全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

高等数学（下册）

合肥学院
陈秀 张霞 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

（下册）

合肥学院
陈　秀　张　霞　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”、安徽省教育厅省级重点教学研究项目、省级精品课程高等数学的研究成果。

本书分上、下两册出版。下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数；同时介绍了空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数四方面知识的数学实验；每章末附有本章学习基本要求，并配有基础知识、技能拓展、探究应用三个层次的习题，以适应不同层次学生的需要；书后附有阅读材料。

本书通篇贯穿案例教学思想，注重培养学生运用数学知识和方法解决问题的能力；结合多年培养应用型本科人才的教学实践经验，从体系、内容和方法上，作了有益的改革。本书可作为应用型本科院校非数学类专业教材，也可作为高等数学课程学习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/陈秀，张霞主编．—北京：高等教育出版社，2011．2

ISBN 978－7－04－031366－6

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①陈…②张…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 257957 号

策划编辑　王　强　　责任编辑　边晓娜　　封面设计　于文燕
责任绘图　宗小梅　　版式设计　范晓红　　责任校对　俞声佳
责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	肥城新华印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2011 年 2 月第 1 版
印　　张	17.5	印　　次	2011 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	定　　价	24.10 元

物料号　31366－00

目　　录

第五章　向量代数与空间解析几何

17 世纪前半叶产生了一门全新的几何学——解析几何. 法国数学家笛卡儿(Descartes Rene,1596—1650)是解析几何的主要创立者. 空间解析几何就是用代数的方法研究空间图形的性质. 向量是一种重要的数学工具,是近代数学的基本概念之一. 在中学阶段,我们已经学习过如何利用向量来解决一些简单的几何问题,本章在中学阶段学习的基础上,以向量为工具研究空间曲面和空间曲线,介绍空间解析几何的基本内容,是学习多元函数微分学和积分学的基础.

第一节　向量代数的基本知识

在中学阶段,我们已经系统地学习过空间向量的定义及其运算,包括空间向量运算的几何意义(如平行四边形法则),空间向量运算的坐标表示(加法、减法、数乘、数量积)等相关知识,下面我们进一步学习向量的方向余弦、向量积、混合积等概念.

1.1　向量的方向余弦

设 $\boldsymbol{a}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量,即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z),$$

其中 $a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$,由两点间距离公式得

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

从而有 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,$\boldsymbol{a}$ 的方向可以用 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α,β,γ ($\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$) 来确定,$\alpha,\beta,\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦,如图 1－1 所示.

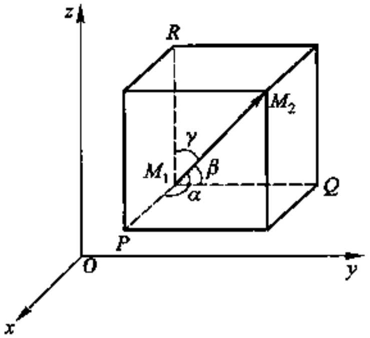


图 1－1

由于 $a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$,

因此

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

所以 $$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z),$$

即$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 1 设 M_1 为点$(2,0,-1)$，M_2 为点$(1,\sqrt{2},0)$，求向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

解 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\sqrt{2}-0,0-(-1))=(-1,\sqrt{2},1)$，

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

所以 $$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \gamma=\frac{\pi}{3},$$

$$\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

因此与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\boldsymbol{a}^0$ 和 $-\boldsymbol{a}^0=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

1.2 向量的向量积

实例一【力对支点的力矩】 设定点 O 为杠杆的支点，力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上点 P 处，$\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$的夹角为 θ(如图 1-2)，由力学知识得，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩为一向量 $\boldsymbol{M}$，其模为$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$，力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$所确定的平面，并且$\overrightarrow{OP}$、$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的方向符合右手法则(如图 1-3). 因此 $\boldsymbol{M}$ 可由 $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$唯一确定.

以此为背景，抽象出两个向量的向量积概念.

定义 1.1 给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足三个条件：

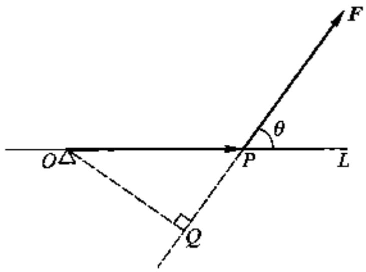


图 1－2

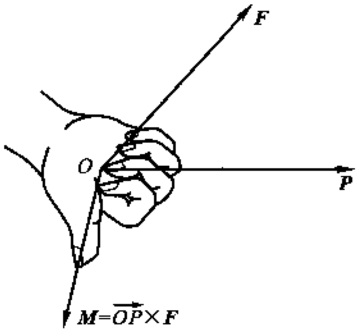


图 1－3

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 $\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$(垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面);

(3) $\boldsymbol{c}$ 的方向由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 按右手法则确定(如图 1－4).

则称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称叉积或外积),记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

由此定义,力矩 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

从几何上看,向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

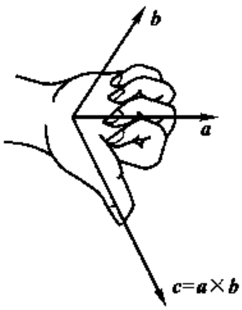


图 1－4

向量的向量积具有以下性质:

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,特别地 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) 反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(3) 分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

(4) 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为实数).

以上性质证明略.

1.3　向量积的坐标表示

由向量积的定义及性质可知:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

利用二阶和三阶行列式的记号,有

$$a\times b=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}k=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

这就是向量积的坐标形式,也可以写为

$$(a_x,a_y,a_z)\times(b_x,b_y,b_z)=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right).$$

例 2 设 $a=(3,-2,4)$,$b=(1,-1,2)$,试求与 a 和 b 都垂直的单位向量.

解 设 $c=a\times b$,则 c 与 a 和 b 都垂直,且

$$c=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2j-k,$$

由于 $|c|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

所以所求的单位向量为 $\gamma=\pm c^0=\pm\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}j-\frac{1}{\sqrt{5}}k\right)$.

例 3 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 根据向量模的几何意义可得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-i-3j+5k|=\frac{1}{2}\sqrt{35}.$$

1.4 向量的混合积

定义 1.2 设有向量 a,b,c,称 $(a\times b)\cdot c$ 为 a,b,c 的混合积,记为 $[abc]$,即

$$[abc]=(a\times b)\cdot c.$$

设 $a=(a_x,a_y,a_z)$,$b=(b_x,b_y,b_z)$,$c=(c_x,c_y,c_z)$,则

$$a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right),$$

因此

$$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

注 (1) 向量的混合积 $[abc]$ 是一个数;

(2) $[abc]$ 可顺序轮换,即 $[abc]=[bca]=[cab]$;

(3) 变序则变号,即 $[abc]=-[bac]$;$[abc]=-[cba]$;$[abc]=-[acb]$;

(4) 向量混合积的几何意义：$[\boldsymbol{abc}]$的绝对值表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 这是因为：以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱作平行六面体，如图 1-5 所示，则其底面积 $A=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，高 $h=|\boldsymbol{c}||\cos\theta|$，从而平行六面体的体积为

$$V=A\cdot h=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}||\cos\theta|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|[\boldsymbol{abc}]|.$$

由混合积的几何意义知，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在同一个平面时，平行六面体的体积为零，因而$[\boldsymbol{abc}]=0$，反之，若$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，则或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有零向量，或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有平行向量，或者$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所述三种情形，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都在同一个平面上，由此可得到三个向量共面的判别方法.

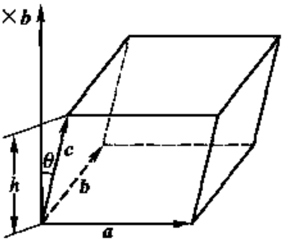


图 1-5

定理 1.1　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{abc}]=0$.

例 4　求以 $A(1,1,1)$，$B(3,4,4)$，$C(3,5,5)$，$D(2,4,7)$为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积 V.

解　以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为邻边的平行六面体体积是所求四面体体积的 6 倍，从而

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]|,$$

又$\overrightarrow{AB}=(2,3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4,4)$，$\overrightarrow{AD}=(1,3,6)$，所以

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{matrix}\right\|=1.$$

例 5　证明四点 $A(1,1,1)$，$B(4,5,6)$，$C(2,3,3)$，$D(10,15,17)$共面.

证　因为$\overrightarrow{AB}=(3,4,5)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{AD}=(9,14,16)$，

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=0,$$

故 A,B,C,D 四点共面.

以上介绍了关于向量代数的基础知识，下面把向量代数的基础知识要点列于表 1-1 中.

表 1-1

概念	向量是既有大小又有方向的量
表示	1. $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 2. $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 3. $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

续表

<table>
<tr><td>概念</td><td colspan="3">向量是既有大小又有方向的量</td></tr>
<tr><td rowspan="5">运算</td><td>加减</td><td colspan="2">$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3)$</td></tr>
<tr><td>数乘</td><td colspan="2">$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$</td></tr>
<tr><td>数量积</td><td>$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$</td><td>$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$</td></tr>
<tr><td>向量积</td><td>$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$</td><td>$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积</td></tr>
<tr><td>混合积</td><td>$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$</td><td>$[\boldsymbol{abc}]$是一个实数
$|[\boldsymbol{abc}]|=$以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积</td></tr>
<tr><td>非零向量平行的条件</td><td colspan="3">1. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；
2. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\neq0$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；
3. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$</td></tr>
<tr><td>非零向量垂直的条件</td><td colspan="3">1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
2. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$</td></tr>
<tr><td>非零向量的夹角</td><td colspan="3">$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$</td></tr>
</table>

习题 5.1

A 组

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

2. 已知 $A(1,0,2)$，$B(3,2,2)$，$C(1,4,-1)$求：

(1) 同时与$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量；

(2) $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 点 B 到边 AC 的距离.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{c}=(2,-10,-6)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，并判定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的位置关系.

4. 分别判断下列两组向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面：

(1) $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,5)$，$\boldsymbol{c}=(1,-1,4)$；

(2) $\boldsymbol{a}=(-4,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,6,-3)$，$\boldsymbol{c}=(1,-4,1)$.

5. 计算顶点为 $A(2,-1,1)$，$B(5,5,4)$，$C(3,2,-1)$，$D(4,1,3)$的四面体的体积.

B 组

1. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=2$，求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积的最大值.
2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，证明：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

第二节　空间曲面及其方程

2.1　曲面方程的概念

在日常生活中，我们常常会看到各种曲面，例如，探照灯和汽车前灯的反光镜面、火力发电厂的冷却塔的外形等. 与平面解析几何中把平面曲线作为动点的轨迹一样，在空间解析几何中，空间曲面可以看成是空间动点 $M(x,y,z)$ 按一定的规律运动时的轨迹，因此动点 M 的坐标 x,y,z 必然满足一定的关系，而此关系可用 x,y,z 的一个三元方程来刻画.

定义 2.1　设 Σ 为空间一曲面，如果曲面 Σ 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 之间具有下列对应关系：(1)曲面 Σ 上的任一点 $M(x,y,z)$ 的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，即 x,y,z 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的一个解；(2)对于方程 $F(x,y,z)=0$ 的任意一个解 x,y,z，点 $M(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上，那么就称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ 的方程，曲面 Σ 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

建立了空间曲面与其方程的联系之后，就可以利用方程的解析性质来研究空间曲面的几何特征了. 空间曲面的研究有下面两个基本问题：

(1) 已知曲面上点的几何特征，求曲面的方程；

(2) 已知曲面的方程，研究曲面的几何形状.

例 1　求球心在定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 为球面上的任意一点，则有 $|MM_0|=R$，即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

两边平方得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{2.1}$$

显然球面上的点的坐标均满足(2.1)式；反之，以满足(2.1)式的任意一个解 x,y,z 为坐标的点 (x,y,z) 也在球面上，因此(2.1)式即为所求的球面方程.

特别地，球心在原点 $O(0,0,0)$，半径为 R 的球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

例 2　设有点 $A(2,1,-1)$ 和 $B(1,1,0)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 为垂直平分面上的任一点，根据题意，有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2},$$

化简得

$$x-z-2=0,$$

即为所求的平面方程.

例 1 与例 2 都是由已知曲面建立其方程，下面举一个由已知方程研究它所表示曲面的例子.

例 3 方程 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$ 表示怎样的曲面.

解 通过配方，原方程可以化为

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4^2,$$

由例 1 知，原方程表示球心在 $M_0(-1,2,-3)$，半径为 4 的球面.

2.2 旋转曲面

定义 2.2 一条平面曲线绕此平面上的一条定直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面，这条定直线称为旋转曲面的轴，这条平面曲线称为母线.

旋转曲面的图形非常优美，而且在日常生活中随处可见，如图 2-1 所示.

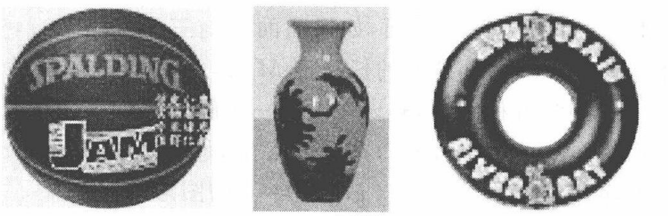


图 2-1

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为 $f(y,z)=0$，把该曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，如图 2-2. 下面求它的方程.

设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任一点，它是曲线 C 上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转而得到的，因此有 $f(y_1,z_1)=0$，并且 $z_1=z$，$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$，从而得 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$，这就是所求的旋转曲面的方程.

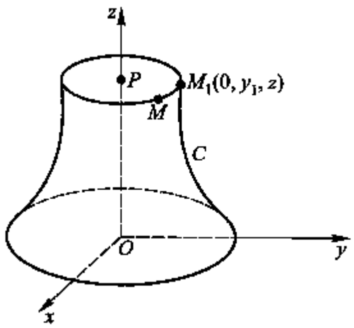


图 2-2

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

xOy 坐标面上的曲线绕 x 轴或 y 轴旋转，xOz 坐标面上的曲线绕 x 轴或 z 轴旋转，都可用类似的方法进行讨论.

例 4 将 xOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解　绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{b^2}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

这种曲面称为**旋转双叶双曲面**(如图 2－3).

绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

即

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

这种曲面称为**旋转单叶双曲面**(如图 2－4).

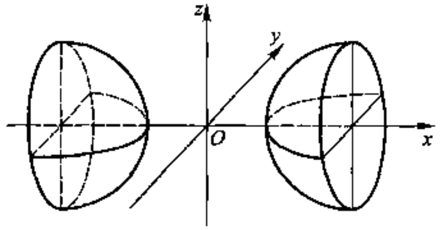


图 2－3

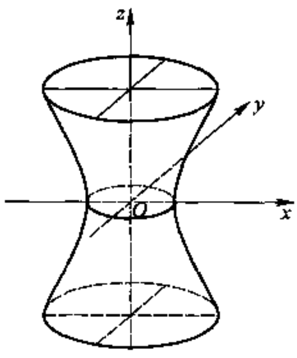


图 2－4

例 5　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周,所得旋转曲面叫做**圆锥面**. 两直线的交点叫做圆锥面的**顶点**,两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$叫做圆锥面的**半顶角**. 试建立顶点在坐标原点 O,旋转轴为 z 轴,半顶角为 α 的圆锥面(如图 2－5)的方程.

解　在 yOz 坐标面上,直线 L 的方程为 $z=y\cot\alpha$,此时直线 L 可作为圆锥面的母线,将其绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha,$$

所以所求圆锥面的方程为

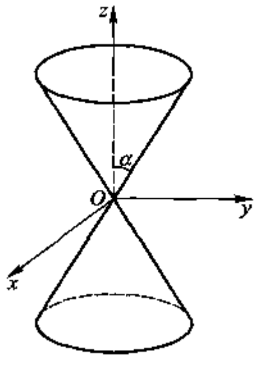


图 2－5

$$z^2=k(x^2+y^2),\text{其中 } k=\cot^2\alpha,$$

特别地,如果半顶角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,则圆锥面的方程为 $z^2=x^2+y^2$.

2.3 柱面

定义 2.3 平行于定直线并沿定曲线 Γ 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面(如图 2-6),定曲线 Γ 叫做柱面的准线,动直线 L 叫做柱面的母线.

设柱面的母线平行于 z 轴,准线是 xOy 平面上的一条曲线 $C:F(x,y)=0$(如图 2-7),试求柱面的方程.

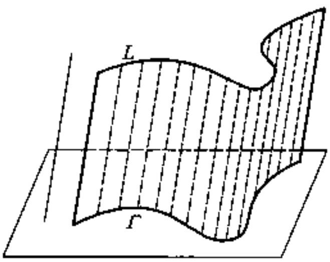


图 2-6

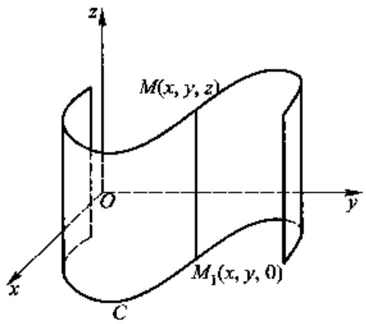


图 2-7

设 $M(x,y,z)$ 为柱面上的任意一点,点 $M(x,y,z)$ 在 xOy 平面上的垂足 $M_1(x,y,0)$ 必在曲线 C 上,从而满足 $F(x,y)=0$.

反之,满足方程 $F(x,y)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 一定在过点 $M_1(x,y,0)$ 且平行于 z 轴的直线上,从而在柱面上,因此所求柱面方程为 $F(x,y)=0$.

例如,方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,准线是 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$,该柱面叫做圆柱面(如图 2-8).

方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,它的准线是 xOy 平面上的直线 $x-y=0$,所以它是过 z 轴的平面(如图 2-9).

综上所述可知,此类柱面的特点是其方程不含 z. 一般地,在空间解析几何中,只含 x,y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面,其准线是 xOy 平面上的曲线 $F(x,y)=0$. 同理方程 $G(y,z)=0$, $H(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

特别地,方程为二次的柱面统称为二次柱面. 常见的二次柱面多是根据它们的准线方程而命名的,如图(2-10).

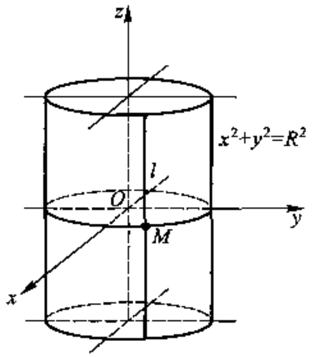


图 2－8

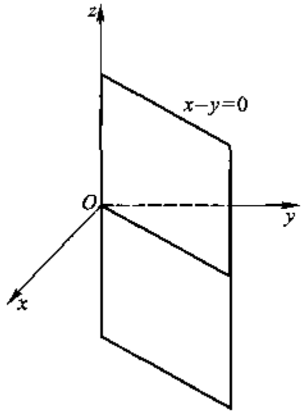
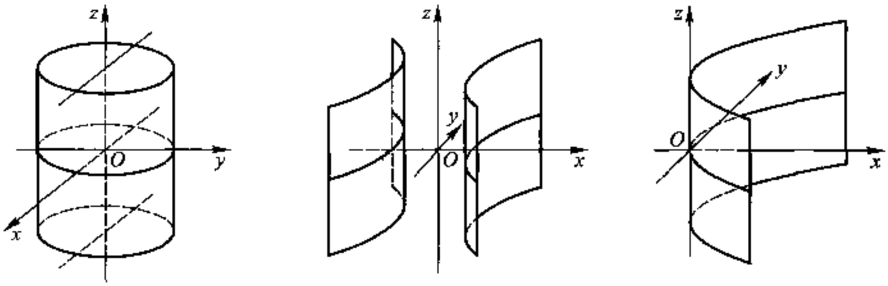


图 2－9



椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　　抛物柱面：$y^2=2px$

图 2－10

2.4　二次曲面

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面，例如上面讨论的二次柱面．在研究二次曲面时，常用截痕法来分析二次曲面的形状，所谓截痕法就是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌．下面讨论几种简单的二次曲面．

(1) 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,b>0,c>0)$

分别用三组平行于坐标面的平面 $z=k(|k|<c)$，$y=n(|n|<b)$，$x=m(|m|<a)$截割曲面，所得截痕的方程为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}, \\ z=k,\end{cases}\quad\text{（这是平面 } z=k \text{ 上的椭圆）}$$