本书由北京市优秀教学团队
——数学公共基础系列课程教学团队支持

高等数学

下册

◎ 田立平 鞠红梅 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 数 学

下 册

田立平　鞠红梅　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书分上、下两册出版。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等。各章都配有难度适当的典型习题，书末附有各章习题参考答案。下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。各章配有循序渐进、难度适当并且典型的习题，书末附有各章习题参考答案。

本书吸收了国内外教材的优点，在不影响本学科系统性、科学性的前提下，力求通俗简明而又重点突出，难点处理得当而又形象直观。本书可供理工类本科各专业使用，也可供高职、高专的师生参考。

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：牛新国　责任编辑：陈崇昱　版式设计：霍永明
责任校对：陈延翔　封面设计：赵颖喆　责任印制：乔　宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2011年3月第1版第1次印刷
169mm×239mm·26.25印张·517千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33187-2
定价：49.00元（上、下册）

前　言

为全面贯彻落实科学发展观，切实把高等教育重点放在提高教学质量上，教育部、财政部实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，北京市教育委员会响应教育部的号召，相应实施了“质量工程计划”，其中教材建设是教学质量工程的重要内容。在这样的背景下，“数学公共基础系列课程教学团队”作为北京市优秀教学团队，编写一套适合一般高等学校理工类各专业的便于教、学的基础数学教材是义不容辞的责任，也是团队成员多年来的心愿。在北京物资学院信息学院的关心以及机械工业出版社的大力支持下，我们组织有多年教学经验的老教师和富有朝气的青年教师，在团队长期集体备课教案以及学校精品课教案的基础上，编写了这部教材。该教材的内容框架是根据教育部数学与统计学教学指导委员会2007年制定的理工科类本科数学基础课程教学基本要求以及2009年教育部关于硕士研究生入学考试的要求，针对理工类各专业编写的。

《高等数学》内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学和无穷级数，分上、下两册出版。

本教材在内容处理上注意到理工类各专业以及一般高等学校生源的特点，在不影响本学科系统性、科学性的前提下，尽量使数学概念、理论与方法易于学生掌握，简化和略去了某些结论的冗繁推导或仅给出直观解释，力求做到通俗简明而又重点突出，条理清晰而又层次分明，难点处理得当而又形象直观；数学文化与数学建模思想在教学内容中不断渗透，编者多年来积累的教学经验和成果适时融入；例题和习题的选取不求多但求精典，与《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》相结合，在难度上遵循循序渐进的原则，力求突出习题的应用性与实用性，以培养学生分析问题、解决问题和运用数学知识的能力为宗旨。同时，考虑到学生综合素质的提高以及部分学生转专业的情况，我们在侧重于理工类专业背景的基础上，适当增加了一些数学在经济领域中应用的内容。

本书由田立平教授和鞠红梅副教授担任编著。在编写过程中得到了北京物资学院各级各部门的领导、老师以及数学教研室所有同仁的关心，特别是得到了数学教研室谢斌老师的大力帮助；同时，也得到机械工业出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！本书由北京市优秀教学团队——数学公共基础系列课程教学团队项目（项目编号:PHR200907230）支持。

由于编著者水平有限，加之时间比较仓促，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心恳求专家、学者和读者批评指正，以便能使本书在教学实践中不断改进和完善。

编著者

2010 年 10 月

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 法国数学家笛卡儿和费马均于17世纪上半叶对此做了开创性的工作. 代数学的优越性在于推理方法的程序化，鉴于这种优越性，人们产生了用代数方法研究几何问题的思想，这就是解析几何的基本思想. 要用代数方法研究几何问题，就必须通过坐标系建立数和点之间的关系，从而把数学研究的两个基本对象——数和形结合起来，使得人们既可以用代数的方法来解决几何问题，又可以用几何的方法来解决代数问题.

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量，一类如温度、距离、体积、质量等，这种只有大小没有方向的量称为**数量**(标量)；另一类如力、位移、速度等，它们不仅有大小而且有方向，这种既有大小又有方向的量称为**向量**(矢量).

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$(见图7-1)，有时用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

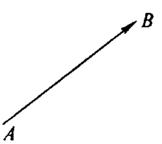

图 7-1

向量的大小称为向量的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$. 模等于1的向量称为**单位向量**. 模等于0的向量称为**零向量**，记作$\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且模相等，则称它们为**相等的向量**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 根据这个定义，一个向量和它经过平行移动所得的向量是相等的，这种向量称为**自由向量**. 以后如无特别说明，本书中所讨论的向量都是自由向量. 由于自由向量只考虑其大小和方向，因此，可以把一个向量自由平移，而使它的起点位置为任意点，这样，今后如果有必要，就可以把几个向量移到同一个起点.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看做是任意的，因此可以认为零向量与

任意向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应放在一条直线上. 因此，两向量平行，又称两向量**共线**.

类似地，还有向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(见图 7-2)，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**.

力学上有求合力的平行四边形法则，仿此，也有向量相加的**平行四边形法则**. 这就是当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC(见图 7-3)，显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

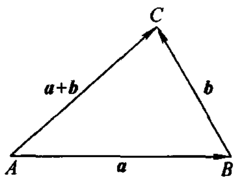

图 7-2

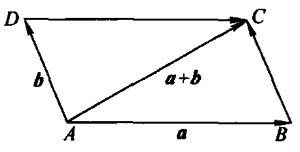

图 7-3

向量的加法符合下列运算规律：

1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定(三角形法则)，从图 7-3 可见

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以符合交换律. 又如图 7-4 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，所以符合结合律.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可以写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作

为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7-5 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

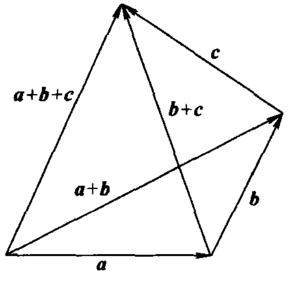

图 7-4

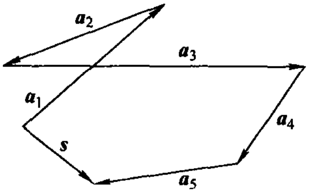

图 7-5

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差. （见图 7-6a）

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

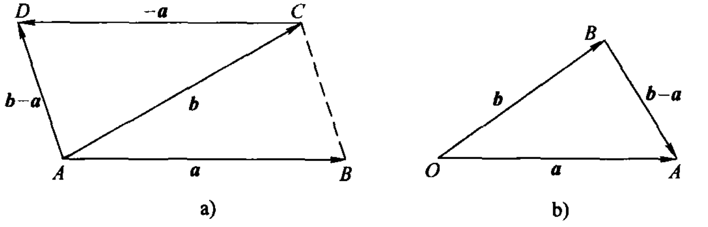

图 7-6

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（见图 7-6b）.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中，等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 数与向量的乘法

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，这时它的方向可以是任意的.

数与向量的乘积符合下列运算规律：

1）**结合律**：　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；（$\lambda,\mu$ 为任意实数）

这是因为由向量与数的乘积的规定可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|$.

2）**分配律**：

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$

解　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$

例 2　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(见图 7-7).

解　因为平行四边形的对角线相互平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

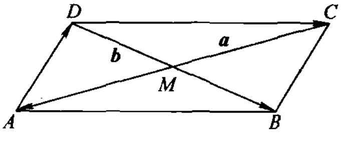

图 7-7

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的规定，由于 $|\boldsymbol{a}|>0$，所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同，即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|,$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同，因此，

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

我们规定，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 由此，上式又可以写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有：

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，λ 取负值，即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，\text{即}|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

定理 7.1 是建立数轴的理论依据. 给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴，由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一个数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox(见图 7-8)，对于轴上任何一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 7.1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫做轴上的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值)，并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应，于是

点 $P\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow$ 实数 x，从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

图 7-8

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点两两垂直的数轴，依次记为 x **轴**(横轴)、y **轴**(纵轴)、z **轴**(竖轴)，统称**坐标轴**. 它们构成一个空间直角坐标系(见图 7-9). 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合**右手规则**，即以右手握住 z 轴，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-10 所示.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做**第一卦限**，其

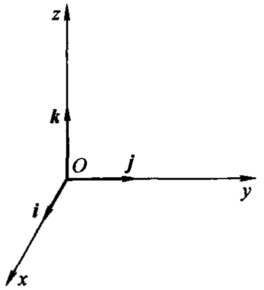

图 7-9

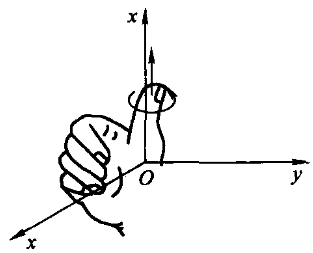

图 7-10

他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(见图 7-11).

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 M，使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体，如图 7-12 所示，有

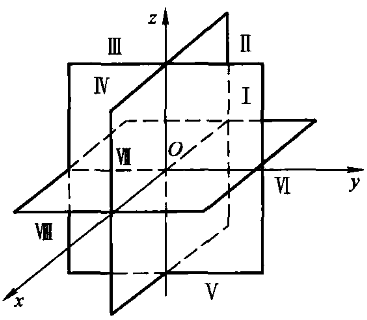

图 7-11

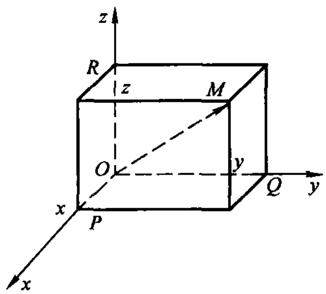

图 7-12

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{i}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$三个分向量，进而确定了 x、y、z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x、y、z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序实数 x、y、z 之间有一一对应关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z),$$

据此，定义：有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为点 M(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标，记作 $M(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向

径有相同的坐标．记号(x,y,z)既表示点M，又表示向量$\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征．例如：如果点M在yOz面上，则$x=0$；同样，在zOx面上的点，$y=0$；在xOy面上的点，$z=0$．如果点M在x轴上，则$y=z=0$；同样，在y轴上的点，有$z=x=0$；在z轴上的点，有$x=y=0$．如点M为原点，则$x=y=z=0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设
$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),$$
即
$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$
利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数乘法的结合律与分配律，有
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}(\lambda\text{ 为实数}),$$
即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).$$
由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算.

定理7.1指出，当向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时，向量$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$相当于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为
$$(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1).$$
这也就相当于向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$对应的坐标成比例：
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$
约定当分母为零时，分子也是零.

例3　求解以向量为未知元的线性方程组
$$\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases},$$
其中，$\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

解　如同解以实数为未知元的线性方程组一样，可解得
$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(7,-1,10),$$
$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=(11,-2,16).$$

例4　已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$以及实数$\lambda\neq-1$，在直线AB上求点M，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 7-13 所示，由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此
$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$的坐标(即点 A、点 B 的坐标)代入，即得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

这就是点 M 的坐标.

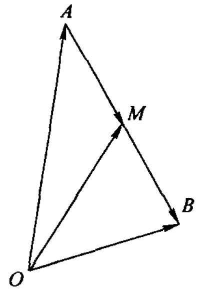

图 7-13

本例中的点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

通过本例，应该注意以下两点：1)由于点 M 与向量$\overrightarrow{OM}$有相同的坐标，因此，求点 M 的坐标，就是求$\overrightarrow{OM}$的坐标. 2)记号(x,y,z)既可表示点 M，又可表示向量$\overrightarrow{OM}$，在几何中点与向量是两个不同的概念，不可混淆. 因此，在看到记号(x,y,z)时，须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当(x,y,z)表示向量时，可对它进行运算；当(x,y,z)表示点时，就不能进行运算.

五、向量的模、方向角与投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 7-12 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得，

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}.$$

由
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

$$|OP|=x,\ |OQ|=y,\ |OR|=z,$$

于是得向量模的坐标表达式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 和点 B 间的距离$|AB|$就是向量$\overrightarrow{AB}$的模. 由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

即得两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 5　求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解　因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$$

所以 $|M_2M_3|=|M_1M_3|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 6　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即　$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号，解得

$$z=\frac{14}{9},$$

所以，所求的点为 $M\left(0,\ 0,\ \frac{14}{9}\right)$.

例 7　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\overrightarrow{AB^0}$.

解　因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2),$$

所以　$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

于是　$$\overrightarrow{AB^0}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

2. 方向角与方向余弦

先引进两向量的夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$（设 $\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**（见图 7-14），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角，不再赘述.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 从图 7-15 可见，设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)\neq\boldsymbol{0}$，由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

类似可知　$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

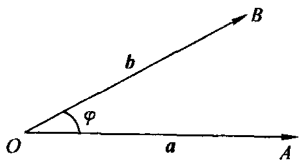

图 7-14

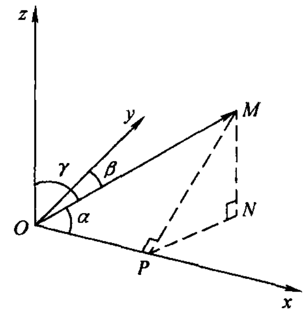

图 7-15

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

从而
$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)$$
$$=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r.$$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与同 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$，并由此得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 8 设两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2});$$
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 9 设 $|\boldsymbol{a}|=8$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角均为$\frac{\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式.

解 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，

则
$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{3}=4;$$
$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{3}=4;$$
$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

因为
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$