

NONLINEAR
PHYSICAL
SCIENCE

罗朝俊 著

动态域上的不连续 动力学系统

Discontinuous Dynamical Systems on
Time-varying Domains

闵富红 黄健哲 郭羽 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

动态域上的不连续动力学系统

Dongtaiyu shang de Bulianxu
Donglixue Xitong

罗朝俊 著
闵富红 黄健哲 郭羽 译



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目 (CIP) 数据

动态域上的不连续动力学系统 / 罗朝俊著 ; 闵富红,
黄健哲, 郭羽译. — 北京 : 高等教育出版社, 2011.5

(非线性物理科学 / 罗朝俊, (瑞典) 伊布拉基莫夫主编)

书名原文 : Discontinuous Dynamical Systems on Time-varying
Domains

ISBN 978-7-04-032187-6

I . ①动… II . ①罗… ②闵… ③黄… ④郭… III . ①动力学系
统 IV . ① O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 047339 号

策划编辑 王丽萍
版式设计 范晓红

责任编辑 李华英
责任校对 陈旭颖

封面设计 杨立新
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787 × 1092 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	14.25	版 次	2011 年 5 月第 1 版
字 数	240 000	印 次	2011 年 5 月第 1 次印刷
插 页	2	定 价	49.00 元
购书热线	010-58581118		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物 料 号 32187-00

戊子夏

金天

懷

朝俊書於美

译者序

《动态域上的不连续动力学系统》(Discontinuous Dynamical Systems on Time-varying Domains) 由美国南伊利诺伊大学爱德华分校(South Illinois University Edwardsville) 著名教授罗朝俊所著。该书是首次研究含有时变边界的不连续动力学系统的一本专著。书中详细地介绍了不连续动力学系统中流在边界上的转换理论, 并运用 G 函数分析了不连续动力学系统的奇异性。基于 G 函数, 讨论了不连续边界上的汇流、源流、穿越流等存在的充要条件, 以及相关的转换分叉理论, 并且将该理论成功地运用到几个典型动态域上的动力学系统之中。

译者于 2010 年获得国家留学基金委和南京师范大学给予的出国留学进修机会, 并在美国南伊利诺伊大学爱德华分校访问一年, 才有幸认识罗朝俊教授并学习他的理论。这是一本难得的好书, 它提供了一个新颖的理论, 集作者多年的潜心研究成果, 因而我非常愿意将该书译出奉献给国内非线性领域的科研工作者们, 以期使不连续动力学系统的研究得到更多关注。

该书共分七章, 既详细地呈现了不连续动力学中流在边界上的转换理论, 又给出了该理论在典型动力学模型中的应用。因而, 本书易读易懂, 适合不同层次的读者。既可以作为高等院校非线性动力学课程高年级本科生和研究生的教材, 也可以作为非线性动力学领域科研人员的参考书。

本书由南京师范大学闵富红主笔翻译, 参加翻译工作的还有美国南伊利诺伊大学爱德华分校的黄健哲和郭羽。在翻译过程中, 罗朝俊教授给予了很多的指导和帮助。他渊博的学识、敏锐的思维、严谨的治学态度让我受益匪浅, 终生难忘, 更是我今后学习和工作中的楷模, 在此表示衷心的感谢!

闵富红 黄健哲 郭羽
2010 年 12 月

序 言

本书主要介绍动态域上的不连续动力学系统。起初没有打算写这本书,但是中国四川发生“五一二”大地震后,我深感震惊与内疚,作为一个动力学与振动方面的科研工作者,我的研究却不能解决地震方面的问题。因此,作者在扉页之后呈上自己用毛笔书写的“震撼”两个字,以表达内心的痛苦。震撼是地震和心碎的意思,表达了对人们心灵的震撼,唤醒每个人对社会的责任。于是,作者愿将自己在动态域上不连续动力学系统中的最新研究成果收集整理出版,献给祖国和家乡四川,献给那些在2008年5月12日四川汶川地震中遇难的同胞。

一般来讲,人们习惯于在不连续动力学系统中运用连续模型。然而,连续模型常常不能对不连续动力学系统给予恰当的描述与分析。最近,科研工作者已经逐步认识到不连续模型可以对工程系统提供更好的预测。目前,许多科研工作者主要关心不变区域不连续动力学系统的研究。动态域不连续动力学系统随处可见。要更好地解决实际动力学系统,却缺乏一个系统理论。于是,作者在此将系统地介绍动态域上的不连续动力学系统理论。

本书主要讨论不连续动力学系统中的转换性。基于这一思想,发展动力学系统相互作用的原理。本书总共有七章。第一章讨论两个典型力学模型,描述不连续动力学系统的存在和重要意义。第二章讲述不连续动力学系统中的流转换和转换分叉。第三章讨论具有斜边界的不连续动力学系统的横截和滑模现象。第四章分析与讨论拥有时变传输带的摩擦诱导振子的振动。第五章研究两个动力学系统的碰撞和啮合运动的动力学机理。第六章讨论在摩擦接触下两个动力学系统的相互作用。从第三章到第六章,将系统地讨论几个典型动态域上动力学系统的动力学行为。基于动态域上的不连续动力学系统理论,在第七章中阐述了两个动力学系统相互作用的一般原理。希望通过此书所提供的内容和信息,能使更多研究工作者致力于不连续动力学系统的研究与应用。

我要感谢我的学生 Brandon M. Rapp, Brandon C. Gegg, Dennis O'Connor 以及 Sagun Thapa, 他们将新理论运用到几个典型的动力学模型中, 并完成了相应的数值模拟。最后, 我还要感谢我的太太 (Sherry X. Huang) 和可爱的孩子们 (Yanyi Luo, Robin Ruo-Bing Luo 和 Robert Zong-Yuan Luo), 感谢他们在我著书过程中给予的容忍、耐心、支持和理解。

Albert C.J. Luo
美国南伊利诺伊大学爱德华分校
2008 年 8 月

目 录

第一章 概论	1
1.1 不连续动力学系统	1
1.2 本书概要	5
参考文献	5
第二章 流可转换性理论	10
2.1 不连续动力学系统	10
2.2 G 函数	12
2.3 可穿越流	16
2.4 不可穿越流	20
2.5 擦边流	29
2.6 转换分叉	40
参考文献	53
第三章 横截和滑模现象	54
3.1 受控系统	54
3.2 横截性条件	56
3.3 映射和解析预测	59
3.4 周期运动与混沌	66
参考文献	73

第四章 变速传送带上的摩擦振子	75
4.1 力学模型	75
4.2 解析条件	78
4.2.1 运动方程	78
4.2.2 可穿越运动	80
4.2.3 滑模运动	83
4.2.4 擦边运动	85
4.3 映射和力乘积判据	88
4.3.1 映射	88
4.3.2 滑模运动及裂碎	90
4.3.3 擦边流	93
4.4 周期运动	94
4.4.1 映射结构	95
4.4.2 数值结果	97
4.5 数值模拟	106
参考文献	110
第五章 两个振子的碰撞与啮合	112
5.1 物理问题	112
5.1.1 问题描述	112
5.1.2 运动方程	114
5.2 动态域和向量场	116
5.2.1 绝对运动	116
5.2.2 相对运动	121
5.3 啮合和擦边机理	124
5.3.1 解析条件	124
5.3.2 物理意义	129
5.4 映射结构及其运动	130
5.4.1 转换集和基本映射	130
5.4.2 映射方程	134
5.4.3 映射结构	136
5.4.4 分叉图	139

5.5	周期运动的解析预测	141
5.5.1	分析方法	141
5.5.2	非啮合碰撞运动	142
5.5.3	啮合碰撞运动	144
5.5.4	参数图	146
5.6	数值模拟	148
5.6.1	非啮合碰撞运动	148
5.6.2	啮合碰撞运动	150
5.6.3	进一步讨论	152
	参考文献	154

第六章 摩擦接触下两动力学系统的相互作用 155

6.1	问题描述	155
6.2	非粘合与粘合运动	158
6.2.1	运动方程	158
6.2.2	解析条件	160
6.3	周期运动	165
6.3.1	转换平面与映射	165
6.3.2	映射结构与运动	167
6.3.3	分叉图	171
6.4	数值模拟	172
6.4.1	非粘合周期运动	173
6.4.2	粘合周期运动	176
6.4.3	纯粘合周期运动	179
	参考文献	181

第七章 系统相互作用的一般原理 182

7.1	两个动力学系统	182
7.1.1	相互作用的动力学系统	182
7.1.2	不连续描述	186
7.1.3	合成不连续动力学系统	187
7.2	一般相互作用	190
7.3	具有奇异性的相互作用	197
7.4	具有棱奇异的相互作用	201
	参考文献	206

附录	207
A.1 基本解	207
A.2 稳定性和分叉	209
索引	210

第一章

概 论

工程中,不连续的动力学系统是不可避免的,而且随处可见。通常,人们习惯用连续系统来近似地描述不连续的动力学系统,以求方便地获得其动力学行为的某种逼近。然而,连续系统不能很好地描述不连续动力学系统,这是因为不连续系统中存在不连续,所以不连续系统需要用不连续模型来分析,只有这样才能够给工程动力学系统提供一个比较准确的描述和理论分析。因而,对于一个由许许多多连续子系统组成的不连续系统,在边界处,两相邻子系统具有不同的性质。鉴于两个相邻子系统之间的差异,需要考虑在其边界上的流转换性条件。如果在其边界上流不能转换的话,就需要考虑某特定传输定律。目前,人们主要集中在固定域上的不连续动力学的研究。然而,在实际工程中,动态域上的不连续动力学系统更普遍。本书中,主要介绍动态域上动力学系统的基本理论,且通过几个实例来帮助理解不连续动力学系统。在本章最后将给出全书结构以及各章节的简述。

1.1 不连续动力学系统

在机械工程中,两个或多个物体之间的相互作用存在两种基本形式,一种是碰撞,另一种是摩擦。例如,在齿轮箱中的动力传递以及方向改变是通过齿轮的相互啮合来完成,并形成一個合成的动力学系统。但是,每个齿轮相对于轴和轴承有自身的动力学系统,因为两个子系统之间没有任何联系,动力传递仅仅通过碰撞和摩擦来完成,因而它们之间具有一个随时间变化的共同边界,从而产生了相应地随时间变化的定义域。

早期,人们使用分段的刚性模型来研究齿轮啮合动力学。尽管动力学系

统是不连续的,但动力学系统的相应定义域是不随时间变化的.例如,1932年 den Hartog 和 Mikina 使用无阻尼的分段线性系统描述齿轮啮合动力学问题,研究了该系统对称的周期运动.对于低速齿轮箱,该线性模型基本上可以描绘齿轮所有齿之间的相互运动行为.对于高速旋转的齿轮传递,振动和噪声就变得非常严重.1988年 Ozguven 和 Houser 介绍了齿轮啮合的数学模型,其中分段线性模型和碰撞模型是两个主要的啮合力学模型,用它们来破解齿轮传递过程中产生振动和噪声的原因.1989年 Natsiavas 研究了含有三个对称线性弹簧的分段线性系统,且基于初始条件分析了系统的稳定性和周期分叉.根据分段线性模型,Comparin 和 Singh, Theodossiades 和 Natsiavas 分别于1989年和2000年研究了齿轮啮合的动力学性质.1984年 Pfeiffer 给出了齿轮啮合的碰撞模型,且 Karagiannis 和 Pfeiffer 于1991年根据此模型研究了规则周期运动和混沌运动,并做了实验研究以及理论分析.

2005年 Luo 和 Chen 应用分段线性碰撞系统来研究齿轮啮合模型的振动,给出了最简单的周期运动的解析预测,并观测到相应周期运动的擦边分叉现象和混沌运动.根据2005年 Luo 提出的局部奇异理论,Luo 和 Chen 在2006年讨论了这个分段线性系统的奇异性擦边运动机理,在2007年使用映射结构方法,给出了这个系统的复杂周期运动预测.在这个分段线性系统中,假定碰撞的位置是固定的,且是完全塑性碰撞.当齿轮碰撞时,同时两个齿轮也就分开了.跟已有的模型相比,这个模型能够对齿轮啮合的周期运动给予更好的描述.但是,这相关的假定相对于实际齿轮啮合系统并不现实,因为前面所有的研究都是基于不随时间变化的区域或者是一个给定的运动区域来研究的.为了考察时变区域的动力学系统,Luo 和 O'Connor (2007a,b) 提出了一个新的力学模型.在该模型中,他们分析了齿轮啮合碰撞和啮合运动的机理,并给出了相应解析条件.

在机械工程中,另一类典型不连续系统是具有摩擦力的动力学系统.例如,离合器系统和刹车系统.另外,两个物体表面的摩擦接触是很重要的,因为除了发生摩擦时,两个动力学系统是相对独立的.这类问题都具有时变域和边界.对于这类摩擦问题,可以追溯到20世纪30年代.1931年 den Hartog 研究了具有摩擦的、含有强迫外力的、阻尼线性振子的周期运动.1961年 Levitan 研究了周期外力驱动下的摩擦诱导振子,并分析了其周期运动.1964年 Filippov 研究了一个由库仑摩擦引起的振动问题,而且提出了一个基于右边不连续的微分方程理论.此外,为了研究向量场不连续性引入了微分包含的概念.1988年 Filippov 对不连续微分方程进行了归纳与总结.然而, Filippov 理论主要集中于不光滑动力学系统解的存在性和

唯一性. 具有这种不连续性的微分方程理论很难应用到实际问题中. Luo (2005a) 提出了一种可以解决不连续动力学系统局部奇异性的理论. 为了确定不连续动力学系统中边界上的源和汇的运动, Luo (2005b) 首次引入了虚流、汇流和源流的概念. 详细的内容参见 Luo (2006).

另一方面, 1979 年 Hundal 使用了一个周期的连续函数来研究摩擦振子的频率响应和幅值响应. 1986 年 Shaw 基于庞加莱映射研究了在非啮合情况下摩擦振子的周期运动. 1992 年 Feeny 分析了非光滑的库仑摩擦振子. 为了证实分析的结果, Feeny 和 Moon 于 1994 年通过做实验和数值仿真研究了干摩擦振子的混沌运动. 1996 年 Feeny 给出了摩擦振子发生滑模运动时的非线性运动机理. 1997 年 Hinrichs, Oestreich 和 Popp 研究了在外加激励作用下的碰撞和摩擦振子的非线性现象 (亦可参见文献 Hinrichs, Oestreich 和 Popp (1998)). 1998 年 Natsiavas 给出了一种数值算法, 用来确定在粘阻力和干摩擦下分段线性振子的周期运动和稳定性 (亦可参见文献 Natsiavas 和 Verros(1999)). 2001 年 Ko, Taponat 和 Pfaifer 研究了施加外加激励和不施加外加激励的摩擦振子. 2002 年 Andreaus 和 Casini 给出了在没有外力激励作用下库仑摩擦碰撞模型的闭解. 2003 年 Thomsen 和 Fidlin 研究了非线性摩擦振子在发生滑模时的幅值响应的近似估计. 2003 年 Kim 和 Perkins 使用哈密顿平衡法和加了金法研究了摩擦振子的滑模运动. 2004 年 Li 和 Feng 分析了带有非线性模型的摩擦振子的分叉和混沌. 2004 年 Pilipchuk 和 Tan 研究了有摩擦减速带的两个自由度的弹簧阻尼系统的动力学性质. 2004 年 Awrejcewicz 和 Pyryev 通过加速和刹车研究了轴垫系统的发生摩擦的周期过程. 2007 年 Hetzler, Schwarzer 和 Seemann 研究了摩擦振子非线性模型, 并分析了该摩擦振子的 Hopf 分叉, 而且可以将之应用到低频轮盘刹车系统中.

在前面所提及的研究中, 不连续边界上的运动转换条件都没有得到充分的分析. Luo 和 Gegg (2005a) 采用局部奇异理论 (参见文献 Luo (2005a, 2006)) 研究了含有干摩擦线性振子, 并提出了速度边界上力乘积判据 (参见文献 Luo 和 Gegg (2005b)). 通过这些分析发现, 特征值的分析方法不适合用于不连续边界上的运动转换分析. 2007 年 Lu 从数学角度分析了摩擦振子的周期运动的存在性. Luo 和 Gegg(2006a,b) 研究了含有时变摩擦力边界振子的动力学. 最近, 许多学者开始研究轮盘刹车系统的数学模型, 如 2007 年 Hetzler, Schwarzer 和 Seemann 把它看作一个摩擦振子力学模型. 2007 年 Luo 和 Thapa 提出了刹车系统是由两个振子组成的新型模型, 这两个振子通过带有摩擦力的接触表面连接在一起. 基于这个模型, 在周期激励作用下, 他们研究了刹车系统的非线性动力学行为.

最近十年, 非光滑系统得到了进一步发展. 1970 年 Feigin 使用 Floquet 映射理论研究了分段连续系统的 C 分叉, 通过特征值的变化给系统的运动进行了分类, 可以参考最近文献 (例如, 1995 年 Feigin, 1999 年 di Bernnado 等). 实质上, 这一分类是不适宜的, 由于擦边奇异性, 特征值分析不能提供一个合适的分析. 许多研究者把 C 分叉当作擦边分叉. 1991 年 Nordmark 使用术语“擦边”描述了一个简单碰撞振子的擦边现象. 在碰撞振子中, 没有给出严格的数学描述, 但是给出了擦边条件 (即, 速度为零 $dx/dt = 0$ 且 x 是位移). 从文献 Luo (2005a, 2006) 中可以看出, 此擦边条件只是必要条件. 擦边是指动力学系统中的一个流曲线与其不连续边界发生相切. 从微分几何角度看, Luo (2005a) 给出了擦边一个严格的数学定义以及不连续区域的充要条件 (亦可参见文献 Luo (2006)). 可见, Nordmark 的结果是一个特例. 1992 年 Nusse 和 Yorke 基于简单的离散映射分析了 Nordmark 碰撞振子, 从数值上看到了其分叉现象. 在数值仿真中, 这种变化的分叉被称为边界碰撞分叉. 因而, 在不连续动力学系统中相似的离散映射得到了进一步发展. 尤其是, 1999 年 Nordmark 和 Dankowicz 从一般方法出发, 利用在不连续边界进行泰勒级数的展开, 分析了擦边分叉现象, 从而发展了不连续映射. 基于同样的方法, di Bernardo 等 (2001a,b; 2002) 利用正则形式描述了切分叉, 并且利用正则形式获得了不连续映射 (见 di Bernardo 等 2001c), 以及进行了数值仿真观测到边界碰撞分叉. 根据不连续映射和正则形式, 分叉理论推广到不连续系统, 就是所谓的余维 -1 的动力学系统.

利用在不连续边界进行泰勒级数展开, 人们的确发展了不连续映射以及不连续边界的正则形式. 然而, 正则形式要求向量场是 C^r 连续的以及相应的收敛域. 对于分段的线性或非线性系统, 只有 C^1 连续的向量场是不能用于发展正则形式的. 即便是正则形式在不连续系统中是正确的, 但它也不能使用来研究全局的周期运动. 2000 年 Leine 等使用 Filippov 理论研究了非线性不连续系统的分叉. 然而, 基于 Floquet 乘子, 不连续映射方法被用来确定分叉. 非光滑动力学系统中更多的传统分叉分析方法可以参考文献 Zhusubaliyev 和 Mosekilde (2003). 从最近的研究结果来看, Floquet 乘数也不可能很好地用于分析非光滑动力学系统中, 由于出现周期运动时存在切分叉和滑模情形. 因此, Luo (2005a) 提出在非光滑动力学中, 两相邻域内的流在边界附近的局部奇异性理论 (参见文献 Luo (2006)). 为了解决这一难题, Luo (2008a) 发展了域内的流对边界的可穿越性理论, 以及相互发生转换分叉的一般理论. 本书中, 根据 Luo (2007a,b; 2008a,b) 的最新进展, 将介绍动态域上的不连续动力学系统理论.

1.2 本书概要

本书主要包含以下章节:

第二章, 介绍不连续动力学系统中边界上的流可转换理论. G 函数的引进是用于分析不连续动力学系统在边界附近的奇异性. 继而, 基于 G 函数, 讨论不连续系统在边界附近的汇流和半汇流、源流和半源流、可穿越流, 以及流从在一个区域到另一个区域的转换性. 最后, 介绍不连续系统边界上的穿越和非穿越流的转换分叉.

第三章, 运用不连续动力学系统中流的可转换性理论, 研究具有斜边界的不连续动力学系统的动力学行为. 首先定义边界的法向量, 确定其相应流在边界处的可穿越性 (可横截性) 条件. 其次, 获得在边界上的滑模和对于边界的擦边流条件, 这一研究将帮助人们更好地理解在控制中的滑模控制理论及现有的滑模控制理论的缺陷与不足.

第四章, 讨论一个具有时变边界的干摩擦振子. 通过运用不连续系统的理论, 得到滑模和非滑模运动的条件, 并分析其周期运动、擦边分叉以及滑模分叉. 研究目的是使人们更好地了解工业上如何控制摩擦运动, 并且说明动态域的动力学系统广泛存在.

第五章, 研究在碰撞力的作用下, 两个振子在时间变化的区域内发生的相互碰撞和啮合运动. 根据不连续动力学系统的局部奇异性理论, 详细地分析在可运动边界上相互碰撞的动力学运动机理, 从而给出啮合运动发生和消失的条件, 以及维持啮合运动的解析条件. 动态域的动力学系统理论的应用将解决齿轮啮合碰撞引起嘈声的机理.

第六章, 研究两个相互摩擦的动力学系统. 运用不连续动力学系统理论, 分析在不连续边界上运动转换性. 通过分析擦边分叉, 得到运动出现与消失的条件. 两个不同的动力学系统也能在一定条件下发生同步运动. 这为动力学系统相互作用提供了一个很好的例证.

第七章, 提出两个动力学系统相互作用的一般理论, 并且其定义域是随时间变化的. 运用第二章的不连续动力学系统理论, 分析两个动力学系统相互作用的充分必要条件, 并且给出一般性的分析方法.

参考文献

- Andreaus, U. and Casini, P. (2002), Friction oscillator excited by moving base and colliding with a rigid or deformable obstacle, *International Journal of Non-*

- Linear Mechanics*, **37**, pp.117-133.
- Awrejcewicz, J. and Pyryev, Y. (2004), Tribological periodical processes exhibited by acceleration or braking of a shaft-pad system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **9**, pp.603-614.
- Comparin, R. J. and Singh, R. (1989), Nonlinear frequency response characteristics of an impact pair, *Journal of Sound and Vibration*, **134**, pp.259-290.
- Dankowicz, H. and Nordmark A. B. (2000), On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations, *Physica D*, **136**, pp.280-302.
- den Hartog, J. P. (1931), Forced vibrations with Coulomb and viscous damping, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **53**, pp.107-115.
- den Hartog, J. P. and Mikina, S. J. (1932), Forced vibrations with non-linear spring constants, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **58**, pp.157-164.
- di Bernaedo, M., Budd, C. J. and Champneys, A. R. (2001a), Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: a unified analytical framework, *Physical Review Letters*, **86**, pp.2553-2556.
- di Bernardo, M., Budd, C. J. and Champneys, A. R. (2001b), Normal form maps for grazing bifurcation in n -dimensional piecewise-smooth dynamical systems, *Physica D*, **160**, pp.222-254.
- di Bernardo, M., Budd, C. J. and Champneys, A. R. (2001c), Corner-collision implies border-collision bifurcation, *Physica D*, **154**, pp.171-194.
- di Bernardo, M., Feigin, M. I., Hogan, S. J. and Homer, M. E. (1999), Local analysis of C-bifurcations in n -dimensional piecewise-smooth dynamical systems, *Chaos, Solitons & Fractals*, **10**, pp.1881-1908.
- di Bernardo, M., Kowalczyk, P. and Nordmark, A. B. (2002), Bifurcation of dynamical systems with sliding: derivation of normal form mappings, *Physica D*, **170**, pp.175-205.
- Feeny, B. F. (1992), A non-smooth Coulomb friction oscillator, *Physics D*, **59**, pp.25-38.
- Feeny, B. F. (1994), The nonlinear dynamics of oscillators with stick-slip friction, in: A. Guran, F. Pfeiffer and K. Popp (eds), *Dynamics with Friction*, River Edge: World Scientific, pp.36-92.
- Feeny, B. F. and Moon, F. C. (1994), Chaos in a forced dry-friction oscillator: experiments and numerical modeling, *Journal of Sound and Vibration*, **170**, pp.303-323.
- Feigin, M. I. (1970), Doubling of the oscillation period with C-bifurcation in piecewise-continuous systems, *PMM*, **34**, pp.861-869.
- Feigin, M. I. (1995), The increasingly complex structure of the bifurcation tree of a piecewise-smooth system, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **59**,