的和，则公差$d=$________.

3. 设$\{a_n\}$是等差数列.

(1) 已知$d=-2$，$a_{16}=1$，求a_2，S_{10}；

(2) 已知$a_1=5$，$a_{10}=59$，求d，a_{20}.

4. 有三个数，其比为 3∶6∶10，且各数加 1 的算术平方根成等差数列，求此三个数.

5. 有一群儿童，他们年龄之和为 50 岁，其中最大的年龄为 13 岁，有一个儿童年龄为 10 岁，除去 10 岁的那个儿童，其余儿童年龄恰成等差数列，问共有几个儿童？各多少岁？

§12-3　练习题

1. 选择题：

(1) a,b,c是三个互不相同的数，它们成等差数列，x是a、b的等比中项，y是b、c的等比中项，则x^2,b^2,y^2三数组成的数列(　　).

(A) 是等比数列，但不是等差数列

(B) 是等比数列，又是等差数列

(C) 是等差数列，但不是等比数列

(D) 不是等差数列，也不是等比数列

(2) 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3 \cdot a_5=5$，那么 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot a_7$ 的值等于（　　）.

(A) 10　　(B) 25　　(C) 50　　(D) 75

(3) 如果两个数的等差中项是 10，等比中项是 8，这两个数是下面某一个方程的两个根. 这个方程是（　　）.

(A) $x^2-20x+64=0$　　(B) $x^2+20x+64=0$

(C) $x^2-10x+8=0$　　(D) $x^2+10x+8=0$

(4) 在公比为 q 的等比数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 中，依次相邻两项的积组成的数列 a_1a_2，a_2a_3，a_3a_4，$\cdots$（　　）.

(A) 是公比为 q 的等比数列　　(B) 是公比为 q^2 的等比数列

(C) 是公比为 q^3 的等比数列　　(D) 不是等比数列

2. 填空题：

(1) 已知等比数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$，则 $S_{10}=$________；

(2) 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 a_3,a_7 分别是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个根，则 $a_2 \cdot a_8=$________；

(3) 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=3,q=-\frac{2}{3},a_n=-\frac{32}{81}$，则 $n=$________.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_3=5,a_2+a_4=10$，求 a_8.

4. 设成等比数列的三个数之和为 14，其平方和为 84，求此三个数.

5. 设$\{a_n\}$为等比数列.

(1) 已知 $a_1=7,a_4=-56$，求 a_5 和 S_5；

(2) 已知 $a_1=3$，$a_n=96$，$S_n=189$，求 q 和 n.

6. 某工厂今年生产机器零件 10 万只，如果年产量以 10% 的速度增长，那么，从今年算起约需几年可使产量达到 76 万只(精确到 1 年)？

§12-4　练习题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+5}{1-2n-n^3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-1}{5^n+1}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}+\frac{15}{n^2}+\frac{23}{n^2}+\cdots+\frac{8n-1}{n^2}\right)$.

2. 将下列循环小数化为分数：

(1) $0.\dot{5}$；

(2) $0.2\dot{1}\dot{3}$.

3. 求$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}\cdot\cdots$的值.

六 自测题

1. 选择题：

(1) 数列 1，-3，5，-7，9，-11，…前 100 项之和等于(　　).

(A) -100　　(B) -200　　(C) 200　　(D) 100

(2) 在 8 与 5832 之间插入五个数，使它们成等比数列，则此数列的第 5 项是(　　).

(A) 648　　(B) -832　　(C) -1944　　(D) 1168

(3) 将$\triangle ABC$的AC边 10 等分，在$\triangle ABC$内自AC边上的各分点作BC边的平行线段，设$BC=10$，则所引的平行线段的长度之和等于(　　).

(A) 不确定　　(B) 55　　(C) 35　　(D) 45

(4) 一等差数列前 50 项之和为 200，从第 51 项到第 100 项之和为 2700，则此数列的首项为(　　).

(A) -1221　　(B) -21.5　　(C) -20.5　　(D) 3.5

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差为 2，求：

(1) S_{20}；

(2) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$.