普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

概率论与数理统计

（第三版）

王松桂　张忠占　程维虎　高旅端 编

科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
北京高等教育精品教材

概率论与数理统计

(第 三 版)

王松桂　张忠占　程维虎　高旅端　编

本书第一版获“2002年全国普通高等学校优秀教材二等奖”

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是一本高等学校非数学专业的概率论与数理统计教材．全书共9章，内容包括随机事件、随机变量、随机向量、数字特征、极限定理、样本与统计量、参数估计、假设检验，回归分析与方差分析．各章后选配了适量习题，并在书后附有习题答案与选解．书末有 4 个附录．其中附录一给出了几个重要的分布表，附录二介绍了一些常见的重要概率分布，附录三汇集了近几年的硕士研究生入学统一考试试题及参考答案，附录四介绍了概率统计的各种应用．本书力求使用较少的数学知识，强调概率统计概念的阐释，并注意举例的多样性．

本书可作为高等学校工科、农医、经济、管理等专业的概率统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王松桂等编．—3版．—北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-032023-0

Ⅰ．①概… Ⅱ．①王… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 162173 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：张怡君
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年 9 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2006年 8 月第 二 版 印张：17 3/4
2011年12月第 三 版 字数：350 000
2011年12月第二十二次印刷

定价：28.00 元

第三版前言

本书自出版以来，受到了广大读者和同行的青睐，在第二版出版 5 年之际，总发行量已达 15 万册. 作为本书的作者，在欣喜之余也感到压力. 高兴自不必说，压力来自惟恐教材中哪点考虑不周而贻害广大读者. 客观地说，编写一本数学基础课教材并不容易. 本书之所以受到欢迎，一方面是有一个比较恰当的定位和多年的积累，另一方面也是由于不断吸收了同行的意见和建议.

在第二版的基础上，本版主要做了如下修订：(1) 针对在教学中碰到的问题对部分内容进行了修改，试图使学生更容易理解这些内容. 这些修改所涉及的多是相关内容的表述，不影响知识体系. (2) 在第 9 章中，简化了回归分析的内容，增加了方差分析的基本内容. (3) 更新了正文中的部分例题和习题. (4) 对于几个附录做了少许改动. 本版沿用了第二版的结构安排，没有对内容进行大规模的改动. 这既是考虑到使用的连续性，同时我们主观上希望本书作为基础课教材逐步走向成熟. 另外，近几年来我们课程组还努力围绕本书进行了一系列工作：编写了便于学生研习的教学辅导材料(《概率论与数理统计学习辅导》，杨爱军等编，科学出版社 2008 年出版) 和包含基本内容的电子课件等.

本书第三版的出版得到科学出版社一如既往的鼓励和支持，我们非常感谢自第一版出版以来出版社的所有编辑朋友们；也感谢全国各地多年来支持我们的广大同行，并希望能够继续得到对于本书的意见和建议.

作　者

2010 年 11 月于北京工业大学

第二版前言

本书第一版自 2000 年 9 月出版以来, 被许多高等院校选作教科书, 并荣获教育部“2002 年全国普通高等学校优秀教材二等奖”, 已重印七次. 另一方面, 近几年来, 高等教育的飞速发展为高等学校的教学提出了许多新的课题, 教育部近几年来非常重视本科教育质量的提高, 推出了一系列精品工程, 北京工业大学的公共基础课“概率论与数理统计”也于 2003 年被评为北京市精品课程, 这使得本书的影响面越来越大. 面对高等教育的发展, 面对精品课程和精品教材建设的要求, 面对广大同仁的鼓励, 我们感到压力. 虽然我们曾经努力争取在每一次重印时都有所改进, 但终究认为有必要把最近几年我们在教学过程中的尝试进行系统的总结, 使得本书能以更好的面貌呈现给读者. 于是, 在科学出版社的鼓励下, 就有了再版的想法.

如第一版前言所说, “概率论与数理统计”作为数学类基础课, 与应用的联系密切, 同时学生对于概念与理论的理解往往感到困难. 而目前由于高等教育向大众化的发展, 学生的学习需求趋向于多样化, 同时, 由于各方面的原因, 也很难预期增加课程的学时, 这给教师授课增加了难度. 面对这种复杂的局面, 我们在教学中进行了一些尝试. 目前呈现在大家面前的这一版, 就是在第一版的基础上, 通过总结最近几年教学的经验, 对原有内容进行进一步凝练、加工和增删而形成的. 与第一版比较, 内容的变动和我们的主要想法如下:

(1) 继续保持了第一版在三个方面的努力, 即精化论证、保持严谨, 详解概念、帮助领会, 举例多样、注重应用, 但在新版中我们进一步注意了学生对于内容及其叙述的可接受性, 从而为在基本内容上提高教学效果留下了空间. 我们对第一版中的一些推演进行了改进, 使之更为顺畅或简洁; 各章均调整和增加了部分例题, 以提高例题的代表性, 加强学生对相关知识应用的掌握; 精简了关于 n 维随机向量的内容, 尤其是后面涉及不多的 n 维离散型随机向量; 调整了前四章的习题及其答案, 使得习题与课程内容有更好的衔接; 同时, 我们进一步改进了一些思想和概念的讲解.

(2) 考虑到硕士研究生教育的快速发展以及本科生学习的多层次的需要, 我们汇集了近几年来硕士研究生招生考试中的概率统计试题, 并给出了参考答案, 形成了附录三, 一方面可以作为补充的课外练习, 同时也可以作为有志进一步学习的读者的参考.

(3) 我们在教学中了解到, 很多读者在学习的过程中, 希望更多了解这门学科在实际中的应用情况. 为此, 我们增加了附录四“概率论与数理统计应用漫谈”作为一个尝试, 选取若干有一定代表性的实例, 简略地介绍其中有关的概率统计的思想方法

以及相应的概率统计学的分支, 并给出了相应的参考书, 但不深入这些理论的具体细节. 一方面作为课堂内容的延伸, 可以提高读者对于概率统计课程的兴趣、增加对于概率统计应用的了解, 另一方面也可以作为读者面对实际问题查找概率统计工具的一个导引. 其中的内容基本独立于各章, 也不需要特殊的数学基础, 因而阅读的时间、空间不受限制. 我们希望读者能够在轻松愉快的阅读中领略到概率统计的无穷魅力和应用的广阔空间. 当然, 如果读者在学习课程前后各读一遍, 效果会更好.

我们还对附录二的部分内容进行了调整. 同时, 第二版也改正了原来的一些不妥之处, 不一一列举. 在此, 还想强调一点, 虽然书后附有习题和研究生入学试题的答案, 但希望读者一定要先进行独立的思考, 不要过早地翻看习题的答案. 这对于学习数学尤其重要.

第二版的更新和写作分工如下：第 1、2 章和附录二由程维虎执笔, 第 3、4 章和附录三由高旅端执笔, 第 6~8 章由王松桂执笔, 第 5、9 章和附录四由张忠占执笔, 并在集体讨论的基础上由张忠占定稿. 写作过程中吸收了北京工业大学概率统计学科部各位老师的经验, 同时也吸取了不少同行的意见和建议. 这次再版的工作得到了北京市精品教材建设项目的资助和北京市精品课程建设项目的支持, 同时, 北京工业大学和科学出版社也给予了很大的鼓励, 在此一并致以衷心感谢.

由于水平所限, 加之时间仓促, 不当之处在所难免, 敬请同行与广大读者不吝赐教. 联系地址：zzhang@bjut.edu.cn.

编　者

2004 年 8 月 10 日

第一版前言

本书是根据我们在北京工业大学和中国科学技术大学 20 余年来教学实践的基础上编写的, 其目的是作为高等学校理工、农医、经济、金融、管理等各专业有关概率论与数理统计课程的教材或实际工作者的参考书.

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支, 在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用, 特别近 20 年来, 随着计算机的迅速普及, 概率统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面的应用更是得到长足发展. 正是概率统计的这种广泛应用性, 使得它今天成为各类专业大学生的最重要的数学必修课之一. 概率统计有别于其他数学分支的重要一点在于, 初学者往往对一些重要的概率统计概念的实质的领会感到困难. 考虑到这个原因以及概率统计应用性很强的特点, 本书在取材与写作上, 在如下三个方面做了努力:

(1) 尽量使用较少的数学知识 (只限于微积分和少量矩阵代数知识), 避免过于数学化的论证, 但保持叙述的严谨性.

(2) 用较多的篇幅对基本概念, 特别是统计概念的理论或应用上的解释, 以便帮助读者正确领会概念的内涵.

(3) 考虑到概率统计应用的广泛性, 我们特别注意举例的多样性, 书中给出了工业、农业、工程、经济、管理、医药、商业、保险等领域的许多例子, 以便帮助读者从不同的侧面理解概念, 掌握方法.

全书共九章, 分两大部分. 第一部分由前五章组成, 讲授概率论的基础知识, 包括随机事件、随机变量及其分布和极限定理. 第二部分是后四章, 讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验和线性回归分析, 本书各章配有适量习题, 书后有习题提示和解答. 根据不同专业的需要, 适量选取部分内容, 本书可作为不同专业有关概率论与数理统计课程的教材.

本书的写作分工如下: 第 1、2 章由程维虎执笔, 第 3~5 章由高旅端执笔, 第 6~9 章由王松桂执笔, 最后全书由王松桂修改定稿. 贾忠贞仔细阅读了本书部分章节的初稿, 提出了许多宝贵意见.

本书的编写工作还得到了国家自然科学基金和北京市自然科学基金的资助, 编者借此机会一并致谢.

由于编者水平所限, 不当乃至谬误之处在所难免, 恳请国内同行及广大读者不吝赐教.

编　者

1999 年 10 月 1 日

目　　录

第三版前言
第二版前言
第一版前言
第 1 章　随机事件 …… 1
1.1　基本概念 …… 1
1.1.1　随机试验与事件 …… 1
1.1.2　事件的关系与运算 …… 3
1.2　事件的概率 …… 5
1.2.1　事件的频率 …… 6
1.2.2　事件的概率 …… 7
1.3　古典概率模型 …… 9
1.4　条件概率 …… 14
1.4.1　条件概率 …… 14
1.4.2　乘法公式 …… 16
1.4.3　全概率公式 …… 17
1.4.4　贝叶斯公式 …… 18
1.5　事件的独立性 …… 19
习题 1 …… 22
第 2 章　随机变量 …… 25
2.1　随机变量的定义 …… 25
2.2　离散型随机变量 …… 26
2.2.1　离散型随机变量的概率分布 …… 26
2.2.2　常见的离散型随机变量的概率分布 …… 28
2.3　连续型随机变量与随机变量的分布函数 …… 33
2.3.1　直方图 …… 33
2.3.2　概率密度函数 …… 35
2.3.3　常见的连续型随机变量的概率密度函数 …… 36
2.3.4　随机变量的分布函数 …… 40
2.4　随机变量函数的分布 …… 42
2.4.1　离散型随机变量函数的分布 …… 43
2.4.2　连续型随机变量函数的分布 …… 44

习题 2 ······ 48
第 3 章 随机向量 ······ 51
3.1 二维随机向量及其分布函数 ······ 51
3.2 二维离散型随机向量 ······ 52
3.3 二维连续型随机向量 ······ 55
3.3.1 二维连续型随机向量 ······ 55
3.3.2 均匀分布 ······ 56
3.3.3 二维正态分布 ······ 57
3.4 边缘分布 ······ 58
3.4.1 边缘分布函数 ······ 58
3.4.2 二维离散型随机向量的边缘概率分布 ······ 59
3.4.3 二维连续型随机向量的边缘概率密度 ······ 61
3.5 条件分布 ······ 63
3.5.1 条件分布的概念 ······ 63
3.5.2 离散型随机变量的条件概率分布 ······ 63
3.5.3 连续型随机变量的条件概率密度 ······ 65
3.6 随机变量的独立性 ······ 69
3.7 随机向量函数的分布 ······ 71
3.7.1 $Z = X + Y$ 的分布 ······ 71
3.7.2 $Z = \max\{X, Y\}$ 和 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布 ······ 73
3.8 n 维随机向量 ······ 75
3.8.1 定义和分布函数 ······ 75
3.8.2 n 维连续型随机向量 ······ 76
3.8.3 n 维随机向量函数的分布 ······ 77
习题 3 ······ 78
第 4 章 数字特征 ······ 82
4.1 期望 ······ 82
4.1.1 离散型随机变量的期望 ······ 82
4.1.2 连续型随机变量的期望 ······ 86
4.1.3 随机变量函数的期望 ······ 87
4.1.4 期望的性质 ······ 90
4.2 方差 ······ 92
4.2.1 定义 ······ 92
4.2.2 方差的性质 ······ 94
4.2.3 几种常用随机变量的方差 ······ 96
4.3 协方差与相关系数 ······ 98

4.3.1　协方差 ········ 99
4.3.2　相关系数 ········ 100
4.4　矩与协方差矩阵 ········ 102
4.4.1　矩 ········ 102
4.4.2　协方差矩阵 ········ 103
习题 4 ········ 103
第 5 章　极限定理 ········ 107
5.1　大数定律 ········ 107
5.1.1　切比雪夫不等式 ········ 107
5.1.2　大数定律 ········ 108
5.2　中心极限定理 ········ 110
习题 5 ········ 114
第 6 章　样本与统计量 ········ 115
6.1　总体与样本 ········ 115
6.2　统计量 ········ 118
6.3　正态总体的抽样分布 ········ 122
6.3.1　χ^2 分布 ········ 122
6.3.2　t 分布 ········ 124
6.3.3　F 分布 ········ 124
6.3.4　正态总体的样本均值与样本方差的分布 ········ 126
习题 6 ········ 127
第 7 章　参数估计 ········ 129
7.1　矩估计 ········ 129
7.2　极大似然估计 ········ 132
7.3　估计量的优良性准则 ········ 138
7.3.1　无偏性 ········ 138
7.3.2　均方误差准则 ········ 140
7.4　正态总体的区间估计 (一) ········ 141
7.5　正态总体的区间估计 (二) ········ 145
7.6　非正态总体的区间估计 ········ 147
7.6.1　二项分布 ········ 148
7.6.2　泊松分布 ········ 149
习题 7 ········ 150
第 8 章　假设检验 ········ 152
8.1　基本概念 ········ 152
8.2　正态总体均值的检验 ········ 155
8.2.1　单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验 ········ 155

8.2.2 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 均值的比较 ······ 157
8.2.3 成对数据的 t 检验 ······ 160
8.3 正态总体方差的检验 ······ 162
8.3.1 单个正态总体方差的 χ^2 检验 ······ 162
8.3.2 两个正态总体方差比的 F 检验 ······ 164
8.4 拟合优度检验 ······ 165
8.5 独立性检验 ······ 170
习题 8 ······ 173
第 9 章　回归分析与方差分析 ······ 175
9.1 一元线性回归模型 ······ 175
9.1.1 最小二乘估计 ······ 176
9.1.2 最小二乘估计的性质 ······ 179
9.1.3 回归方程的显著性检验 ······ 180
9.1.4 回归参数的区间估计 ······ 183
9.1.5 预测问题 ······ 184
9.2 方差分析 ······ 187
9.2.1 单因子试验的方差分析 ······ 187
9.2.2 两因子试验的方差分析 ······ 191
习题 9 ······ 195
习题答案与选解 ······ 198
参考文献 ······ 209
附录一　重要分布表 ······ 210
附录二　常见的重要分布 ······ 226
附录三　2006 年至 2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题 ······ 236
附录四　概率论与数理统计应用漫谈 ······ 247

第1章 随机事件

在人类社会的生产实践和科学实验中, 人们所观察到的现象大体上可分为两种类型. 一类是事前可以预知结果的, 即在某些确定的条件满足时, 某一确定的现象必然会发生, 或根据它过去的状态, 完全可以预知它将来的发展状态. 我们称这一类型的现象为确定性现象或必然现象. 例如, 在一个标准大气压下, 水在 100 ℃时一定沸腾; 两个同性的电荷一定互斥; 冬天过去, 春天就会到来, 等等. 还有另一类现象, 它是事前不能预知结果的, 即在相同的条件下重复进行试验时, 每次所得到的结果未必相同, 或即使知道它过去的状态, 也不能肯定它将来的发展状态. 我们称这一类型的现象为偶然性现象或随机现象. 如抛掷一枚质地均匀的硬币, 硬币落地后的结果可能是带币值的一面朝上, 也可能是另一面朝上, 并且在每次抛币之前, 不能预知其抛币后的结果肯定是什么; 又如, 某射击运动员用一支步枪在同一地点进行射击训练, 每次射击的成绩 (环数) 可能不同, 并且在每次射击之前, 均无法预知其射击后的成绩是多少, 等等.

虽然随机现象在一定的条件下, 可能出现这样或那样的结果, 且在每一次试验或观测之前不能预知这一次试验的确切结果，但人们经过长期的、反复的观察和实践, 逐渐发现了所谓结果的“不能预知”, 只是对一次或少数几次试验和观察而言的. 当在相同条件下进行大量重复试验和观测时, 试验的结果就会呈现出某种规律性. 例如, 多次抛掷均匀硬币时, 出现带币值的一面朝上的次数约占抛掷总次数的一半. 这种在大量重复性试验和观察时, 试验结果呈现出的规律性, 就是我们以后所讲的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学分支.

1.1 基本概念

1.1.1 随机试验与事件

为了叙述方便, 我们常把对某种现象的一次观察、测量或进行一次科学实验, 统称为一个试验. 如果这个试验在相同的条件下可以重复进行, 且每次试验的结果是事前不可预知的, 则称此试验为随机试验, 也简称为试验, 记为 E. 以后所提到的试验都是指随机试验.

进行一次试验, 要有一个观测目的. 试验中可能观测到多种不同的结果. 例如, 抛掷一枚质地均匀的硬币, 如果观测的目的只是看硬币落地后哪一面朝上, 这时, 可能观测到的结果有两种：带币值的一面朝上和另一面朝上, 至于硬币落在了什么位置、

落地前转了几圈等均不在观测目的之列, 当然也就不算在试验的结果之内.

下面是一些试验的例子.

E_1: 掷一颗骰子, 观察所掷的点数是几;

E_2: 工商管理部门抽查市场某些商品的质量, 检查商品是否合格;

E_3: 观察某城市某个月内交通事故发生的次数;

E_4: 已知某物体的长度在 a 和 b 之间, 测量其长度;

E_5: 对某型号电子产品做实验, 观察其使用寿命;

E_6: 对某型号电子产品做实验, 观察其使用寿命是否小于 200 小时.

对于随机试验, 尽管在每次试验之前不能预知其试验的结果, 但试验的所有可能结果组成的集合却是已知的. 我们称试验的所有可能结果组成的集合为样本空间, 记为 Ω. 样本空间的元素, 也就是随机试验的单个结果称为样本点.

在前面所举的 6 个试验中, 若以 Ω_i 表示试验 E_i 的样本空间, $i=1,2,\cdots,6$, 则

$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_2=\{$合格品, 不合格品$\}$;

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$;

$\Omega_4=\{\ell,\ a\leqslant\ell\leqslant b\}$;

$\Omega_5=\{t,\ t\geqslant 0\}$;

$\Omega_6=\{$寿命小于 200 小时, 寿命不小于 200 小时$\}$.

需要说明的是: 在 E_3 中, 虽然每个城市每个月内发生交通事故的次数是有限的, 不会非常大, 但一般说来, 人们理论上很难定出一个交通事故次数的有限上限. 为了方便, 我们把上限视为 ∞. 这样的处理方法在理论研究中经常被采用. 同样, 在 E_5 中我们也作了类似的处理.

我们把样本空间的任意一个子集称为一个随机事件, 简称事件, 常用大写字母 A, $B,C,\cdots$ 表示. 因此, 随机事件就是试验的若干个结果组成的集合. 特别地, 如果一个随机事件只含一个试验结果, 则称此事件为基本事件.

例 1.1.1　掷一颗骰子, 用 $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\},\cdots,A_6=\{6\}$ 分别表示所掷的结果为“一点”至“六点”, B 表示“偶数点”, C 表示“奇数点”, D 表示“四点或四点以上”. 若试验的目的是观察所掷的点数是几, 试写出样本空间; 指出 $A_1,A_2,\cdots,A_6$, B, C,D 事件中哪些是基本事件; 表示事件 B,C,D.

解　投掷后可能有 6 种不同的结果 $A_1,A_2,\cdots,A_6$, 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$; $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 都是基本事件; $B=\{2,4,6\}$, $C=\{1,3,5\}$, $D=\{4,5,6\}$.

例 1.1.2　观察某城市单位时间 (例如一个月) 内交通事故发生的次数, 若以 $A_i=\{i\}$ 表示“该城市单位时间内交通事故发生 i 次”, $i=0,1,2,\cdots$, 则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$, $A_i=\{i\}$ 是基本事件, $i=0,1,2,\cdots$. 若随机事件 B 表示“至少发生一次

交通事故”, 则 $B=\{1,2,\cdots\}$. 若随机事件 C 表示“发生交通事故不超过 5 次”, 则 $C=\{0,1,2,3,4,5\}$, 等等.

在试验中, 当事件 (集合) 中的一个样本点 (元素) 出现时, 称这一事件发生. 例如, 在例 1.1.1 中, 当投掷的结果为“四点”时, 事件 A_4,B,D 均发生.

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点, 且是 Ω 自身的一个子集, 在每次试验中它总是发生, 所以称 Ω 为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 它也是样本空间的一个子集, 且在每次试验中总不发生, 所以称 $\varnothing$ 为不可能事件.

1.1.2 事件的关系与运算

既然事件是一个集合, 因此有关事件间的关系、运算及运算规则也就按集合间的关系、运算及运算规则来处理. 根据“事件发生”的含义, 不难给出事件的关系与运算的含义.

设 Ω 是试验 E 的样本空间, A,B,C 及 $A_1,A_2,\cdots$ 都是事件, 即 Ω 的子集.

1. 若事件 A 发生必有事件 B 发生, 则称事件 A 包含于事件 B, 或事件 B 包含事件 A, 记为 $A\subset B$.

从“事件是样本空间的子集”的观点看, $A\subset B$ 表示集合 A 包含在集合 B 之中, 即 B 要比 A 大或一样大. 例如, 在例 1.1.1 中, $A_1=\{1\}\subset C=\{1,3,5\}$, $A_2=\{2\}\subset B=\{2,4,6\}$.

若 $A\subset B$, 且 $B\subset A$, 则称事件 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

2. 对两个事件 A 与 B, 定义一个新事件

$$C=\{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\},$$

称为事件 A 与 B 的和或并, 记为 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$.

从定义容易看出, 只要事件 A 与 B 中至少有一个发生, 事件 C 就发生. 因此, A 与 B 的和事件就是把 A 与 B 所包含的试验结果合并在一起. 例如, 在例 1.1.1 中, $A_1=\{1\}$, $C=\{1,3,5\}$, $D=\{4,5,6\}$, 则 $A_1\cup C=\{1,3,5\}$, $C\cup D=\{1,3,4,5,6\}$.

事件的和可以容易地推广到多个 (有限或可列无限) 事件的情形. 例如 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和 C, 记为$C=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, 定义为

$$\begin{aligned}C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i&=\{A_1\text{发生, 或}A_2\text{发生, }\cdots\text{, 或}A_n\text{发生}\}\\&=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{中至少一个发生}\}.\end{aligned}$$

对可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$, 可以类似地定义它们的和 C, 并记为

$$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{A_1,A_2,\cdots\text{中至少一个发生}\}.$$

在例 1.1.2 中, 观察某城市某月内交通事故发生的次数, 用 A_i 表示该月发生 i 次交通事故, 则 $A_i=\{i\}$, $i=0,1,2,\cdots$. 定义 $C_1=\{$该月发生交通事故不超过 10 次$\}$, 则

$$C_1=\bigcup_{i=0}^{10}A_i.$$

如果定义 $C_2=\{$该月发生交通事故 10 次或 10 次以上$\}$, 则

$$C_2=\bigcup_{i=10}^{\infty}A_i.$$

3. 对两个事件 A 与 B, 定义一个新事件

$$C=\{A与B都发生\},$$

称为事件 A 与 B 的积或交, 记为 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$.

从“事件是样本空间的子集”的观点看, $C=AB$ 就是集合 A 与 B 的公共部分. 在例 1.1.1 中, $A_1C=\{1\}$, $A_2B=\{2\}$, $CD=\{5\}$.

类似地, 我们也可以定义多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积, 根据事件个数的有限和无限分别定义为

$$C=\{A_1,A_2,\cdots,A_n都发生\}=\bigcap_{i=1}^{n}A_i,$$

$$C=\{A_1,A_2,\cdots都发生\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

特别地, 若 $AB=\varnothing$, 则称 A 与 B 为互斥事件, 简称 A 与 B 互斥, 这也就是说事件 A 与 B 不可能同时发生. 例如, 在例 1.1.1 中, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, 于是 $A_1A_2=\varnothing$. 所以, 事件 A_1 与 A_2 互斥. 又如, 对 $B=\{2,4,6\}$ 和 $C=\{1,3,5\}$, 也有 $BC=\varnothing$, 事件 B 与 C 也互斥.

4. 对两个事件 A 与 B, 定义一个新事件

$$C=\{A发生,\ B不发生\},$$

称为事件 A 与 B 的差, 记为 $C=A-B$.

直观上容易理解, $A-B$ 就是在事件 A 所包含的试验结果中除去事件 B 所包含的试验结果后所剩下的部分.

特别地, 称 $\Omega-A$ 为 A 的对立事件或 A 的补事件, 记为 $\overline{A}$. 显然, $\overline{A}=\{A不发生\}$, $A\cup\overline{A}=\Omega$, 并且 $\overline{A}$ 与 A 总是互斥的. 例如, 在例 1.1.1 中, $A_1=\{1\}$, 于是 $\overline{A}_1=\{2,3,4,5,6\}$, 而 $B=\{2,4,6\}$, 因而 $\overline{B}=\{1,3,5\}$.

在这里, 我们用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω, 矩形内的每个点表示一个样本点, 用两个小圆分别表示事件 A 和 B, 则事件的关系与运算可用图 1.1 来表示, 其中 $A\cup B, AB, A-B, \overline{A}$ 分别为图中阴影部分.

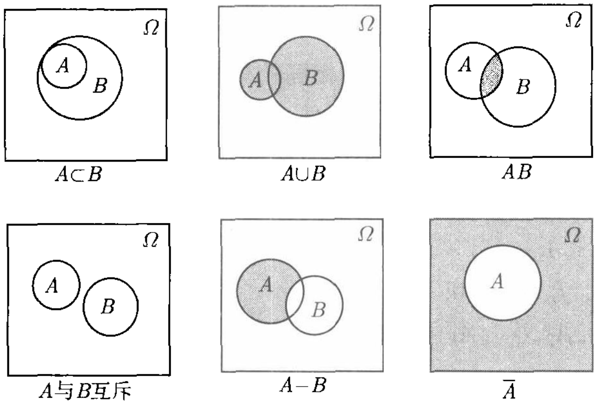

图 1.1 事件的关系与运算图

在进行事件的运算时, 经常要用到如下规则.

交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A(BC) = (AB)C$;

分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;

对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对于多个随机事件, 上述运算规则也成立. 例如,

$$A(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (AA_1) \cup (AA_2) \cup \cdots \cup (AA_n);$$
$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n};$$
$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \cdots\ \overline{A_n},$$

等等.

此外, 还应注意到 $A - B = A\overline{B}$, $A = (AB) \cup (A\overline{B})$ 等.

1.2 事件的概率

除必然事件和不可能事件外, 一个事件在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们常常需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性大小, 揭示出这些事件的内在的统计规律, 以便使我们能更好地认识客观事物. 例如, 知道了某食品在每段时间内变质的可能性大小, 就可以合理地制定该食品的保质期; 知道了河流在造坝地段最大洪峰达到某一高度的可能性大小, 就可以合理地确定造坝的高度等. 为了合理地刻画事件在一次试验中发生的可能性大小, 我们先引入频率的概念, 进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数字度量 —— 概率.

1.2.1　事件的频率

定义 1.2.1　设 A 是一个事件. 在相同的条件下, 进行 n 次试验, 在这 n 次试验中, 若事件 A 发生了 m 次, 则称 m 为事件 A 在 n 次试验中发生的频数或次数, 称 m 与 n 之比 m/n 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率, 记为 $f_n(A)$.

由定义, 不难发现频率具有如下性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥, 即对于 $i, j = 1, 2, \cdots, k, i \neq j, A_iA_j = \varnothing$, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率是它发生的次数与总试验次数之比, 其大小表示 A 发生的频繁程度. 频率越大, 事件 A 发生得越频繁, 这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因此, 直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 但这是否合理? 先看下面的例子.

例 1.2.1　考虑“抛硬币”试验. 历史上, 许多数学家都做过这一试验, 若规定均匀硬币的币值面向上为事件 A 发生, 有关数据如表 1.1.

表 1.1　抛硬币试验数据表

试验者	n	m	$f_n(A)$
D.Mogen	2048	1061	0.5181
C.D.Buffon	4040	2048	0.5069
K.Pearson	12000	5981	0.4984
K.Pearson	24000	12012	0.5005

从表 1.1 中不难发现: 事件 A 在 n 次试验中发生的频率 $f_n(A)$ 具有随机波动性, 且当 n 较小时, 随机波动的幅度较大; 当 n 较大时, 随机波动的幅度较小. 最后, 随着 n 的逐渐增大, $f_n(A)$ 逐渐稳定于固定值 0.5.

例 1.2.2　考虑某类种子发芽率试验. 从一大批种子中抽取 7 批种子做发芽试验, 其结果见表 1.2.

表 1.2　种子发芽率试验数据表

种子粒数	10	70	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	9	60	282	639	1339	1806	2715
发芽率	0.9	0.857	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

在本例中, 我们可将观察一粒种子是否发芽视为一次试验. 若种子发芽, 则记事