

大 学 数 学 教 程

复变函数 与积分变换

山东大学数学学院

刘建亚 吴 臻 主编

郑修才 包芳勋 张光明 编

 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大 学 数 学 教 程

复变函数 与积分变换



山东大学数学学院

刘建亚 吴臻 主编

包芳勋 张光明 编

Fubian Hanshu yu JifenBianhuan

第二版

 高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书内容包括复变函数与积分变换两部分. 复变函数部分有复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数及其应用、保角映射、解析函数在平面向量场中的应用; 积分变换部分有傅里叶变换和拉普拉斯变换.

本书知识体系相对完整, 结构严谨, 易教易学, 例题丰富. 为适应分层次教学的需要, 引入了带“*”号的内容. 模块化的思想也使本书前后几部分内容既相互联系, 又相互独立, 增加了使用本书时的灵活性. 本书每章最后都配有适量的习题, 还配有解决本章问题的 MATLAB 程序和例题演示. 书末附有习题参考答案及附表, 并附有部分数学家简介.

本书可作为高等学校理工非数学类专业的教材, 也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 复变函数与积分变换/刘建亚, 吴臻主编; 郑修才, 包芳勋, 张光明编. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2011. 7

ISBN 978 - 7 - 04 - 032302 - 3

I. ①大… II. ①刘…②吴…③郑…④包…⑤张… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材②复变函数 - 高等学校 - 教材③积分变换 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13②O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 120619 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	胡颖	封面设计	张志奇	版式设计	马敬茹
插图绘制	杜晓丹	责任校对	金辉	责任印制	张福涛		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landrac.com
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.landrac.com.cn
开 本	787 × 960 1/16	版 次	2005 年 3 月第 1 版
印 张	17.25		2011 年 7 月第 2 版
字 数	320 000	印 次	2011 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	25.10 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32302-00

大学数学教程

编委会

主 编 刘建亚 吴 臻
编 委 (按姓氏笔画排列)
刁在筠 包芳勋 叶 宏 吕 同 许闻天
张天德 张光明 郑修才 金 辉 胡发胜
秦 静 傅国华 蒋晓芸

第二版前言

本套教材是由山东大学数学学院具有丰富教学经验的一线教师编写的，第一版是普通高等教育“十五”国家级规划教材，包括《微积分1》、《微积分2》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数与积分变换》五册。经过多年的教学实践，山东大学数学学院在大学数学课程建设和教学改革方面取得了可喜的成绩。微积分与数学实验、线性代数、复变函数与积分变换分别于2007年、2006年、2010年被评为国家精品课程，由刘建亚教授作为带头人的大学数学系列课程教学团队被评为2007年度国家级教学团队。

为更好地将优秀教学改革成果运用并推广开来，根据当前的教学实际，山东大学数学学院组织中坚力量，对第一版进行了修订。在保持本套教材第一版优点、特色的前提下，新版教材注重与中学教学内容的衔接，增加了与中学数学接轨的部分内容；增选一些国外教材中的案例、例题和习题，力求题型新颖。为更好地将数学建模思想融入教学，培养学生的建模思想和意识，通过增设有关章节介绍与教学内容相关的建模案例，全方位提升学生的综合素质和创新能力。新版教材力求做到符合大学数学课程教学基本要求，知识结构符合认知规律，同时渗透现代数学思想，加强应用能力培养，便于学生学习和教师教学。

本书为《复变函数与积分变换》分册。新版对第一版有些内容的讲述作了改动，增删了部分例题与习题，各章习题中均补充了判断题，益于加强相关概念、理论的理解和掌握。为了增加内容结构的紧凑性，符合学生的学习、思维习惯，我们把第一版第6章中的部分内容进行了合并，将§6.6中关于解析映射的几个一般性定理放在了§6.1中，以便为后续讨论分式线性映射及幂函数、指数函数所构成的映射奠定理论基础。

本书修订工作主要由郑修才完成，数学实验内容由傅国华编写，数学家简介由包芳勋编写。刘建亚教授、吴臻教授按照丛书总体要求对修改框架提出具体建议，仪洪勋教授审阅了全书。在本书修订过程中，我们得到了山东大学教务处、山东大学数学学院领导及同事的大力支持，兄弟院校的同行也对本次修订提出了宝贵建议。在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，新版中难免存在不足，欢迎广大专家、同行与读者批评指正。

编 者

2011年3月

第一版前言

按传统的观点,在大学里除数学类各专业外,数学只是理、工等类学生的基础课,是学习后续课程和解决某些实际问题的工具.随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高,数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域,人们越来越深刻认识到过去看法的不足,越来越深刻认识到数学教育在高等教育中的重要性.数学不仅是基础、是工具,更重要的是探索物质世界运动规律的重要手段,是一种思维模式——数学思维模式,数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体,是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础;同时,数学又是一种文化——数学文化,它显示着千百年来人类文化的缩微景象,也是当代大学生必须具备的文化修养之一.因此大学数学不仅是理、工类学生应该学习,而且也是大学各类专业学生都应该学习的课程,数学教育是大学生素质教育的重要组成部分.当然,不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同.

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要,满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求,山东大学数学与系统科学学院从2000年开始按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求,在学院领导的亲自参与下,组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和论证.针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质,又考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况,制订了适应这种情况的新课程体系.新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构,整个大学数学的课程共分三个平台,不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求,体现数学知识结构和大学生认知结构的统一.鉴于人类认识是从感性到理性,由易到难,由浅入深的,因此第一平台(包括微积分(一)、线性代数和概率统计)是体现高等数学的普及和基础,体现所有各专业应当具有的数学素质教育,主要侧重基本概念和基本方法,加强基本运算,努力渗透基本数学思想;第二平台是对第一平台基本概念加深和知识方法的拓宽,在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性;第三平台(包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等)则是为满足某些对数学知识和方法有特殊要

求的专业而设置. 各平台的教学内容由浅入深, 反映不同专业对数学知识和内容的不同要求; 各平台的内容又采取模块组合的方式, 模块间相对独立, 各专业亦可根据本专业的需要, 选用不同的模块组合, 这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性, 能够满足不同层次、不同专业的专业对数学教学的需求. 另外, 新课程体系还将利用计算机解决数学问题的数学实验融入其中, 做到理论和实践的有机结合.

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定, 并大力支持按新课程体系编写相应的教材. 在我们初稿完成之后, 教务处安排几个专业的学生先行试用, 并在此基础上加以修改完善. 目前, 已完成了三个平台中共计五册的教材编写和修改. 其中, 微积分为两册, 分属两个平台; 线性代数和概率统计各一册, 属于第一平台; 复变函数与积分变换为一册, 属于第三平台. 这套教材的特点除上述平台加模块的结构外, 还有以下特色:

1. 内容少而精, 体现素质教育, 突出数学思想. 我们重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法; 以培养读者的能力和提高素质为着眼点, 有选择地保留了部分定理、性质的证明, 对那些用类似的技巧方法, 或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分省略或简化处理.

2. 扩大了读者的知识面. 我们将各专业不同需求的数学内容融进在一套教材中. 主要的做法是: 用“*”号标明了不同层次对数学的要求, 从不同的学科例题分析中引进基本概念, 阐述基本内容在各主要学科中的应用, 习题中涉及多学科. 这使不同专业的读者可以了解到高等数学中的相关知识在其他专业中的应用, 这在知识经济时代是非常必要的. 另一方面, 可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望. 如在数学要求较低专业学习的读者希望学习更多数学知识(如跨学科考研或工作需要)时, 可以从同一本书中按“*”号的标示中获取. 当然, 教师在授课时可按本专业的要求有选择地使用.

3. 与中学知识相衔接, 易教易学. 对一些较困难, 不易被刚进大学的学生所接受的内容, 如极限的“ $\varepsilon - N$ ”, “ $\varepsilon - \delta$ ”定义, 以及部分不影响整体结构的较困难内容, 如泰勒中值定理等均放入第二平台. 希望这使读者对数学增添兴趣, 提高学习的自信心.

4. 总学时减少, 可在原定学时中学习更多、更新的知识.

5. 各章后的习题配置除基本练习外, 还有部分综合练习题, 以提高读者分析问题、解决问题的能力. 综合练习题多置于每章习题后部且配以“*”号标示.

6. 增添了利用计算机解决数学问题的内容, 在每章后均有解决本章主题问题的 MATLAB 程序和例题演示.

7. 本书附有在数学发展史中一些著名数学家的简介. 从这些数学家辉煌成就背后艰苦奋斗的故事中, 希望可以激发读者学习的热情和兴趣.

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写, 最后聘请有关专家审定. 在编写过程中, 数学学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导, 为此曾多次召开各种类型的会议反复论证, 几易手稿.

大学数学教程的主编是刘建亚. 复变函数与积分变换部分由张光明(第 6, 7, 8, 9 章及附录 I, II, III)、郑修才(第 1, 2, 3, 4, 5 章)编写, 由张光明完成统稿工作; 由仪洪勋、江守礼审阅; 数学实验内容由傅国华编写; 数学家简介由包芳勋编写.

本套教材作为普通高等教育“十五”国家级规划教材正式出版, 是教育改革的产物. 在此, 我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学学院领导对改革和教材出版的鼎力支持. 感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助. 我们特别感谢高等教育出版社, 由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫、非常重要, 也是非常艰巨的工作. 限于编者水平, 本书肯定会有许多不足和缺点, 乃至问题, 恳请读者批评指正.

编 者

2004 年 1 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一部分 复变函数

第 1 章 复数与复变函数	3
§ 1.1 复数及其运算	3
§ 1.2 复平面上的曲线和区域	9
§ 1.3 复变函数	14
§ 1.4 复变函数的极限和连续性	17
§ 1.5 用 MATLAB 运算	19
习题 1	21
第 2 章 解析函数	23
§ 2.1 解析函数的概念	23
§ 2.2 函数解析的充要条件	26
§ 2.3 初等函数	30
§ 2.4 用 MATLAB 运算	36
习题 2	37
第 3 章 复变函数的积分	40
§ 3.1 复变函数积分的概念和性质	40
§ 3.2 柯西积分定理及其应用	44
§ 3.3 柯西积分公式和解析函数的高阶导数	49
§ 3.4 解析函数与调和函数的关系	53
习题 3	57
第 4 章 复级数	61
§ 4.1 复数项级数	61
§ 4.2 幂级数	62
§ 4.3 泰勒级数	68
§ 4.4 洛朗级数	73
习题 4	79
第 5 章 留数及其应用	81
§ 5.1 函数的孤立奇点	81

§ 5.2	留数	85
* § 5.3	函数在无穷远点处的留数	90
§ 5.4	留数在定积分计算中的应用	94
* § 5.5	辐角原理及其应用	101
§ 5.6	用 MATLAB 运算	106
习题 5		107
* 第 6 章	保角映射	110
§ 6.1	保角映射的概念	110
§ 6.2	分式线性映射	116
§ 6.3	唯一确定分式线性映射的条件	121
§ 6.4	两个典型区域的分式线性映射	125
§ 6.5	幂函数与指数函数所构成的映射	128
习题 6		134
* 第 7 章	解析函数在平面向量场中的应用	136
§ 7.1	平面向量场	136
§ 7.2	复位势	138
§ 7.3	复位势的应用	141
习题 7		147

第二部分 积分变换

第 8 章	傅里叶变换	151
§ 8.1	傅里叶积分	151
§ 8.2	傅里叶变换 δ 函数	156
§ 8.3	频谱	165
§ 8.4	傅里叶变换的性质	169
§ 8.5	卷积	176
§ 8.6	用 MATLAB 运算	181
习题 8		181
第 9 章	拉普拉斯变换	185
§ 9.1	拉普拉斯变换的概念	185
§ 9.2	拉普拉斯变换的性质	192
§ 9.3	卷积	201
§ 9.4	拉普拉斯逆变换	203

§ 9.5 拉普拉斯变换的应用	209
§ 9.6 用 MATLAB 运算	216
习题 9	216
附录 I 区域变换表	220
附录 II 傅里叶变换简表	228
附录 III 拉普拉斯变换简表	236
附录 IV 数学家简介	242
习题参考答案	246
参考文献	258

第一部分

复变函数

微积分课程中所研究的一元函数是两个实变量之间的相互依赖关系。随着数学理论的不断发展和解决实际问题的技术进步，又需要研究两个复变量之间的依赖关系——一元复变函数，它是本书第一部分研究的主要对象，简称为复变函数。

与一元实函数类似，复变函数中也主要介绍函数的概念、极限、连续、微分、积分和幂级数等内容。其中许多概念和公式是实函数在复数域内的推广与发展。不过，随着函数定义域和值域范围的扩大，必然会引出许多新的概念与公式，实函数的个别性质也不能推广到复数域中去。因此在学习中要善于对照和比较，重点掌握它们的区别与联系。

复变函数的理论与方法在自然科学及工程技术中都有广泛的应用。它是解决诸如流体力学、空气动力学、电磁学、热学及弹性理论中平面问题的有力工具，同时也是研究微分方程、数学物理方程、积分变换等数学分支的必要工具，更是学习自动控制、电子工程、信息工程与机电工程等专业课的理论基础。

第1章 复数与复变函数

本章将在复习复数的基础上，着重介绍复数域上的函数——复变函数及其极限和连续性。

§ 1.1 复数及其运算

1. 复数的概念

在中学代数中已经知道，一元二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内无解。为求解此类方程，引入了新的数 i ，规定 $i^2 = -1$ ，且称 i 为虚数单位。从而方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根记为 $x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$ 。

事实上，任何一个复数 z 均可利用虚数单位 i 来表示。即

设 x, y 为任意实数，则称 $z = x + iy$ 为复数，其中 x, y 分别称为复数 z 的实部(real part)和虚部(imaginary part)，分别记作

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z). \quad (1.1.1)$$

当 $x = 0, y \neq 0$ 时，则 $z = iy$ 称为纯虚数；当 $y = 0$ 时，则 $z = x$ 为实数，因此复数是实数概念的推广。

若记 $\bar{z} = x - iy$ ，则称它为复数 $z = x + iy$ 的共轭复数。例如，复数 $z = 3 + 2i$ 的共轭复数为 $\bar{z} = 3 - 2i$ ，且有 $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) = 3$ ， $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z) = -2$ 。

两个复数相等，必须且只需它们的实部和虚部分别相等。如设 $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ ，当 $z_1 = z_2$ 时，则有 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$ ，反之也成立。当一个复数为 0 时，当且仅当它的实部和虚部同时为 0。

注意 两个不全为实数的复数不能比较大小。

2. 复数的表示法

由于复数 $z = x + iy$ 由一对有序实数 (x, y) 所唯一确定，它与 xOy 平面上坐标为 (x, y) 的点是一一对应的，也与从原点指向点 (x, y) 的平面向量是一一对应的，因此在该平面上可用上述点和向量来表示复数 $z = x + iy$ (图 1.1.1)，所以常把“点 z ”或“向量 z ”作为“复数 z ”的同义词。此时，称表示复数 $z = x + iy$ 的 xOy 平面为复平面或 z 平面，其中 x 轴上的点表示

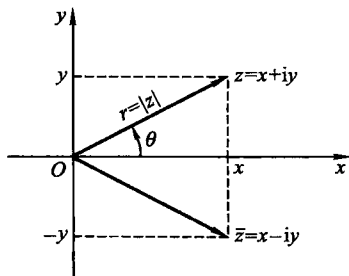


图 1.1.1

的是实数, 称 x 轴为实轴; y 轴上的点(除原点外)表示的是纯虚数, 称 y 轴为虚轴. 当 $y \neq 0$ 时, 点 z 和 \bar{z} 关于实轴对称.

在复平面中, 称向量 z 的长度为复数 z 的模或绝对值, 记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1.2)$$

当 $z \neq 0$ 时, 我们把向量 z 与 x 轴正向的交角 θ 称为复数 z 的辐角(argument), 记作 $\text{Arg}(z) = \theta$, 于是有

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.1.3)$$

注意 $z = 0$ 的辐角不确定, $\text{Arg}(0)$ 无意义. 当 $z \neq 0$ 时, 其辐角 $\text{Arg}(z)$ 有无穷多个, 它们彼此相差 2π 的整数倍, 可是满足条件 $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ 的辐角值却只有一个, 我们称该值为其辐角的主值, 记作 $\arg(z)$. 于是有

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi, \quad (1.1.4)$$

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.1.5)$$

且当 $z = x + iy \neq 0$ 时, 有

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, y \geq 0 \text{ 时,} \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, y < 0 \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y > 0 \text{ 时,} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

一对共轭复数 z 和 \bar{z} 在复平面的位置是关于实轴对称的(图 1.1.1), 因而 $|z| = |\bar{z}|$. 如果 z 不在原点和负实轴上, 还有 $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$.

复数 $z = x + iy$ 通常称作复数的代数表达式. 由式(1.1.3)和欧拉(Euler)公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 可分别写出其三角式和指数式, 即

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z = r e^{i\theta}. \quad (1.1.7)$$

复数的多种表示法可以相互转换, 以适应讨论不同问题的需要.

例 1.1.1 将 $z = -\sqrt{3} - i$ 化为三角式和指数式.

解 显然 $r = |z| = 2$ 且 $\arg(z) = \arctan \frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

由式(1.1.7)得 z 的三角式为