高等学校试用教材

力学教程

中山大学数学力学系力学教研室编

人民教育出版社

高等学校试用教材

力学教程

中山大学数学力学系力学教研室编

人民教育出版社

内容提要

本书是根据1977年10月理科数学专业教材会议通过的数学专业《力学》教材编写大纲编写的．主要讲述动力学，也简单介绍了连续介质力学和狭义相对论，并配有相当数量的例题与习题，可作综合大学及师范大学数学专业试用教材．

高等学校试用教材

力学教程

中山大学数学力学系力学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

787×1092 1/32　印张 14　字数 330,000

1978年11月第1版　1979年6月第1次印刷

印数 00,001—75,000

书号 13012·0259　定价 1.00 元

编 者 的 话

本书是根据一九七七年十月上海理科数学专业教材大纲会议所通过的《力学》大纲编写的，重点是讲授动力学，包括连续介质力学简介，可作为综合性大学和师范大学数学专业力学课程的教学用书.

在为实现我国新时期总任务的斗争中，高等学校面临着艰巨的任务.教材建设必须反映为实现四个现代化而提出的要求.编写本教材时，我们考虑到近十年来国内外应用数学和力学发展的动向，在叙述上力图采用比较严格的数学方法，并反映近代物理的一些新观点. 在对力学的基本概念、基本原理和基本方程的阐述上，力求详尽和精确. 并注意到数学专业的特点，运用矢量、矩阵、张量等数学工具，以使叙述简明，同时又可使学生能应用已学过的数学知识，增强数学与力学课程之间的联系. 本书还简要地介绍了狭义相对论和连续介质力学的部分内容，这将有助于数学专业的学生了解近代物理和工程技术同数学的关系，同时为进一步学习和解决有关实际问题打下基础. 此外，为了帮助初学者掌握基本内容与方法，书中配有较多的例题和习题，给出了各种类型问题的一些常用解法，相信这对于教学也将是有益的.

本书实际上包括了理论力学的主要内容和连续介质力学简介，总的份量超出了原定的七十二学时. 根据《力学》大纲的建议，使用本书作教材时可考虑选择下列三种讲授方案中的一种:(1)只讲授前十一章的内容;(2)讲授前九章不带星号的内容再加上第十二章;(3)讲授前九章不带星号的内容再加上第十三章. 请采用本教材的学校和教师按照各校的不同需要和具体情况进行取舍.

本书的出版是教研室集体努力的成果. 初稿的第一章至第九章以及第十一章是谭忠棠同志编写的，第七章和第九章的部分以及前九章章末的习题和例题是吴福光同志编写的，第十章是蔡承武同志编写的，第十二章是陈树坚同志编写的，第十三章是章克本同志编写的. 参加编写工作的还有符明南、潘碧兰、黄念诚等同志. 最后由谭忠棠、吴福光、陈树坚同志负责全书的修改定稿工作.

本书在审稿时，得到兄弟院校的大力协助. 吉林大学孙铮同志、北京大学周起钊同志、复旦大学陈守吉同志、兰州大学林圣芬同志认真审阅了全稿，提出了许多宝贵的修改意见. 周起钊同志还热情地参加了部分修改工作. 在此我们谨向他们表示衷心的感谢.

由于本书编写时间匆促，在内容衔接和符号上难免有不协调的地方. 另外，全书原稿的插图设计尚不够美观醒目. 最后，由于本书尚未经过教学实践的检验，加上编者水平所限，书中错漏一定还很多，恳请读者批评指正.

编　者

一九七八年六月

于广州

目　录

绪 论

物体在空间中的位置变动称为机械运动，这是物质运动最简单的和最基本的形式．力学是研究物体的机械运动与物体间的相互作用的关系的学科．讲述力学的基本原理以及质点、质点系统和刚体的力学问题的学科一般叫做理论力学；讲述变形固体的变形与内力的关系的学科叫做固体力学；讲述流体的流动与压力的关系的学科叫做流体力学．后面两门学科有时也合并称做连续介质力学．此外还有天体力学、空气动力学、水动力学等较专门的分支． 力学是物理学的一块重要基石，同时也是许多工程技术科学的基础，在自然科学中占有一定的重要地位．

力学，因为最终追溯到物体的空间位置变动和相互作用的关系，它可以从少数基本原理或定律演绎出来(当然，这些基本定律的建立要依赖于科学实验，而且要由它们所推导出来的结论是否合乎实际进行检验)，所以它能较大限度地应用数学，事实上也成功地应用了数学．历史的发展证明，力学和数学是最紧密相连而且相互促进的两门兄弟学科．力学和微积分、微分方程的关系是众所周知的．力学的发展往往直接推动了数学的发展，反过来，新的数学理论常能在力学中找到它的应用．例如，本来从几何学的内在规律发展起来的黎曼几何和闵可夫斯基四维空间，恰好替爱因斯坦的相对论准备好了数学基础而使力学获得了一个大的突破．又如，从结构力学发展出来的有限单元法，一经和高速电子计算机结合起来就为计算数学创造了一个新的方法，为数学的应用和基础理论研究提供了一个有力的工具．

力学是自然科学中发展最早的学科之一，因为即使在人类原

始的劳动中，都自觉或不自觉地应用着力学定律．从历史来看，力学的发展大致分三个阶段．在十七世纪以前，力学的个别定律已经发现，并已应用于实际．例如中国在战国时代的《墨经》在力学方面就记载有：力的定义、杠杆平衡、二力平衡、绳索平衡、起重法、运动的定义等内容．中国的古代建筑和机械结构也反映了对力学个别规律的应用．但对动力学则还未找到正确的原理．阿里士多德认为凡是运动的物体都要有力去维持．这种观点曾统治了人们的思想达二千年之久．企图建立力和物体运动速度的关系的各种各样的学说都没有成功．这是第一阶段．到了十七世纪，由于资本主义的兴起，机器制造业和航海事业得到大发展．高速机器的出现使原来一套静力计算的方法不能满足需要；航海要凭借天文的图象导航，要求对天体的运动有更精密的计算和预告天体的运动．这些都促使符合实际且便于应用的动力学理论的建立．1687年牛顿的《自然哲学的数学原理》一书出版(在英国，以前习惯地将物理学称作“自然哲学”)，标志着力学的发展进入了第二阶段．自此以后，力学有了一个普遍的理论体系，并且成为物理学的基础．此后两百年间，尽管有人看出牛顿的原理存在着理论上的缺陷，但还没有发现违反牛顿定律的新事实．现在我们习惯地称呼建立在牛顿定律之上的力学为经典力学，建立在牛顿定律之上的物理学为经典物理学．这是力学发展的第二阶段．如上所说，在本世纪以前的物理，是以牛顿的理论为基础的，物理学中的各种新发现，都力图统一在牛顿的原理之下．但电磁波的发现，使得牛顿力学的普遍性受到了怀疑．麦克斯韦的电磁波动方程为多方面的实验所证实，但是却不能用牛顿的理论来解释．新的力学理论的出现到了瓜熟蒂落的地步了．1905年爱因斯坦创立的相对论力学标志着力学的新纪元．与此同时，物理学也抛弃了将力学作为它的唯一基石的经典状态，而进入了近代物理的时代．

须要指出的是，相对论力学的出现，并不是简单地宣告了经典力学的失效，相反地，它指出了经典力学的适用范围：在物体的运动范围不太大也不太小，而且运动速度远低于光速时(例如对大多数的工程问题)，经典力学是符合实际的，仍然有着广泛的应用．除此之外，新的力学不是凭空产生的，它是经典力学的继承和发展．经典力学中的一些概念(如质量、能量、守恒定律等)在新的力学中经过发展之后继续使用，所以，经典力学又是学习相对论力学的必要的基础知识．

第一章 动力学概论

动力学的任务是研究物体在力的作用下引起的机械运动状态的变化. 本章概述了作为动力学基础的牛顿三定律，并对牛顿三定律中涉及的某些物理概念(如质量和力、时间和空间等)作了进一步的阐明. 在讲述了质点动力学微分方程之后，作为例子我们计算了若干具体问题，特别是工程实际当中应用较广泛的振动问题. 考虑到教学上的衔接，我们专门在第一节中推导了质点运动学的一些基本公式.

§1.1 质点的速度和加速度

在力学中我们把可以忽略其大小和内部结构，但具有一定质量的物体称为**质点**，由相互距离保持不变的许多质点所组成的连续体称为**刚体**. 质点和刚体都是由实在物体抽象出来的力学简化模型. 当物体运动所涉及的空间尺度比它自身的尺度大得多，而且可以忽略物体自身的变形和转动时，在大多数问题中，我们可以把它简化为质点来研究；此外，当物体内部各点的运动情况都相同时也可以将它归结为一个质点的运动问题. 变形很小的固体而且在所研究的问题中又可忽略其变形时，就可以简化成刚体. 一个实在物体是否可简化成质点或刚体来计算，应视所研究的问题的性质而定.

本节的目的是要导出质点运动的速度和加速度在几种常用坐标系中的表达式.

质点和刚体的运动只有相对于某一事先指定的物体（三维刚体)而言才具有确定的意义，这个事先指定的物体称为**参考物体**.

由参考物体刚性延伸得到的三维空间称为**参考空间**. 但是一个参考空间也可以用某个笛卡儿坐标系来确定，这个坐标系就称为**参考坐标系**. 以后我们凡是说“相对于某个坐标系的运动”意思总是指“相对于某个坐标系所确定的参考空间的运动”.

在参考空间中选一个固定点O，则质点M在此空间中的位置由连接点O和点M的矢量$\boldsymbol{r}$表示(图 1.1)，$\boldsymbol{r}$称为质点M的**矢径**. 以O为原点，建立一个与参考空间固连的笛卡儿坐标系$Oxyz$，并记沿坐标轴的单位矢量为$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$，则$\boldsymbol{r}$可表为

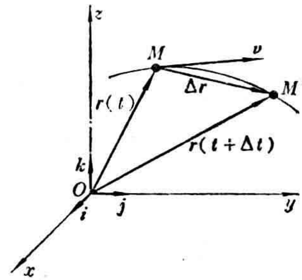

图 1.1

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1.1}$$

其中x, y, z就是质点M的笛卡儿坐标. 当质点相对于参考空间运动时，它们是时间t的函数，即有

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t); \tag{1.2}$$

但是单位矢量$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$是方向和大小均不变的常矢量(对其它坐标系来说，不一定有此性质，因此有时称原点和坐标轴固定在参考空间上的笛卡儿坐标系为**基本坐标系**). 于是原点的矢径$\boldsymbol{r}$可表为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1.3}$$

当时间t连续变化时，矢径端点M画出的空间曲线就是质点的运动轨迹. 如将时间t看成参数，则式(1.2)本身就表示一条空间曲线的方程.

两个相邻时刻t和$t+\Delta t$所对应的矢径之差

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

表示质点在此时间间隔的位移，比值$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$表示它的平均速度矢量，记为$\boldsymbol{v}^{*}$，即

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

我们把 $\Delta t \to 0$ 时上式右端的极限定义为质点在时刻 t 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$, 即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{1.5}$$

从它的几何意义可知，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿着轨道在该点的切线方向而指向路程增加的一方，而且有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{ds}{dt}, \tag{1.6}$$

其中 s 是从轨道上某点 M_0(对应于某个时刻 $t = t_0$)算起的轨道的弧长.

矢径 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数，或速度矢量 $\boldsymbol{v}(t)$ 对时间 t 的一阶导数，定义为质点的加速度矢量，记为 $\boldsymbol{a}$, 即

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.7}$$

为了求得速度和加速度矢量的直角坐标分量，我们直接将式(1.1)对时间求导数如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}; \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

如果将 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 写成分量的表达式

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.11}$$

则有

$$v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt},\ v_z=\frac{dz}{dt}; \tag{1.12}$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\ a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\ a_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.13}$$

它们的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}; \tag{1.14}$$

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \tag{1.15}$$

它们的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\ \cos\gamma=\frac{v_z}{v}, \tag{1.14$'$}$$

$$\cos\alpha'=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta'=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma'=\frac{a_z}{a}, \tag{1.15$'$}$$

其中 α,β,γ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 与坐标单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角；α',β',γ' 是加速度 $\boldsymbol{a}$ 与坐标单位矢量的夹角.

在导出式(1.8)和(1.9)时，我们利用了单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是常矢量的性质.

另外，我们在解析几何中知道，一个点在指定空间中的位置，可以用笛卡儿坐标来确定，也可以用其它的曲线坐标来确定.

质点作曲线运动时，有时采用曲线坐标表示可以简单些．下面我们导出平面极坐标中和自然坐标系中的速度、加速度公式.

考察质点平面运动的情形．我们在质点运动的平面上选定一个极坐标系，质点的位置由极半径 r 和极角 θ 决定． r，θ 和笛卡儿坐标的变换是

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta; \tag{1.16}$$

反变换是

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{1.17}$$

坐标曲线的单位矢量为$\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{p}^0$，其中$\boldsymbol{r}^0$沿着质点M的矢径的正向，$\boldsymbol{p}^0$则垂直于矢径而指向θ增加的一方(图 1.2).

我们现在求质点的速度和加速度对$\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{p}^0$的分解式. 为此，我们先求单位矢量$\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{p}^0$对时间t的导数.

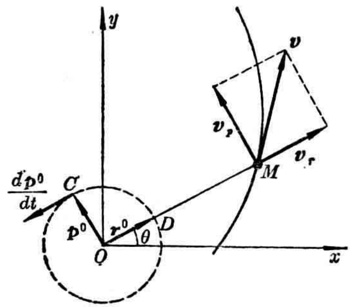

图 1.2

从运动学的观点看，$\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt}$就是以矢量$\boldsymbol{p}^0$为矢径的末端点$C$的"速度"①. 又因$\boldsymbol{p}^0$的长度为1，所以$C$点的轨道是一个单位圆. 根据我们所熟知的圆周运动的速度公式，C点的速度矢量垂直于OC而指向θ增加的一方，亦即指向$(-\boldsymbol{r}^0)$的方向，其大小等于$\frac{d\theta}{dt}$，因此$\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt}$可表示为

$$\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{r}^0=-\dot{\theta}\boldsymbol{r}^0. \tag{1.18}$$

类似地，将$\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}$视作矢量$\boldsymbol{r}^0$末端点$D$的速度，可得

$$\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{p}^0=\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0. \tag{1.19}$$

在式(1.18)、(1.19)中我们采用了力学上习惯的符号，以字母上加一圆点表示该量对时间t的导数. 因此$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$，就是矢径的角

① 实际质点的矢径是有量纲的矢量，但单位矢量$\boldsymbol{p}^0$是没有量纲的，故只能将$\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt}$"看成"是速度.

速度.

现在考察质点M的矢径 $\boldsymbol{r}$，它可以表示为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}^0.$$

将上式对时间 t 求导数，并利用式(1.19)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\boldsymbol{r}^0)\\&=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0+r\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}\\&=\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0.\end{aligned}\tag{1.20}$$

所以，速度 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{r}^0$ 和 $\boldsymbol{p}^0$ 方向之分量 v_r, v_p为

$$\left.\begin{aligned}v_r&=\dot{r},\\v_p&=r\dot{\theta},\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

其中 v_r 称为速度的**径向分量**，v_p 称为速度的**横向分量**.

将式(1.20)继续对 t 求一次导数，并利用式(1.18)和(1.19)，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0)\\&=\ddot{r}\boldsymbol{r}^0+\dot{r}\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0+r\ddot{\theta}\boldsymbol{p}^0+r\dot{\theta}\frac{d\boldsymbol{p}^0}{dt}\\&=\ddot{r}\boldsymbol{r}^0+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0+\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{p}^0+r\ddot{\theta}\boldsymbol{p}^0-r\dot{\theta}^2\boldsymbol{r}^0\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}^0+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\boldsymbol{p}^0.\end{aligned}\tag{1.22}$$

所以，加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{r}^0$ 及 $\boldsymbol{p}^0$ 方向上之分量 a_r, a_p 为

$$\left.\begin{aligned}a_r&=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\\a_p&=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta},\end{aligned}\right\}\tag{1.23}$$

其中 a_r, a_p 分别称为加速度的径向分量和横向分量. 特别地，当质点M作圆周运动时，$r=$常量，此时横向分量就是切向分量，径向分量就是法向分量(或离心分量)，这是我们熟知的结果.

上述讨论的平面极坐标是常用的曲线坐标之一，其它的曲线