新世纪高等学校教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学与应用数学基础课系列教材

SHUXUE FENXI

（第3版）

数学分析（第3册）

北京师范大学数学科学学院 主 编
郑学安 邝荣雨 刘继志 等 编 著

$$d\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)\,dx$$

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

（第3版）

数学分析

（第3册）

SHUXUE FENXI

[illegible]

郑学安 [illegible]

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析（第3册）/郑学安，邝荣雨，刘继志等编著. －第3版.—北京：北京师范大学出版社，2010.12

新世纪高等学校教材

ISBN 978-7-303-11657-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①郑… ②邝… ③刘… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第204329号

营 销 中 心 电 话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电 子 信 箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：16.75
字　　数：270千字
版　　次：2010年12月第3版
印　　次：2010年12月第1次印刷
定　　价：26.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　张美娟
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

第3版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系。2004 年成立北京师范大学数学科学学院。经过 95 年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

作为国家重点大学，培养人才和编写教材是两项非常重要的工作。教材的编写是学院的基本建设之一。学院要抓好教材建设；教师要研究教学方法。在教材方面，学院推出一批自己的高水平教材，做到各科都有，约 60 部。

写教材要慢一点，质量要好一点，教材修订连续化，教材出版系列化，是编写教材要注意的几项基本原则。学院希望教材要不断地继续修改和完善，对已经出版两版的教材，我们准备继续再版。在 2005 年 5 月，经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的第 2 版数学教材进行修订后出版第 3 版。

教材的建设是长期的、艰苦的任务，每一位教师在教学中要自主地开发教学资源，创造性地编写和使用教材。学院建议：在安排教学时，应考虑同一教师在 3～5 年里能够稳定地上同一门课，并参与到教材的编写或修订工作中去。在学院从事教学的大多数教师，应该在一生的教学生涯中至少以自己为主，编写或修订一种教材作为己任，并注意适时地修订或更新教材。我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授（数学专业）和在职中学教师等使用和参考。（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2010-03-16

第3版作者的话

这次修订有以下几个创见.

第一,首次定义了赋范极限,它与一元函数极限有相同的性质,它又将各种函数极限的定义,定积分、重积分、曲线积分与曲面积分的定义,曲线弧长与曲面面积的定义,统一为一个定义,这使得学生更容易掌握定积分等较复杂的概念.第二,重新叙述了极限的直观定义,给出了从极限直观定义到极限的数学定义间的直接转化过程,使得学生更容易接受、理解和运用极限的定义.第三,强调了无穷小量理论在极限理论中的核心地位,特别是给出了Cauchy准则与一致连续的简洁的、便于理解或运用的无穷小量等价定义.第四,首次提出了微分多中值定理与局部单射定理,使得多元微分学有了基本完整的定理体系,使得学生更容易掌握多元微积分中几个重大定理的证明.第五,首次用函数语言给出了曲线、曲面、高维曲面的准确而严格的定义.第六,给出了曲面面积的严格定义,结束了长期以来曲面面积无严格的数学定义的现状.第七,用张量给出了多元泰勒公式简明易懂的表达式,由于张量是一类十分简单的多元函数,学生很容易初步掌握它.第八,首次完整地叙述了康托的集合定义,用这个康托的集合定义,很容易指出罗素悖论和其他集合论悖论的逻辑错误所在.

感谢北京师范大学数学科学学院领导对本书修订工作的支持.感谢北京师范大学出版社对本书修订与出版的支持.参加本次修订的人员有:郑学安、邝荣雨、刘继志.

北京师范大学数学科学学院

郑学安

2010-04-30

目　录

第 9 章　欧氏空间

§9.1　$\mathbf{R}^n$ 与映射

9.1.1　映射

用集合的语言,可将各种函数的定义统一起来.

设 X,Y 是两个集合,若存在对应关系 f,它将每个 $x\in X$ 唯一对应了一个 $y\in Y$,就称 f 是 X 到 Y 的**映射**,记为

$$f:X\to Y,x\mapsto y \text{ 或 } X\xrightarrow{f}Y,$$

也常常简记为 $f:X\to Y$. x 对应的 y 称为 x 的**像**,记为 $y=f(x)$,并称 x 是 y 的**原像**. 称 X 是 f 的**定义域**,称集合 $f(X)=\{f(x)\in Y\mid x\in X\}$ 为 f 的**值域**,也称 $f(X)$ 是 X 的**像**. 设 $W\subset Y$,称 $f^{-1}(W)=\{x\in X\mid f(x)\in W\}$ 为 W 的**原像集**.

当取 $X=E\subset\mathbf{R},Y=\mathbf{R}$ 时,f 就是一元函数. 当取 $X=D\subset\mathbf{R}^n,Y=\mathbf{R}^m$ 时,f 就是 ***n* 元函数**,常记为 $f:\mathbf{R}^n\supset D\to\mathbf{R}^m$.

设 $f:X\to Y,g:X\to Y$ 是两个映射,若对每个 $x\in X$ 均有 $f(x)=g(x)$,就称 ***f* 与 *g* 相等**,记为 $f=g$.

设 $f:X\to Y$ 是一个映射

1° 若 $f(X)=Y$,称 $f:X\to Y$ 是**满射**.

2° 若任取 $x_1\neq x_2$,必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,称 $f:X\to Y$ 是**单射**.

3° 若 $f:X\to Y$ 既是满射,又是单射,称 $f:X\to Y$ 是**双射**.

设 $f:X\to Y,g:A\to Y$ 是两个映射,且 $A\subset X$,若任取 $x\in A$,有 $g(x)=f(x)$,称 g 是 f 在 A 上的**限制**,记为 $g=f|_A$,又称 f 是 g 在 X 上的**扩张或延拓**.

设映射 $f:X\to Y$ 满足:存在 $c\in Y$,使得对每个 $x\in X$,有 $f(x)=c$,称 $f:X\to Y$ 是**常值映射**.

设映射 $f:X\to X$ 满足:对每个 $x\in X$,有 $f(x)=x$,称 f 是 X 上的**恒等映射**,并且总是约定用 I_X 表示集合 X 上的恒等映射.

给定两个集合 X 和 Y,先构造有序对元素 (x,y),它满足 $x\in X,y\in Y$,并称 x 是它的第一坐标,y 是它的第二坐标,两个有序对元素 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$,所有的有序对元素组成的集合,称为 X 与 Y 的**乘积集**

合,记为 $X\times Y$,即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\},$$

常称 $X\times Y$ 是 X 与 Y 的**卡氏积**.定义**投影映射**如下

第一坐标投影 $p_1:X\times Y\to X,(x,y)\mapsto x,$

第二坐标投影 $p_2:X\times Y\to Y,(x,y)\mapsto y.$

下面来定义复合映射,设 $g:X\to Y,f:Y\to Z$ 是两个映射,那么对每个 $x\in X$,通过 g,唯一对应了一个 $y=g(x)$,再通过 f,又唯一对应了一个 $z=f(y)=f(g(x))$,这就确定了一个对应关系,它将每个 $x\in X$ 唯一地对应了一个 $z\in Z$,称这个对应关系为 g 与 f 的**复合映射**,记为

$$f\circ g:X\to Z,x\mapsto z=f\circ g(x)=f(g(x)),$$

设 $g:X\to Y,f:Y\to Z,h:Z\to W$ 是三个映射,则易见有

$$h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g,$$

即映射的复合运算满足结合律.但是映射的复合运算不满足交换律,即一般地有

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

设 $f:X\to Y$ 是一个映射,若存在映射 $g:Y\to X$,使得 $f\circ g=I_Y$ 与 $g\circ f=I_X$ 同时成立,则称 $f:X\to Y$ 存在**逆映射**,g 就是 f 的逆映射.当 f 存在逆映射时,习惯上用 f^{-1} 表示 f 的逆映射,显然 f 也是 f^{-1} 的逆映射,即 $(f^{-1})^{-1}=f$.则容易验证

性质 1.1 映射 $f:X\to Y$ 存在逆映射的充要条件是:f 是双射.

n 元函数 $f:\mathbf{R}^n\supset G\to\mathbf{R}^m$ 存在反函数,当且仅当 f 是单射.因为这时有 $f:G\to f(G)$ 是双射,存在逆映射 $f^{-1}:f(G)\to G$,则称 $f^{-1}:\mathbf{R}^m\supset f(G)\to\mathbf{R}^n$ 是 f 的**反函数**.

当 X 与 Y 均是线性空间(向量空间)时,称映射 $f:X\to Y$ 为**算子**.特别若 X 是线性空间,Y 是实数域或复数域,就称映射 $f:X\to Y$ 为**泛函**.

设 X,Y 均是域 F 上的线性空间,若映射 $L:X\to Y$ 满足,任取 $x_1,x_2\in X$,任取 $\alpha_1,\alpha_2\in F$ 有

$$L(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1L(x_1)+\alpha_2L(x_2),$$

就称 $L:X\to Y$ 是**线性算子**,特别当 Y 为实数域或复数域时,称映射 $L:X\to Y$ 为**线性泛函**.

集合 $D\subset\mathbf{R}$ 上的全体一元函数组成的函数空间 $\mathscr{F}(\boldsymbol{D})$,$D$ 上的全体一元连续函数组成的函数空间 $C(\boldsymbol{D})$,D 上全体可微函数组成的函数空间 $\mathscr{D}(\boldsymbol{D})$,均是实数域上的线性空间.其中函数 f 看做是向量,两向量的加法就是两个函数的加法,实数乘向量就是实数乘函数得到的新函数.

例 1 积分运算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是可积函数族 $\mathscr{R}[a,b]$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 的一个映射

(泛函),记作

$$\int_a^b:\mathscr{R}[a,b]\to\mathbf{R},\quad f\mapsto\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

并称它为**积分算子**.

例 2　微分运算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$是可微函数族 $\mathscr{D}(a,b)$到函数族 $\mathscr{F}(a,b)$的一个映射,记作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\mathscr{D}(a,b)\to\mathscr{F}(a,b),\quad f\mapsto f',$$

并称$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$为**(一阶)微分算子**,常记作 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

例 3　加法运算 $a+b$ 是卡氏积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,记作

$$+:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},(a,b)\mapsto a+b.$$

例 4　乘法运算 $a\cdot b$ 是卡氏积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,记作

$$\cdot\ :\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},(a,b)\mapsto a\cdot b.$$

例 5　由微积分性质易知,积分算子是线性泛函,(一阶)微分算子是线性算子.

例 6　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 $m\times n$ 矩阵,

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^n,$$

令

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

则 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是一个线性映射.

例 7　在平面 $\mathbf{R}^2$ 中,设 $\boldsymbol{L}$ 将 $\mathbf{R}^2$ 的每个向量映为将其旋转角 θ 后的向量,则 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是线性映射,称为**旋转变换**.

设 $x_k\in\mathbf{R}^n,k\in\mathbf{N}_+$,则称$\{x_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的**点列**,它又可记作是映射$\{x_k\}:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^n,k\mapsto x_k$.

称映射 $f:\mathbf{R}^n\supset D\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元函数,其中当 $m\geqslant 2$ 时,称 f 为 ***n* 元向量值函数**. 当 $m=1$ 时,称 f 为 ***n* 元数值函数**. 当 $n=m=1$ 时,称 f 为一元函数. n 元向量值函数常表示为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{x}\in D\subset\mathbf{R}^n$$

其中 $f_i(x),i=1,2,\cdots,m$ 均是 n 元数值函数,它又可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \cdots\cdots\\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases}\quad \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbf{R}^n$$

在 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 中均取定欧氏基(见 9.1.2 节的定义)后,线性变换 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$有唯一的表达式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n,\end{cases}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

或简记作

$$(y_j)=(a_{ij})(x_i),$$

或写成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 $\boldsymbol{L}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的欧氏基下的矩阵,简称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的矩阵,它是一个 m 行 n 列的矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵.那么全体线性变换 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 组成的集合与全体 $m\times n$ 矩阵组成的集合是一一对应的,且作为线性空间,它们又是线性同构的.所以,常常将线性变换 $\boldsymbol{L}$ 与它的矩阵等同起来,记作 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}$.

当 $m=1$ 时,$\boldsymbol{L}$ 的矩阵是 $1\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,此时线性变换(线性泛函)$L$ 的一般表达式是

$$L(\boldsymbol{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

下面简单介绍线性变换或矩阵的范数概念.

设 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是线性变换,$\boldsymbol{A}$ 是它的矩阵,称

$$\|\boldsymbol{L}\|=\|\boldsymbol{A}\|=\sup_{|\boldsymbol{x}|=1}|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|=\sup_{|\boldsymbol{x}|=1}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|$$

为线性变换 $\boldsymbol{L}$ 或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**范数**,它是 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{A}$“大小”的一种度量.

性质 1.2 设 $\boldsymbol{L}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是线性变换,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 $\boldsymbol{L}$ 的矩阵,则

1° $|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})|\leqslant\|\boldsymbol{L}\|\,|\boldsymbol{x}|,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$.

2°　$|a_{ij}| \leqslant \| A \| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \| A \|_{HS}$，并称 $\| A \|_{HS}$ 为 A 的 Hilbert-Schmidt范数.

证明　我们仅证 1°，请读者自证 2°.

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，1°显然成立；当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，令 $c=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}>0$，有 $|c\boldsymbol{x}|=1$，所以

$$|\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})| \leqslant \sup_{|c\boldsymbol{x}|=1} |\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})| = \| \boldsymbol{L} \|.$$

故

$$|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{L}(c\boldsymbol{x})| \leqslant \| \boldsymbol{L} \|\ |\boldsymbol{x}|. \qquad \square$$

由矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 概念可以引进矩阵函数概念，即若每个 $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ 是 n 元数值函数，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a_{1n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & a_{mn}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **矩阵函数**. 由此可引进矩阵函数连续的概念，即若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \| \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0) \| = 0,$$

则称矩阵函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ **连续**. 利用性质 1.2 之 2°可以证明：

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续 $\Leftrightarrow$ 每个 $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$).

9.1.2　$\mathbf{R}^n$ 空间

在第 1 册第 3 章中已经简述了 $\mathbf{R}^n$ 空间.

由高等代数知道，$\mathbf{R}^n$ 不仅具有“代数结构”，即它是实数域上的向量空间. 而且具有“几何结构”，即它是具有内积的向量空间，这种空间在分析学中叫做(**实**)**内积空间**. $\mathbf{R}^n$ 中任何两个向量 $\boldsymbol{x}=(x_i)$，$\boldsymbol{y}=(y_i)$ 的内积，记作

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

叫做**欧几里得(Euclid)内积**，简称为**欧氏内积**. 欧几里得内积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 可作为矩阵运算，即 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的转置矩阵(行向量)，但为了节省篇幅，常将 $\mathbf{R}^n$ 中元素写成行向量. 在分析学中，我们把具有 Euclid 内积的有限维实线性空间 $\mathbf{R}^n$ 叫做 **n 维欧几里得空间**，简称**欧氏空间**，其中元素叫做**点**或**向量**. $\mathbf{R}^n$ 的下述标准正交基称为 $\mathbf{R}^n$ 的**欧氏基**，

$$\boldsymbol{e}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是 $\mathbf{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可唯一地写成

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

且有
$$x_i = x \cdot e_i, i=1,2,\cdots,n.$$

由内积可引进范数(长度)概念. 在一般的内积空间 V 中,我们称范数

$$\| \xi \| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$$

是由内积导出的范数. 在 $\mathbf{R}^n$ 中,称实数

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 x 的 **Euclid 范数(Euclid 长度)**,简称为**欧氏范数**.

由范数可引进距离概念. 在一般的内积空间 V 中,我们称距离

$$\rho(\xi, \eta) = \| \xi - \eta \|$$

是相应于范数的距离. 在 $\mathbf{R}^n$ 中,称实数

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

为 x 与 y 的 **Euclid 距离**,简称为**欧氏距离**.

$\mathbf{R}^n$ 中最基本的不等式是下面的

性质 1.3 设 $x, y \in \mathbf{R}^n$,有

1° **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|x \cdot y| \leqslant |x||y|$.

2° **三角形不等式**: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

请读者自行证之.

下面介绍 $\mathbf{R}^n$ 中一些几何概念. 设 $\delta > 0$.

集合 $U(a;\delta) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, |x - a| < \delta \right\}$ 与 $\mathring{U}(a;\delta) = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid 0 < |x - a| < \delta \}$ 分别称为点 a 的 **δ-球形邻域**(简称 **δ-邻域**)与 **δ-球形空心邻域**. 前者也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开球**(简称**球**).

集合 $\overline{U}(a;\delta) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, |x - a| \leqslant \delta \right\}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**闭球**.

集合 $S(a;\delta) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, |x - a| = \delta \right\}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**球面**.

集合 $K(a;\delta) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, |x_i - a_i| < \delta, i=1,2,\cdots,n \right\}$ 称为点 a 的 **δ-方形邻域**(也称为以点 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为中心,以 2δ 为边长的 **n 维正方体**).

集合 $\mathring{K}(a;\delta) = K(a;\delta) \setminus \{a\}$ 称为点 a 的 **δ-方形空心邻域**.

设有界区间 $I_k \subset \mathbf{R}$,且每个区间 I_k 的长度 $|I_k| > 0, k=1,2,\cdots,n$,称

$$I = \{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_k \in I_k, k=1,2,\cdots,n \} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中 **n 维区间**. 当所有的 I_k 都是开区间(或都是闭区间)时,称 I 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 **n 维开区间(或 n 维闭区间)**. 若 $I\subset\mathbf{R}^n$ 是某个 n 维开区间 J 添加 J 的部分边界点而得到的,同样称 I 是 n 维区间. 称 $|I|=|I_1|\times|I_2|\times\cdots\times|I_n|$ 为 n 维区间 I 的 **n 维体积或容积**.

设映射

$$\boldsymbol{f}:\mathbf{R}\supset I\to\mathbf{R}^n,t\mapsto \boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(t)$$

在区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上连续,且存在有限集 $E\subset I$,使得 f 限制在 $I\setminus E$ 上是单射,就称 $\Gamma=f(I)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一条**曲线**,称连续函数 f 是**曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的参数表示**,或称为**参数式**,也称 $p=f(t),t\in I$ 为曲线 Γ 的**参数方程**. 当 $I=[a,b]$,且 $f(a)=f(b)$时,称 $\Gamma=f(I)$为**闭曲线**. 当 $I=[a,b]$且 f 在$[a,b)$与$(a,b]$上均是单射时,称 $\Gamma=f([a,b])$为**简单曲线**,特别,若 $f(a)\neq f(b)$,称 $\Gamma=f([a,b])$为简单曲线段.

$\mathbf{R}^2$ 中的平面曲线 Γ 的参数表示是

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(t)=(x(t),y(t))\in\mathbf{R}^2,t\in I\subset\mathbf{R},$$

或

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in I\subset\mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}^2$ 中的简单曲线常称为 **Jordan 曲线**.

若曲线 Γ 的参数表示是

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(t)=t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n,t\in\mathbf{R},$$

则称它的值域

$$\boldsymbol{f}(I)=\{\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\mid \boldsymbol{p}=t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2,t\in\mathbf{R}\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中连接点 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的**直线**. 请读者写出连接两点的**直线段**.

例如,$\mathbf{R}^2$ 中连接两点 $\boldsymbol{x}_1=(x_1,y_1)$与 $\boldsymbol{x}_2=(x_2,y_2)$的平面直线参数表示的数量形式是

$$\begin{cases}x=x_2+t(x_1-x_2),\\ y=y_2+t(y_1-y_2),\end{cases}\quad t\in\mathbf{R}.$$

设 $D\subset\mathbf{R}^n$,若连接 D 中任何两点的直线段 $l\subset D$,则称 D 为**凸集**.

设 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$,集合

$$P_{\boldsymbol{x}_0}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0\}$$

叫做 $\mathbf{R}^n$ 中通过 $\boldsymbol{x}_0$ 的**(超)平面**,$\boldsymbol{a}$ 叫做它的**法向量**.

$\mathbf{R}^2$ 中的超平面是通过 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$的直线,方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

$\mathbf{R}^3$ 中的超平面是通过 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$的平面,方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

由高等代数知识还知道,通过原点 $\mathbf{0}$ 的超平面 $P_0=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=0\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个$n-1$维子空间.

思考题

1. 设 $f:X\to Y,x\mapsto y=f(x)$ 是映射,问 $f,f(x),f(X)$ 各表示什么?

2. 设一元数值函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)处处可导,问$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$各表示什么?

3. 下面式子哪一个对,哪一个错?

(1)$(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$;　　(2)$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$;

(3)$f\circ g=g\circ f$;　　(4)$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

4. 如何表示通过 $\mathbf{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的直线段?

练习题

9.1 求下列数值函数的自然定义域.

(1)$f(x,y)=\arcsin 2xy$;　　(2)$f(x,y)=\ln[x\ln(y-x)]$;

(3)$f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

9.2 给出向量值函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\supset D\to\mathbf{R}^3,\boldsymbol{x}=(x,y,z)\mapsto(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),f_3(\boldsymbol{x}))$如下:

(1)$f_1(x,y,z)=x^3+y^2$, $f_2(x,y,z)=y-z^2$, $f_3(x,y,z)=z^4$;

(2)$f_1(x,y,z)=x^2+y^2$, $f_2(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $f_3(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$,

求它们的自然定义域 D 及值域 $\boldsymbol{f}(D)$.

9.3 设 $F(x,y)=x+y+f(x-y)$, $F(x,0)=x^2$, 求 $f(x)$及$F(x,y)$.

9.4 画下列二元数值函数的图像.

(1)$z=\sqrt{x^2-y^2}$;　　(2)$z=\sqrt{1-x^2}$.

9.5 问下列函数图像有何特点?

(1)$f(x,y)=f(x,-y)$;　　(2)$f(x,y)=-f(x,-y)$;

(3)$f(x,y)=f(-x,-y)$.

9.6 在 $\mathbf{R}^2$ 中画出下列集合图形.

(1)$D=\{(x,y)|xy\neq 0\}$;　　(2)$D=\{(x,y)|y\geqslant|x|\}$;

(3)$D=\{(x,y)||x-y|\neq 1\}$;　　(4)$D=\{(x,y)|x^2=y^2\}$.

9.7 在 $\mathbf{R}^3$ 中画出下列集合图形.

(1)$S=\{(x,y,z)|x+y+z=2\}$;

(2)$S=\{(x,y,z)||x|+|y|+|z|=1\}$.