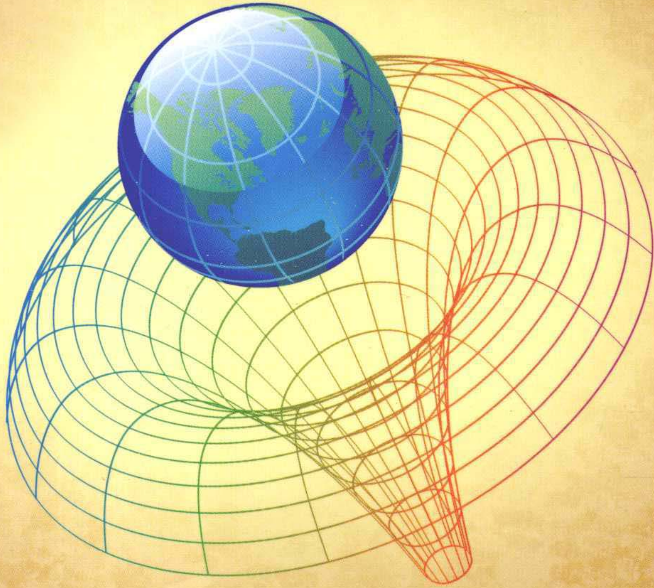
图灵数学·统计学丛书 54



高等微积分

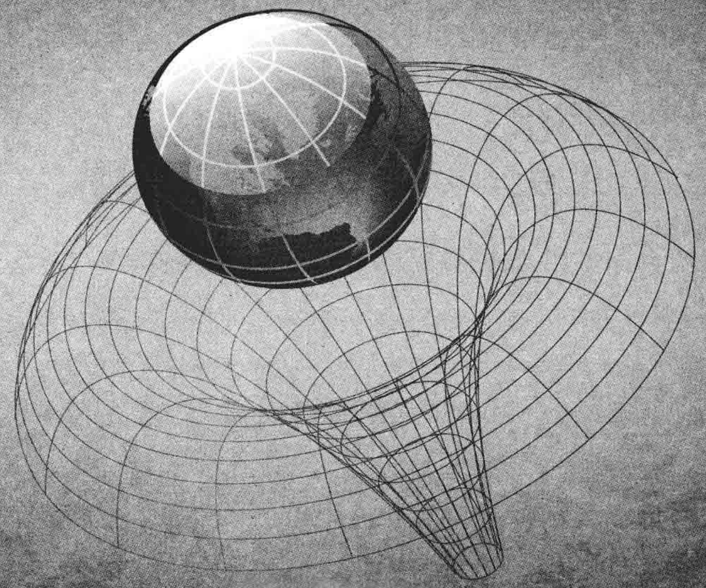
（第3版修订版）

高木贞治 著

冯速 高颖 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书54



高等微积分

（第3版修订版）

高木贞治　著

冯速　高颖　译

人民邮电出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等微积分：3 版修订版 /（日）高木贞治著；冯速，高颖译．—北京：人民邮电出版社，2011.8

（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 978-7-115-25928-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①高… ②冯… ③高… Ⅲ．①微积分 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 130306 号

内 容 提 要

本书以初等函数为重点，介绍了微积分相关的内容，包括微分、积分、无穷级数、傅里叶展开和勒贝格积分等 9 章内容．作者采用讲义式的叙述方式，把数学看成有生命的东西，让读者有一种别样的新鲜感．

本书是一本经典的微积分教材，原版被日本各大学普遍采用，适合数学专业及其他各理工科专业高年级本科生和低年级研究生用作教材或参考书．

图灵数学·统计学丛书

高等微积分（第 3 版修订版）

◆ 著　　[日] 高木贞治
　译　　冯 速 高 颖
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子邮件 315@ptpress.com.cn
　网址 http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
　印张：31.75
　字数：674 千字　　2011 年 8 月第 1 版
　印数：1-3 000 册　　2011 年 8 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-5172 号

ISBN 978-7-115-25928-8

定价：79.00 元

读者服务热线：(010) 51095186 转 604　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版 权 声 明

第 3 版修订版序言

本书的作者高木先生于 1960 年 2 月 28 日与世长辞. 那之前, 作者正在指导由岩波书店编辑部进行的第 3 版修改工作. 作者从数学和语言两方面指导了这次修改.

在数学方面, 作者指示去掉原第 2 版末尾的补遗部分, 或者将其放到正文之中. 除此之外, 第 3 版还增加了数页新内容, 用其替换了第 2 版的相应内容 (§53). 增加的内容是指数函数和三角函数的加法定理, 以及利用麦克劳林展开巧妙得到的若干相关性质. 作者的想法值得仔细回味. 没想到, 这部分原稿竟成了作者的数学绝笔.

作者在语言上的指导, 一部分是作者的原意, 一部分是编辑部经作者认可的修改. 编辑部觉得这本书应顺应日语的激烈变化, 借此改版之机, 把书中旧式语法修改成当下流行的语法形式. 这一想法不仅得到了作者的认同, 而且作者还亲自就将旧式数学用语替换成当下流行的用语等有关事项给出了积极的指导. 编辑部的工作就是针对这一语言方面的事项做出整理的.

为了应对作者去世这一极大变故, 经岩波书店编辑部联络, 弥永昌吉、三村征雄和我于 1960 年 4 月见面, 共同确定进行中的本书修订方针. 席间决定由我担任此项工作, 弥永、三村两位协助. 此后, 三村先生给我提出了很多有益的建议. 而弥永先生在改版的大部分时间内身居国外, 因此失去了协作的机会, 很是遗憾.

本书的这一版虽然称为第 3 版修订版, 但是在内容上, 与第 2 版增订版没有什么大变化. 要说增加的内容就是 §52 中第 2 个 [附记], 增加了关于 π 的近似值计算的最新内容. 但是, 因为我们秉承作者之意, 对本书做了后述的变更, 所以为了明示, 我们觉得附加修订版这样的名字是贴切的.

本书是作者遗留下来的数本名著之一. 正如作者在前言中所说, 它采用的是 “讲义式” 的陈述形式. 阅读此书, 读者会在不知不觉之中通览 “解析学的基本知识”, 有一种似乎亲耳聆听作者授课的感觉. 作者的讲义从一开始就瞄准目标, 自始至终简洁明了地追寻其本质, 因此给人印象深刻. 同时为了学生能够真正理解其中的含义, 充分补充是非常必要的. 本书也同样有很多地方希望读者自己加以补充. 其中一些对于一般读者比较难于补充的地方, 作者通常会在卷末加上需要补充内容的说明, 使读者更容易理解. 在修改的过程中, 我们认为应该适当地把它们加入正文中, 因此在第 3 版中, 根据需要进行了调整. 我们认为第 2 版中还有几处需要补充的地方, 对此, 本书也做了补充或者变更.

第 9 章没有经过作者的修订, 因此补充相应多些. §84, §91, §94, §96 也做了较多的补充和更改. 本书整体结构与旧版相同. 补充的内容, 如对旧版的修正或作者意图的详细说明, 都并未明确化.

本书文体流畅, 作者联想丰富且语感敏锐, 因此我们非常注意行文中不要混入不协调的句子或者词语, 但难免有疏忽的地方, 在此希望读者见谅. 书中没有采用旧版的脚注方式, 主要是为了读者阅读方便.

我一直很怀念这位对数学无比忠诚的作者, 接手这项工作总恐有疏漏或错误, 心中忐忑.

在整理此书的过程中, 我参考了数学同仁以及广大读者对于本书的直接或间接的反馈. 期间, 黑田成俊先生参与了修改工作, 并自始至终给我以帮助. 另外, 在校对的过程中, 得到三村征雄、田村二郎、黑田成俊三位先生的大力协助, 他们给我提出了很多宝贵的意见.

在这里, 我真诚地向上面提到的各位先生, 以及在这次修改中直接或间接给予我帮助的众多数学同仁表示衷心的感谢. 同时, 还要衷心感谢负责语言整理及校对的岩波书店的各位编辑. 最后, 我要明确声明, 无论是数学还是语言修改方面的责任都由我一人承担.

黑田成胜

1961 年 3 月

第 2 版增订版序言

对于本书的修改和补充，首先要提及的是在新增设的第 9 章中尝试着给出了勒贝格积分理论的一般介绍. 其次，对于第 1 版中无穷级数绝对收敛和条件收敛的差异给出了更合理的说明，并重新阐释了傅里叶积分公式，此外还做了许多其他细小改动，在此无法一一列举.

勒贝格积分理论是依 Saks 的架构描述的，对于细节部分，除了参考勒贝格的原著之外，还参考了de la Vallée Poussin、Carathéodory、Hahn、Kolmogoroff 等人的著作. 对于这样的尝试，肯定会有解释不到位或者遗漏论点的情况. 按理说，既然追加了勒贝格积分理论，就应该缩小黎曼积分理论的篇幅，但是考虑到传统习惯，还是保留了原来的模式. 因此，通读了本书，读者可能会感到本书堆积了不少第 1 版前言所说的大全式的资料，有可能造成整体性欠佳. 只有希望读者能对那些非重要的事项作适当取舍，权当它们是参考资料.

河田敬义、岩泽健吉两位校对了第9章的样稿，并提出了有意的意见，在此特别表示感谢.

高木贞治

昭和 18 年 5 月

第 1 版前言

就我本意, 本书是一本顺应时代发展、面向一般人群的解析学入门书, 或者说是一本解析学读本, 尽一小册之力, 概观解析学基本事项, 以提供进入特殊分支领域所需的基础知识为目标. 说是解析概论, 但是其内容还是关于微分和积分的一般性讲解, 只是为了明确本书是以初等函数理论为重点的, 因此以解析概论命名. 初等函数在应用上最重要的性质就是它的解析性, 因此, 为了自如地驾驭初等函数, 尽早领会解析函数理论的基础概念显然是非常重要的. 实际上, 初等解析函数理论就是 19 世纪的解析入门, 即所谓代数解析的现代版本而已.

当然, 作为一本入门书, 这本解析概论显然应该避免繁琐冗长, 尽量简洁明了, 但是本书却出乎我之意愿, 篇幅过大, 其唯一原因是采用了讲义式的陈述方式. 一般人认为, 数学描述方法有两种完全对立的方式. 其一是所谓的教本式描述, 最具代表性的就是欧几里得的《几何原本》. 这一方式整理已有的结果, 并按理论体系把这些结果一一展开, 其特色就是准确、简洁, 然而难读. 采用教本式描述整理出来的作品堪称精妙杰作, 但是为了能够揭示其内在的复杂结构, 必须能够读懂其字里行间隐含的意义, 而这正是难读的原因所在. 其二是所谓的讲义式叙述方式, 它追溯数学概念的起源, 追踪理论发展的轨迹, 缺点就是冗长, 通常比较粗杂, 细节部分基本上难以完整. 它以挖掘理论之根本为着眼点, 所以要涉及许多边边角角的内容, 因此不得不把精炼的过程完全交给读者. 众所周知, 教本式和讲义式各有所长. 提及它们的本质, 教本式是把已有的数学模式化, 对于已有的东西, 就有把数学作为闭集合处理之嫌; 而讲义式则是开放的, 把数学看成有生命的东西, 捕捉其成长的一面, 从这点看, 讲义式可以带来一些新鲜之感. 除此之外, 还有一种应该说是大全的形式, 简言之就是数学现状的展览会, 详略有致, 什么都有. 这样的形式更适于面向专业人士, 因此本书不考虑这种形式. 对于解析概论来说, 最理想的方式是, 对于整个理论部分采用讲义式, 而对于细节部分采用教本式, 若再要求高一些, 就是各个部分尽可能多设置一些大全式的例子, 使得整体更加协调, 且协调度越高越好. 写作本书时我始终铭记这样的理想模式, 但是事与愿违, 校对后, 痛感未能达成原意.

解析概论的素材选取是另一个难题. 取根叶是当然的, 但是根叶之间的界限很难界定. 除此之外, 我们还要考虑传统问题. 例如指数函数和三角函数, 它们在初等解析学中有着至高无尚的地位, 但是它们的起源却有强烈的历史性和偶然性, 因此不得不说具有很强的非理论特色. 而对于解析概论来说, 如果不能忽视其历史, 那么除了要陈述这些函数的合理引入方法之外, 还要追寻那些古典引入方法的偶然因素, 这对解析概论来说是迷茫的. 这样的事例不止一两件. 同样, 为了解释黎曼积分就不能吝惜笔墨. 本书

没有达到我理想之篇幅, 这也是一部分原因. 如果读者在阅读本书之后, 能够根据自己的情况做相应取舍, 做成适合自己的教本式体系, 那么就可以说初步达到了我的目的.

本书没有任何生僻的材料. 对于选材编排, 为了不使篇幅过大, 颇费了一些周折. 比如, 把与维数 (变量的个数) 无关的内容一起呈现, 并以最熟悉的二维给予说明. 当然, 对于与维数相关的话题则根据维数来安排材料, 但是没有采用从单变量到多变量这种相互对应的说明形式. 至于讲解的方式, 如前面所述, 基础部分尽可能论证明确, 而应用部分尽可能解法灵活, 细节内容就请读者给予补充. 在各章的末尾还安排了少量的习题, 供读者使用, 这些习题都是精挑细选的. 部分习题附加了解题提示, 但不排除有错误之处, 所以希望读者不要拘泥于此. 因为觉得重视练习效果为上, 所以没有设置大量的习题.

下面对记法和用语做一些说明. 首先, 三角函数的记法, 使用了我们习惯的英式写法, 而反三角函数采用了德法式的 arc 记法. 但是, 反正切函数没有采用 arctg① 而采用了 arctan. 专业术语一般按照习惯用法. 但是其中可能混入我的习惯用法, 当然不是有意为之. 对于由于我的不良习惯而杜撰的用语, 恳请读者原谅.

我的朋友弥永昌吉先生、菅原正夫先生以及黑田成胜先生仔细阅读了本书的原稿, 提出了宝贵的意见, 在此表示衷心感谢.

高木贞治
昭和 13 年 3 月

① 与中文类似, 日语中没有与 tg 相应的发音. —— 译者注

目　　录

第 1 章 基本概念

§1 数的概念

假设数的概念和四则运算法则已知①. 最初我们只考虑实数, 在此不再赘述. 下面的用语是众所周知的.

自然数 1, 2, 3 等. 用以表示事物的次序或集合中事物的个数.

整数 $0, \pm 1, \pm 2$ 等. 自然数是正整数.

有理数 0 和 $\pm\dfrac{a}{b}$, 其中 a, b 是自然数. 当 $b = 1$ 时 $\pm\dfrac{a}{b}$ 为整数.

无理数 有理数以外的实数. 例如

$$\sqrt{2} = 1.414\,213\,5\cdots,$$

$$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\cdots,$$

$$\pi = 3.141\,592\,653\,5\cdots.$$

(需要证明它们不是有理数.)

十进制 大家都知道实数用十进制表示. 用十进制表示有理数时, 有理数或者是有限小数, 或者是无限循环小数. 而有限位数的十进制数也能够表示为循环小数的形式. 例如 $0.6 = 0.599\,9\cdots$. 如果用十进制表示无理数, 则需要无穷多位, 且数字不循环.

我们之所以用十进制来表示数, 可能与手指的个数相关. 理论上, 与十进制表示类似, 以除 1 之外的任意自然数为基数都能够表示数.

特别在二进制中, 仅用数字 0 和 1 就足够了. 用二进制表示有理数时, 有理数是分母为 2 的幂的循环二进制数.

[例]

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = (0.101).$$
$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = (0.100\,111\cdots).$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = (0.101\,010\cdots).$$

数的几何学表示 为方便起见, 在数学分析中可以灵活自由地使用几何学术语. 例如, 可以采用坐标将实数表示为直线上的点. 这个方法是众所周知的. 在直线 XX'

① 参考附录 (I).

上, 设表示 0 的点 O 是坐标原点, 用射线 OX 上的点 E 表示 1, 则 OE 是长度单位. 一般地, 按照 x 为正或为负, 表示 x 的点 P 或在半直线 OX 上或在半直线 OX' 上. OP 的长度为 x 的绝对值, 记作 $|x|$. 如上述这样用点 P, P' 来表示实数 x, x', 那么 $|x-x'|$ 就是 PP' 的长度.

关于绝对值常常会用到如下关系.

$$|x|+|x'| \geqslant |x+x'| \geqslant |x|-|x'|.$$

这也是众所周知的.

如果将两个实数 x, y 组成一组, 记为 (x, y), 则各个组 (x, y) 与坐标平面上的各个点 P 之间存在一一对应关系. 此时将 (x, y) 简称为点 P. 通常采用直角坐标.

同样, 三个实数的组 (x, y, z) 可以由空间中的点来表示.

一般地, 称 n 个实数的一个组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 维空间中的一个点, 并用字母 P 来表示.

当 $P=(x_1, x_2, \cdots, x_n), P'=(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ 时, 将

$$\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2}$$

简称为 P, P' 之间的距离, 记为 PP'. 这时 "三角关系" $PP'+P'P'' \geqslant PP''$ 成立. 当固定 P 时, 称满足

$$PP'^2=(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2<\delta^2$$

的点 P' 处于以 P 为中心, 以 δ 为半径的 "n 维球" 的内部. 如果换成以下写法,

$$|x_1-x_1'|<\delta, \quad |x_2-x_2'|<\delta, \quad \cdots, \quad |x_n-x_n'|<\delta,$$

即当

$$\max(|x_1-x_1'|, \cdots, |x_n-x_n'|)<\delta^{①}$$

时, 称 P' 处于以 P 为中心的 "n 维立方体" 的内部, 该 n 维立方体的棱与坐标轴平行且棱长为 2δ.

为简便起见, 我们采用上述这样几何学的表示方法, 不要仅仅根据字面意义而去随意想象 n 维空间. 不过, 这样的表示方法鲜明而且容易记住.

§2 数的连续性

上节有关实数的内容是假定大家都已经熟知的. 数的连续性是数学分析的基础, 这里必须进行说明.

将所有数划分为 A, B 两组, 当 A 中的每一个数都小于 B 中的每一个数时, 称这样的划分 (A, B) 为戴德金 (Dedekind) **分割**, 并且称 A 为下类, B 为上类.

---

① 记号 $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大值. 同样, min 表示最小值.

在分割 (A, B) 中我们严格规定, 不管什么样的数, 都或者属于下类, 或者属于上类, 并且仅属于其中一类①.

给定数 s, 将小于 s 的数全部归入下类, 将大于 s 的数全部归入上类. 为了完成分割, s 本身也必须归入下类或上类中. 如果将 s 归入下类, 则 s 就是下类中的最大数, 此时上类中没有最小数. 如果将 s 归入上类, 则 s 就是上类中的最小数, 此时下类中没有最大数. 如此一来, 能够以任意数 s 作为边界来给出分割. 重要的是这个做法的逆过程成立. 也就是说, 下面定理成立.

定理 1 (戴德金定理) 实数的分割确定某数为下类和上类的边界.

也就是说, 当给出分割 (A, B) 时, 存在一个数 s, s 或是 A 中的最大数或是 B 中的最小数. 对于前者, B 中没有最小数, 而对于后者, A 中没有最大数. 这里并不是如前面那样, 首先给定 s, 然后以 s 为边界来给出 (A, B). 而是相反, 给出分割 (A, B), 由其来决定 s.

这就是**实数的连续性**. 现在我们承认该定理, 并以此为基础来建立理论.

有大小顺序就可构建分割, 理论上可以有如下三种类型的分割.

(1°) 在下类中有最大数, 同时在上类中有最小数. 简略来说, 在下类和上类之间有跳跃 (leap).

(2°) 在下类中没有最大数, 并且在上类中也没有最小数. 即在下类和上类之间有间隙 (gap).

(3°) 在下类或上类中有终端 (最大或最小), 而另一个中没有终端. 即下类和上类连续.

戴德金定理是说实数的分割只能是 (3°) 这个类型.

在整数范围内, 分割只能是类型 (1°). 在有理数范围内, 由于在两个有理数之间必定存在其他有理数 (有理数的**稠密性**), 因此可以有类型 (2°) 的分割, 而不能有类型 (1°) 的分割. 例如, 假设满足 $b > \sqrt{2}$ 的有理数 b 构成上类 B, 其他有理数 a 构成下类 A, (A, B) 是有理数的分割. 由于满足 $s = \sqrt{2}$ 的有理数 s 不存在, 因此 (A, B) 为类型 (2°). 像这样, 只考虑有理数的话, 不触及任一个有理数就能将有理数分为 A, B 两组. 这正是戴德金称之为分割 (Schnitt) 的情形.

但是, 如果也考虑无理数, 则不能这样割断. 在实数范围内, 在分割的断开处 (下类和上类之间的边界) 必定存在实数. 这就是实数的连续性.

§3 数的集合 · 上确界 · 下确界

符合某一条件的数的全体称为**集合**. 符合此条件的每个数都属于该集合, 不符合此条件的每个数都不属于该集合. 任一数都或者属于该集合, 或者不属于该集合, 二者必

① 其中, 下类 A 和上类 B 都不允许为空 (空集).

居其一.

[例 1]　全体有理数的集合. 条件为"是有理数".

[例 2]　设 a, b 是常数, 且 $a < b$, 所有满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的 x 的集合. 称该集合为**闭区间** $[a, b]$.

[例 3]　设 a, b 是常数, 且 $a < b$, 所有满足 $a < x < b$ 的 x 的集合. 称该集合为**开区间** (a, b).

[例 4]　所有满足 $x^2 < 2$ 的有理数 x 的集合.

[例 5]　所有满足 $x^2 > 2$ 的正有理数 x 的集合.

[例 6]　给定函数 $f(x)$ (例如多项式) 和数 a, b, 所有满足 $a < f(x) < b$ 的 x 的集合.

当属于集合 S 的数全都不大于 [或小于] 数 M 时, 称 S 在上方 [或下方] **有界**, 并称 M 为该集合的一个**上界** [或**下界**]. 如果上方和下方都有界, 则称 S 有界.

集合 S 的上界或下界并不是确定的. 比一个上界大的数同样是上界, 比一个下界小的数也同样是下界. 作为集合的界限, 人们对尽可能小的上界和尽可能大的下界感兴趣. 如果集合 S 中存在最大数, 则该最大数当然就是上界中最小的; 如果集合 S 中存在最小数, 则该最小数当然就是下界中最大的. 下面证明, 如果 S 有界, 则即使不存在最大数或最小数, 最小上界和最大下界也存在. 将它们分别称为 S 的上确界和下确界. 故上确界和下确界不一定是属于 S 的数. 也就是说, 当 S 中不存在最大数时, 上确界不属于 S. 下确界也同样.

换言之, 集合 S 的**上确界** a 是符合如下条件 $(1^\circ), (2^\circ)$ 的数:

(1°) 对属于 S 的所有数 x, 有 $x \leqslant a$;

(2°) 假设 $a' < a$, 存在属于 S 的某个数 x, 使得 $a' < x$.

上述的(1°) 意指 a 是 S 的上界, (2°) 意指不存在比 a 小的上界. 故 a 为上确界, 即最小上界.

有关**下确界**的讨论, 改变不等号方向即可.

例 1 中的集合在上下方都无界.

例 2 和例 3 中的集合有界, 其中, a 是下确界, b 是上确界. 在例 2 中, 上确界和下确界都属于该集合, 而在例 3 中, 上确界和下确界都不属于该集合.

例 4 中的集合有界, 但没有最大数和最小数, 其中, $\sqrt{2}$ 是上确界, $-\sqrt{2}$ 是下确界.

例 5 中的集合在下方有界, 而在上方无界, 其中, $\sqrt{2}$ 是下确界.

以上说明了上确界和下确界的含义, 下面证明上确界和下确界存在.

定理 2 (魏尔斯特拉斯定理)　*若数集 S 在上方 [或下方] 有界, 则 S 的上确界 [或下确界] 存在.*

[证]　首先假定 S 在下方有界, 证明下确界存在.

设 S 的一个下界为 a, 这时小于 a 的数同样是 S 的下界. 设所有能够作为 S 的下界的数的全体为 A 组, 其他数的全体为 B 组, 形成一个分割. 实际上, 属于 B 的数

都不可能是 S 的下界, 所以都一定比 S 的任何一个下界大. 因此, 属于 B 组的数都比属于 A 组的数大.

设由该分割所确定的数为 s. 于是, 或者 s 属于 A 且是 A 中的最大数, 或者 s 属于 B 且是 B 中的最小数. 两者必居其一 (定理 1).

下面来看 s 是否属于 B.

假设 s 属于 B. 那么 s 不可能是 S 的下界, 所以存在比 s 小且属于 S 的数. 设其一为 x, 有 $x < s$.

设处于 x 和 s 之间的一个数为 b, 这时有 $x < b < s$.

b 比属于 S 的数 x 大, 所以不是 S 的下界, 即 b 属于 B. 而 b 又比 s 小. 矛盾.

故 s 不可能是 B 中的最小数.

从而 s 是 A 中的最大数, 即 S 的最大下界, 即 S 的下确界.

同理可证, 当 S 在上方有界时, 上确界存在. □

§4 数列的极限

$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 这样无穷个按一定顺序排列起来的一列数称为数列. 设 n 在自然数范围内取值, 则数列中的项 a_n 是变量 n 的 "函数". 确定该函数后, 记数列为 $\{a_n\}$. 如果当 n 无限增大时 a_n 无限接近确定的数 α, 则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 α, 并称 α 为 a_n 的**极限**. 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,$$

或简明地记为

$$\text{当 } n \to \infty \text{ 时,} \quad a_n \to \alpha.$$

具体来说, 给定任意正数 ε, 与之对应地确定一个序号 n_0, 使得

$$\text{当 } n > n_0 \text{ 时,} \quad |\alpha - a_n| < \varepsilon.$$

由定义可知, 当数列 $\{a_n\}$ 收敛时, 其极限 α 唯一确定.

如果不论取多大的正数 R, 都与之对应地存在 n_0, 使得

$$\text{当 } n > n_0 \text{ 时,} \quad a_n > R,$$

则采用记号 ∞, 形式上记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{或} \quad a_n \to \infty.$$

记法

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{或} \quad a_n \to -\infty.$$