21世纪高等教育基础课系列精品教材

经济数学

刘文学　郑素文　主编

上海交通大学出版社

经济数学

刘文学　郑素文　主　编
王建刚　蔡浩江　副主编

上海交通大学出版社

内容提要

本书根据教育部最新制定的《高等教育经济数学基础课程教学基本要求》，结合我国高等教育具体情况，在多年教学实践的基础上编写而成。全书包括三部分内容：微积分、线性代数以及概率论与数理统计。

本书各部分内容相对完整，自成体系，基本涵盖了高等教育经济管理类专业必修的数学基础知识。在内容深度上以必需、够用为原则，重点强调知识的应用性；在体系编排上由易到难、循序渐进，体现了数学的连贯性；在语言文字上注重口语化，浅显易懂，突出自主学习特点；在例题与习题上精选详解，注重实用，有助于知识的掌握与应用。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校、本科院校及本科院校举办的技术学院、继续教育学院、民办高校经济管理类及相关专业的教材，也可作为相关研究人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学/刘文学，郑素文主编.—上海：上海交通大学出版社，2008

ISBN 978-7-313-05157-8

Ⅰ.经… Ⅱ.①刘…②郑… Ⅲ.经常数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第018112号

经济数学

刘文学　郑素文 **主编**

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路877号　邮政编码200030）

电话：64071208　出版人：韩建民

人民日报社西安印务中心印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：19.5　字数：375千字

2008年3月第1版　2008年3月第1次印刷

ISBN 978-7-313-05157-8/F·757　定价：32.80元

前　言

随着我国教育体制的不断发展和完善,高等教育已经进入大众化教育阶段，并呈现出蓬勃之势。为了适应当前本科院校教育发展的需要,我们编写了这本教材。

本书是依据教育部颁发的《高等教育经济数学基础课程教学基本要求》，由长期从事经济数学教学的教师，结合自己多年的教学实践中的经验编写而成。适用于高等教育经济和管理类专业。建议学时为126学时左右。

本书在编写过程中充分考虑到了本科院校经济数学教学特点，力求适用、简明、易懂。因此对于一些概念与定理的描述，采用了更为通俗的方式，从而降低了难度，精简了内容，更适合本科院校的学生使用。本书既突出了数学方法的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。

本书在每章之前都列出学习基本要求，使学生有了明确的学习方向。每章后面的小结，为学生复习提供了方便。在例题的选择上力求做到层次性、全面性、典型性。所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的。与传统的教材相比，避免了单纯性技巧和难度较大的习题，增加了富有启发性、应用性、为专业服务的题目。书末附有习题参考答案。

本书基本内容共分为三篇，即微积分、线性代数、概率论与数理统计。其中第一篇由极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分。定积分、多元函数微分学六章内容组成；第二篇由行列式、矩阵、线性方程组三章内容组成；第三篇由随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、统计推断三章内容组成。通过对这些基本内容的学习，可以培养学生的抽象思维、逻辑推理及基本运算能力，使学生初步具有用数学方法分析和解决经济管理问题的能力，并为他们进一步对经济管理的后继课程的学习或工作打下必要的基础。

由于编者水平有限，本书中尚存不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007年8月于北京

物料号：12121-SX-1

目录

CONTENTS

第一篇　微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇

微积分

第 1 章　极限与连续

初等数学的研究对象基本上是固定不变的量，即常量. 而高等数学的研究对象则是在某一过程中变化的量，可以取不同数值，即变量. 所谓函数关系就是变量之间的对应关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、数列和函数的极限、函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1　函　数

1.1.1　函数

函数是高等数学的主要研究对象. 中学里已经讨论过函数的概念，下面我们在复习的基础上进行一下综述.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 为一非空数集. 对于每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有惟一确定的值 y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 定义在 D 上的**函数**，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**.

函数定义中，对于每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有惟一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**.

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“g”，“φ”等. 此时函数就记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$.

另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”列达，而不必再列出 D. 例如，函数 $y=\sqrt{2-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-\sqrt{2},$

$\sqrt{2}]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须 $x\neq 0$，且 $x^2-1\geqslant 0$，解不等式得 $|x|\geqslant 1$. 所以函数的定义域为 $D=\{x \mid |x|\geqslant 1\}$，或 $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法和解析法（公式法），这些知识在中学里已被大家所熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形. 如图 1.1 所示.

图中的 R 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

例 2 函数 $y=2$. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R=\{2\}$，图形为一条平行于 x 轴的直线. 如图 1.2 所示

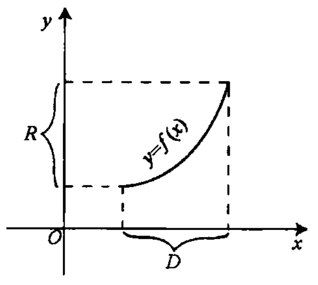

图 1.1

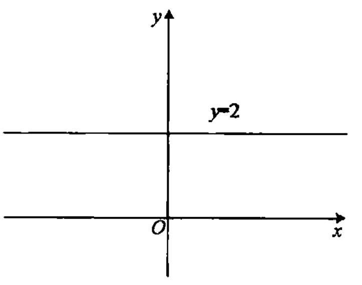

图 1.2

有时候一个函数需要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例 3 函数 $y=f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2+x, x>1.\end{cases}$

这是一个分段函数，其定义域为 $D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=3\sqrt{x}$；当 $x>1$ 时，$y=2+x$.

例如，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$；$f(1)=3\sqrt{1}=3$；$f(2)=2+2=4$. 这个函数的图形如图 1.3 所示.

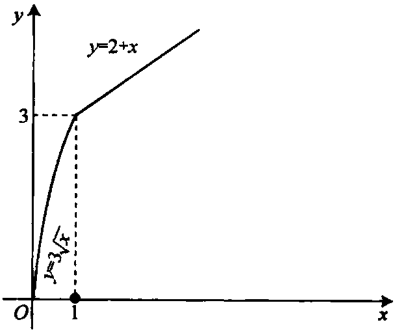

图 1.3

用几个式子来表示一个函数,不仅与函数定义不矛盾,而且有现实意义.在自然科学和经济问题中,经常会遇到分段函数的情形.

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在数 M_1,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=M_1$ 的下方.

如果存在数 M_2,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.图形特点是函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=M_2$ 的上方.

如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.函数有界的图形特点是函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

函数 $f(x)$ 无界,就是说对任何 M,总存在 $x_1\in X$,使 $|f(x)|>M$.

例如,$f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的且 $|\cos x|\leqslant 1$.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的.或者说它在 $(0,1)$ 内有下界,无上界.

这是因为,对于任意 $M>1$,总有 x_1:$0<x_1<\dfrac{1}{M}<1$,使

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}>M,$$

所以函数无上界.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的.

可以证明,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$).如果对于任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,因为若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(x)=f(-x)$,所以如果 $P(x_0,f(x_0))$ 是图形上的点,则与它关于 y 轴函数对称的点 $P'(-x_0,f(x_0))$ 也在图形上.如图 1.4 所示.

奇函数的图形关于原点对称,因此若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,所以如果 $P(x_1,f(x_1))$ 是图形上的点,则与它关于原点对称的点 $P''(-x_1,-f(x_1))$ 也在图形上.如图 1.5 所示.

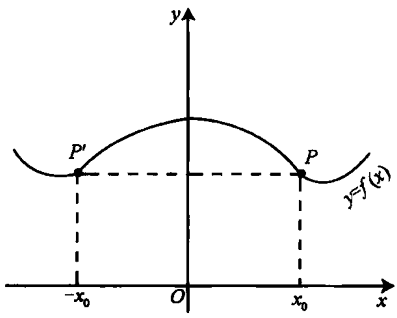

图 1.4

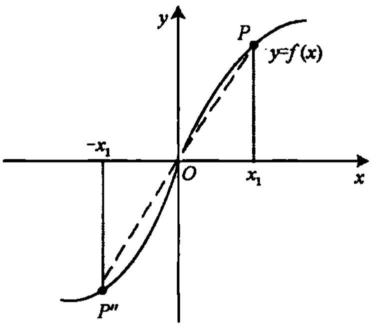

图 1.5

函数 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

例 4　判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^4(1-x^2)$；

(2) $y=x^3-x^2$；

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解　(1) $y=f(x)=x^4(1-x^2)$，

因为 $f(-x)=(-x)^4[1-(-x)^2]=x^4(1-x^2)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

(2) $y=f(x)=x^3-x^2$，因为 $f(-x)=-x^3-x^2\neq f(x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$既非奇函数也非偶函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递增**的. 如图 1.6 所示.

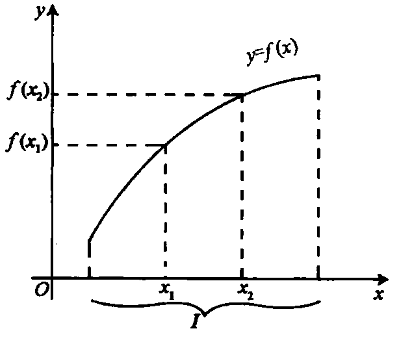

图 1.6

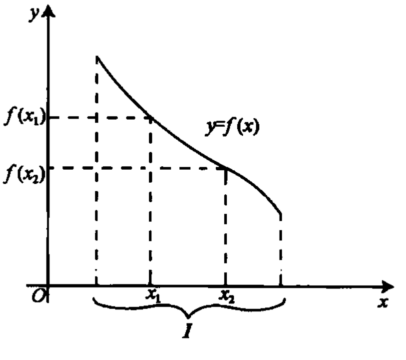

图 1.7

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调递减**的. 如图 1.7 所示.

单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

函数单调性举例：

函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调递减的,在区间$[0,+\infty]$上是单调递增的,在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的,如图 1.8 所示.

又例如,函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的.如图 1.9 所示.

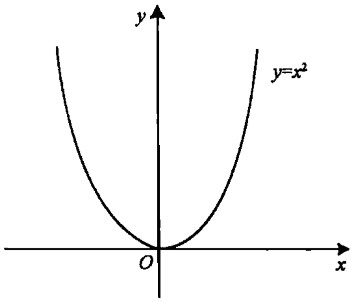

图 1.8

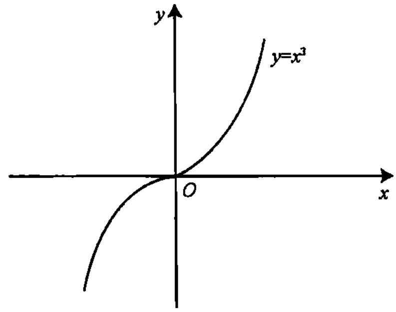

图 1.9

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D.如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为 $f(x)$的**周期**.通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点:在函数的定义域内,每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状.

1.1.3　反函数、复合函数与初等函数

设某种商品的单价为 p,销售量为 x,则资金回收量 y 是 x 的函数:

$$y = px,$$

这时 x 是自变量,y 是 x 的函数.若已知资金回收量 y 反过来求销售量 x,则有

$$x = \frac{y}{p}.$$

这时,y 是自变量,x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法,但从函数的角度来看,由于对应法则不同,它们是两个不同的函数,我们称它们互为反函数.

定义 1.2　设 $y=f(x)$是 x 的函数,其值域为 D,如果对于 D 中的每一个 y 值,都有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 x 值与之对应,则得到一个定义在 D 上的以 y 为自变量,x 为因变量的函数,我们称它为 $y=f(x)$的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$为**直接函数**.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 f 的反函数 f^{-1}必定存在,而且容易证明 f^{-1}也是 $f(D)$上的单调函数.

例如,函数 $y=x^5$,$x\in \mathbf{R}$ 是单调函数,所以它的反函数存在,其反函数为 $x=y^{\frac{1}{5}}$,$y\in \mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,于是 $y=x^5$,$x\in \mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y=x^{\frac{1}{5}}$,$x\in \mathbf{R}$.

一般地,$y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

把函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于

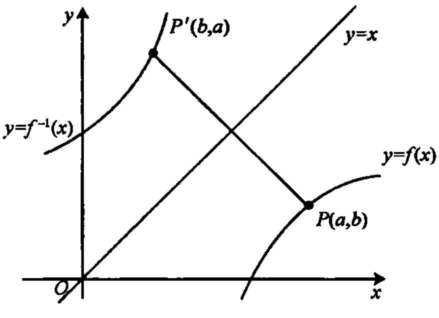

图 1.10

直线 $y=x$ 是对称的(图 1.10). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义，有 $a=f^{-1}(b)$，故 $P'(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $P'(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 因为 $P(a,b)$ 与 $P'(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，所以函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D'，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D'$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\cdot g$，即

$$(f\cdot g)=f[g(x)].$$

g 与 f 构成的复合函数 $f\cdot g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D' 内，即 $g(D)\subset D'$. 否则，不能构成复合函数.

例如，函数 $y=\arccos u$ 和函数 $u=3+2x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任意 $x\in R$，$u=3+2x^2$ 均不在 $y=\arccos u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

有时，也会遇到两个以上函数所构成的复合函数，只要它们顺次满足构成复合函数的条件，就可构成复合函数.

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算.

和(差)：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D$ 且 $g(x)\neq 0$.

在初等数学中已经学过下面几类函数.

幂函数：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**，例如

$$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x, y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 但 $y=x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}+\cdots$，和 $y=\begin{cases}2x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 3, & x<0\end{cases}$ 就不是初等函数.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1. 数列

定义 1.4 如果按照某一法则，使得对任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，则得到一列有次序的数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

这一列有次序的数就叫做数列，记为 $\{x_n\}$，其中第 n 项 x_n 叫做数列的一般项.

例如：

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1} \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots,$$

它们的一般项依次为 $\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{1}{2^n}, 2^n$.

数列 $\{x_n\}$ 可以看作自变量为正整数 n 的函数：

$$x_n = f(n),$$

它的定义域是全体正整数.

2. 数列的极限

定义 1.5 对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a，即 $|x_n-a|$ 无限接近于 0，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 如果数列没有极限，就说数列是发散的.

例如

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

而 $\{2^n\}$ 是发散的.

下面四个定理都是与收敛数列的性质有关的.

定理 1.1(极限的惟一性) 数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

定理 1.2(收敛数列的保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$(或 $x_n \leqslant 0$)，且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么 $a \geqslant 0$(或 $a \leqslant 0$).

最后介绍子数列的概念以及关于收敛的数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的**子数列**.

例如，数列 $\{x_n\}$：$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ 的一子数列为 $\{x_{2n}\}$：

$$-1, -1, -1, \cdots, (-1)^{2n+1}, \cdots.$$

下面介绍数列的有界性概念.

对于数列$\{x_n\}$,如果存在着正数M,使得对一切x_n都满足不等式

$$|x_n| \leqslant M,$$

则称数列$\{x_n\}$是有界的;如果这样的正数M不存在,就说数列$\{x_n\}$是无界的.

定理1.3(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理1.4(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

如数列$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$的两个子数列$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$收敛,但其极限不同,所以该数列发散.

1.2.2 函数的极限

1. 函数极限的定义

1) 自变量趋于有限值时函数的极限

定义1.6 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个领域内(可以不含x_0)有定义,如果当x无限接近于x_0,函数$f(x)$的值无限接近于常数A,则称**当x趋于x_0时,$f(x)$以A为极限**.记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

例1 $\lim\limits_{x \to x_0} c=c$,此处$c$为一常数.

因为无论自变量趋任何值,函数都取相同的值c,所以$\lim\limits_{x \to x_0} c=c$.

例2 $\lim\limits_{x \to x_0} x=x_0$.

这是因为当自变量x趋于x_0时,函数x也趋于x_0,所以$\lim\limits_{x \to x_0} x=x_0$.

定义1.7 设函数$y=f(x)$在点x_0的左侧某个领域内(可以不含x_0)有定义,若当$x<x_0$且趋于x_0时,$f(x)$无限接近于某常数A,则常数A叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的左极限,记为$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=A$或$f(x_0^-)=A$;

设函数$y=f(x)$在点x_0的右侧某个邻域内(可以不含x_0)有定义,若当$x>x_0$且趋于x_0时,$f(x)$无限接近于某常数A,则常数A叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限,记为$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$或$f(x_0^+)=A$.

关于函数极限与单侧极限有以下结论:

定理1.5 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=A$且$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=A$.

例3 函数$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+2, & x>0. \end{cases}$

当$x \to 0$时的极限不存在.

这是因为,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-}(x-2)=-2,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+}(x+2)=2,$$