



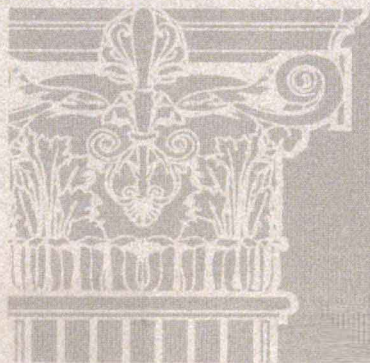
中国优秀博士论文

DOCTOR

— 工 学 —

# 非局部非对称弹性固体 理论与应用

宋彦琦 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位



中国优秀博士论文  
DOCTOR  
工学

# 非局部非对称弹性固体 理论与应用

宋彦琦 著



知识产权出版社  
全国百佳图书出版单位

## 内容提要

本书对非局部非对称弹性固体的若干理论、实验及应用等问题进行了力学系统的研究。全书共分为 11 章, 主要内容为 非局部非对称弹性固体理论及其变分原理、有限变形非对称弹性理论的变分原理、局部非对称弹性理论的实验研究、工字型钢梁自由振动非局部效应理论及数值模拟研究等。本书反映了作者博士及博士后研究期间在非局部非对称弹性固体理论与应用方面的一些研究成果。本书可作为高等院校力学专业的研究生教材, 也可供从事理论及工程方面的研究人员、工程技术人员等阅读并参考。

责任编辑: 荆成恭

责任出版: 卢运霞

## 图书在版编目 (CIP) 数据

非局部非对称弹性固体理论与应用/宋彦琦著. —北京:

知识产权出版社, 2010.12

(中国优秀博士论文)

ISBN 978-7-5130-0307-0

I. ①非… II. ①宋… III. ①工程力学: 弹性力学—研究 IV. ①TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 243781 号

中国优秀博士论文·工学

非局部非对称弹性固体理论与应用

宋彦琦 著

---

出版发行: 知识产权出版社

社 址: 北京市海淀区马甸南村 1 号

邮 编: 100088

网 址: <http://www.ipph.cn>

邮 箱: [bjb@cnipr.com](mailto:bjb@cnipr.com)

发行电话: 010-82000860 转 8101/8102

传 真: 010-82005070/82000893

责编电话: 010 82000860 转 8341

责编邮箱: [jingchengong@cnipr.com](mailto:jingchengong@cnipr.com)

印 刷: 北京中献拓方科技发展有限公司

经 销: 新华书店及相关销售网点

开 本: 880mm×1230mm 1/32

印 张: 8

版 次: 2011 年 3 月第 1 版

印 次: 2011 年 3 月第 1 次印刷

字 数: 180 千字

定 价: 28.00 元

ISBN 978-7-5130-0307-0/TB·001 (10327)

---

出版版权专有 侵权必究

如有印装质量问题, 本社负责调换。

# 前 言

随着工程中出现的问题以及科学的发展,弹性力学领域内出现了一系列不能通过传统理论解决的问题,随着科学技术的发展和生产实际的要求,这种局限性更加明显。现实生产中的许多问题,例如磁效应、裂纹尖端效应、电液晶的排列运动等非对称问题,都属于按古典连续统力学无法解释或不能解决的现象和问题。于是,广义连续统力学应运而生,并逐渐形成了广义连续统场论。广义连续统场论是突破经典连续统力学的基本假定,是在对古典连续统场论的改进和扩展的基础上建立和发展起来的。广义连续统场论包括极性连续统场论和非局部连续统场论,以及非局部极性连续统场论。本书主要讨论局部和非局部连续统场论的非对称问题。

非对称弹性理论包括局部非对称弹性理论和非局部非对称弹性理论。有关的非对称弹性理论的变分原理也相应地分为两类。本书分 11 章介绍非局部非对称弹性固体理论与应用研究的内容。第 1 章是非对称弹性固体理论及其变分原理的国内外研究现状;第 2 章研究了有限变形非对称弹性理论的变分原理;第 3 章研究了极性弹性理论的广义变分原理;第 4 章研究了非局部非对称弹性理论的广义变分原理;第 5 章研究了线性极性热力连续统场方程组的形式;第 6 章研究了局部非对称弹性理论的实验研究;第

7章介绍了非局部弹性理论与振动分析方法；第8章对工字型钢梁自由振动的非局部效应进行了理论分析；第9章是对工字型钢梁自由振动的非局部效应进行了数值分析；第10章是矩形截面梁的挠度理论及实例分析；第11章对矩形截面夹层梁振动问题进行了比较研究。

本书主要内容系本人博士和博士后期间的研究成果，作者衷心感谢导师陈至达教授、戴天民教授、谢和平院士、郑泉水教授的教诲。

对于给本书提出许多宝贵意见的同事、研究生，作者谨致谢意。特别是我的研究生刘玉丽硕士，以及其他许多研究生，他们孜孜不倦地努力为本书补充了新内容。

本书涉及到的研究工作得到国家重点基金研究发展计划(973)项目(No. 2010CB732002, No. 2007CB209402)和中央高校基本科研业务费项目(No. 2009QS01)的资助，在此表示感谢。

最后，对知识产权出版社对本书出版的支持，对协助本书稿整理工作的冯吉利副教授，研究生潘沈洁、徐爽、赵敏，以及本书责任编辑荆成恭同志的辛勤细心工作，致以谢意。

由于作者水平及写作时间仓促，书中难免存在缺点错误，恳请广大同行与读者批评指正。

宋彦琦

2010年6月



# 目 录

## 第 1 章 非对称弹性固体理论及其变分原理

- 1.1 非对称弹性理论的研究背景、目的和意义 ..... 3
- 1.2 非对称弹性理论国内外研究现状 ..... 6
  - 1.2.1 局部非对称弹性理论概述 ..... 8
  - 1.2.2 非局部非对称弹性理论概述 ..... 9
  - 1.2.3 变分原理的研究概述 ..... 11
- 1.3 非对称弹性固体变分原理的研究方法 ..... 13

## 第 2 章 有限变形非对称弹性理论的变分原理

- 2.1 有限变形力学的变分原理 ..... 19
  - 2.1.1 有限变形力学基本理论 ..... 20
  - 2.1.2 有限变形力学中变形体的能量定律 ..... 43
  - 2.1.3 有限变形力学的变分原理 ..... 46
  - 2.1.4 两类变分原理等价定理 ..... 53
- 2.2 非线性有限元分析 ..... 58
  - 2.2.1 增量变分方程 ..... 59
  - 2.2.2 有限变形增量有限元公式 ..... 61
- 2.3 本章小结 ..... 65

### 第3章 极性弹性理论的广义变分原理

3.1 微极弹性理论的广义变分原理 .....	69
3.1.1 现有的微极弹性理论的广义变分原理 .....	70
3.1.2 变积法推导微极弹性理论的广义变分原理 .....	71
3.2 微态弹性理论的广义变分原理 .....	79
3.3 本章小结 .....	81

### 第4章 非局部非对称弹性理论的广义变分原理

4.1 非局部弹性理论的广义变分原理 .....	86
4.1.1 非局部非对称弹性理论的基本方程 .....	86
4.1.2 非局部弹性理论的混合边界条件 .....	87
4.1.3 非局部弹性理论的广义变分原理 .....	88
4.2 非局部微极弹性理论的变分原理 .....	91
4.3 本章小结 .....	96

### 第5章 线性极性热力连续统场方程组的形式

5.1 非完整系物理标架下的不变性微分算子 .....	100
5.2 线性各向同性微极连续统的场方程组 .....	102
5.3 本章小结 .....	104

### 第6章 局部非对称弹性理论实验研究

6.1 测量大变形的实验内容和方法 .....	107
6.2 实验过程描述 .....	109
6.3 实验的技术路线及数据结果分析 .....	110
6.3.1 编制计算机程序的理论基础 .....	110

6.3.2	计算机程序概要说明 .....	113
6.3.3	实验的图形结果 .....	114
6.3.4	理论分析与实验结果比较 .....	115
6.4	本章小结 .....	117

## 第7章 非局部线弹性理论与振动分析方法

7.1	非局部线弹性理论发展现状概述 .....	121
7.2	非局部线弹性理论的场方程 .....	127
7.3	杆的非局部理论 .....	131
7.3.1	杆的非局部概念 .....	131
7.3.2	杆的非局部理论 .....	132
7.4	非局部理论在梁弯曲问题中的应用 .....	134
7.5	几种常用的连续系统振动的分析方法 .....	136
7.6	本章小结 .....	146

## 第8章 工字型钢梁自由振动非局部效应理论分析

8.1	Euler - Bernoulli 梁的偏微分运动方程 .....	150
8.2	Timoshenko 梁横向振动方程 .....	153
8.2.1	考虑转动惯量的梁的横向振动方程 .....	154
8.2.2	考虑剪切变形和转动惯量的梁的横向振动方程 .....	156
8.3	工字型钢筒支梁固有频率的非局部效应 .....	159
8.3.1	Euler - Bernoulli 自振频率分析 .....	159
8.3.2	Euler - Bernoulli 梁固有频率的非局部效应分析 .....	161
8.3.3	Timoshenko 梁固有频率计算 .....	165



8.3.4 Timoshenko 梁固有频率非局部效应影响 .....	169
8.4 本章小结 .....	173

## 第9章 工字型钢梁自由振动非局部效应数值分析

9.1 Timoshenko 梁对 Euler - Bernoulli 梁固有频率的修正 .....	177
9.2 Ansys 有限元模型 .....	183
9.3 工字钢梁自由振动频率数值模拟和理论计算结果 的对比分析 .....	186
9.4 本章小结 .....	197

## 第10章 矩形截面梁的挠度理论及实例分析

10.1 挠度曲线的微分方程 .....	201
10.2 剪切变形的效应 .....	202
10.3 受集中荷载 P 作用的悬臂梁的挠度 .....	204
10.4 夹层梁的挠度 .....	206
10.5 本章小结 .....	217

## 第11章 矩形截面夹层梁振动问题比较

11.1 分析程序简介 .....	221
11.2 振动频率实例分析 .....	222
11.3 本章小结 .....	227

参考文献 .....	228
------------	-----



## 第 1 章

# 非对称弹性固体理论及其 变分原理



## 1.1 非对称弹性理论的研究背景、 目的和意义

古典连续统力学在解决问题时常常具有局限性,随着科学技术的发展和生产实际的需要,这种局限性更加明显。现实生产中的许多问题,例如磁效应、裂纹尖端效应、电液晶的排列运动等非对称问题,都属于按古典连续统力学无法解释或不能解决的现象和问题。因此需要建立新的连续统模型和相应的新理论,以及解决问题的各种方法和手段,于是,广义连续统力学应运而生,并逐渐形成了广义连续统场论<sup>[1,2,3]</sup>。

古典连续统力学中采用的基本假定有:

1. 把物体看作是三个自由度的质点的集合;
2. 全部守恒定律对物体的任意微小部分都成立;
3. 物体任意点的状态只受该点的任意小邻域的影响。

第1个假定略去了物体的质点的极性性质,第2个假定排除了载荷对物体运动和状态变化的长程效应,而第3个假定则忽略了质点的长程交互作用。广义连续统场论是从突破经典连续统力学的三个基本假定着手对它进行全面的改进和发展的,是在对古典连续统场论的改进和扩展的基础上建立和发展起来的。广义连续统场论包括极性连续统场论和非局部连续统场论,以及非局部极性连续统场论。极性连续统场论的基础是保留经典连续统力学的第2和第3假定,并把第1假定改为每个质点可以看作是一个微小物体。如果只允许微小物体做刚性运动,则称这种理论为微



极连续统场论；如果还允许微小物体变形，则称为微态连续统场论。非局部连续统场论是在保留经典连续统力学的第 1 假定，并放弃第 2 和第 3 假定的基础上建立起来的。若放弃经典连续统力学的三个基本假定，则为非局部极性连续统场论。在此我们主要讨论局部和非局部连续统场论的非对称问题。

在求解弹性力学问题时，要求在物体的每个边界上都给定边界条件。而实际工程问题却往往仅仅知道物体所受的面力的合力，而这个面力的分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件，只能提出等效的近似边界条件。另外，解题时往往难于满足逐点给定的精确边界条件，因而也希望能找到一种边界条件的合理简化方案。

用不同方式施加同一荷载时，人们发现解答的差异只是在施加的荷载区域内是显著的，而且用不同方式施加荷载，其内部应力的差异是随着距离的增大而迅速减小的，因此对于任何一种施加荷载的方式而求得的解答，也可以应用于同一荷载的别种实现方式，而且足够精确，只是在紧邻荷载作用区的应力才有显著的差异。由于这种实际情况，1855 年圣维南在梁理论的研究中提出：“由作用在物体局部表面上的自平衡力系（即合力与合力矩为零的力系）所引起的应变，在远离作用区（距离远大于该局部作用区的线性尺寸）的地方可以忽略不计”。这就是著名的圣维南原理，又称局部影响原理。圣维南原理的另一种较实用的提法是：“若把作用在物体局部表面上的外力，用另一组与它静力等效（即合力与合力矩保持不变）的力系来代替，则这种等效处理对物体内部应力应变状态的影响将随远离该局部作用区的距离而迅速衰减。”有时，这个原理也被称为静力互等力系的弹性等效原理<sup>[4,5]</sup>。

毫无疑问,圣维南原理对于经典弹性力学起了不可估量的作用,且由此解决了一些重要的问题,使弹性力学得到了很大的发展。此原理的正确性已得到大量的实验证明。但随着工程中出现的以及科学的发展,弹性力学领域内出现了一系列新的问题,其中有些问题已不满足于通过圣维南原理而解决<sup>[6]</sup>,人们对一些局部和非局部的非对称性问题提出了一些新的看法和理论。特别是近三四十年来,人们对非对称弹性力学的发展给予了很大的关注。

从工程实用观点来看,在许多问题中非对称效应可忽略而不会引起大的误差,因此,圣维南原理对于处理弹性力学中一般问题取得了很好的结果。但在客观世界中,存在着大量的非对称应力的力学问题。例如,从材料力学最基本的圆柱体的压缩实验,就会发现其角点处的应力是非对称的。这类非对称应力对材料变形的强度产生了非常重要的作用,但人们对于这类问题,不管其应力变化如何,都笼统地用静力等效来代替并解决,这样就不能完全精确地求出整个物体内部的应力场。另外,相界面上动量矩不守恒、偶极子产生的机理、裂纹扩展的阻力偶、角点的非对称应力状态、旋错对强度的弱化作用、裂纹尖端区的应力状态等等,都涉及到非对称应力的概念,这些问题的解决有待于人们加强对非对称应力理论的研究和探讨。

变分原理是数学物理的重要组成部分,它为深刻地揭示自然界的基本规律和统一地描述各种形式的物理场提供了强有力的工具,也为在工程中求解各类实际问题提供了有效的方法。非线性连续统力学应用广泛,研究它的求解方法日益重要。求解方法的基础是变分原理,因此建立合理的变分原理是解决实际问题的理论基础<sup>[7,8,9,10,11,12]</sup>。

在经典连续统力学中都是通过实验测定有关的物质常数，像测定弹性力学中的弹性常数和流体力学中的粘性常数那样，这是正常情况。但在广义连续统场论中要用实验技术测定物质常数却是短期难以实现的目标<sup>[13]</sup>。

由于非局部弹性理论与原子晶格理论有着内在的联系，故可利用晶格动力学的结果通过参比确定非局部弹性常数，从而非局部弹性理论才有可能首先在波的传播问题上打开局面。过去 Eringen 等就是这样做的。近年来，汪越胜和王铎<sup>[14]</sup>将周期层状复合材料等效为非局部弹性介质模型研究了弹性波垂直于辅层方向传播的问题，其中等效的非局部弹性介质的弹性模量就是利用弥散关系匹配确定的。在测定极性连续统材料常数方面也有进展，但有很大局限。例如，可以通过重力实验测定偶应力参数，通过对液晶作均匀剪切和磁场取向实验确定物质常数等均属个别情况。王冲和陈至达<sup>[15,16,17]</sup>对材料断裂与损伤中的微转动效应进行了理论分析和实验验证，不但自身结果圆满，而且还为其它有关理论提供了依据。

## 1.2 非对称弹性理论国内外研究现状

对非对称弹性理论的研究由来已久。早在 1887 年，Voigt 就曾提出猜想：物体的一部分对其邻近部分的作用可能引起体力偶和面力偶，由此体力偶和面力偶引起应力的非对称性。接着，1893 年，P. Duhem 提出，对于固体的宏观性状来说，如果能用方向子向量表示的具有附加自由度的粒子的连续统模型来描述，

那就可能会更确切些。1907~1909年间,法国科学家 Cosserat 两兄弟成功地实现了 Voigt 和 Duhem 的猜想,提出了有向粒子连续统模型,后来大家称之为 Cosserat 连续统模型。在当时 Cosserat 的工作并没有引起人们的重视。

Cosserat 连续统理论几乎被埋没半个世纪。直到 1953 年, Guenther 和 Schaefer 讨论应力函数和位错理论时才逐渐认识到这些问题与 Cosserat 连续统有关。特别是在 1958 年 Erickson 和 Truesdell 给出杆和壳的精确理论及同年 Guenther 发表论 Cosserat 连续统静力学和运动学的论文后,引起了各国学者对 Cosserat 连续统的极大关注。稍后,由 Toupin、Mindlin and Tiersten、Eringen 等人进一步完善和修正了 Cosserat 理论,建立了一个不确定的偶应力理论。

高键<sup>[18]</sup>曾指出:“影响应力对称的因素有:外加体力矩、非局部体力剩余(简称非局部体力)、非局部体力矩剩余(简称非局部体力矩)”。因此我们可以分别从局部场和非局部场这两个角度来讨论应力的非对称性。

Atkinson<sup>[19,20]</sup>于 1980 年对 Eringen 按经典应力边界条件给出的裂纹混合边值问题的解的唯一性和存在性提出否定性证明。直到 1989 年王锐<sup>[21,22,23]</sup>给出协调自洽的非局部应力边界条件,才初步解决了 Atkinson 和 Eringen<sup>[24]</sup>关于裂纹非局部混合边值问题的争论。最近,黄再兴、樊蔚勋、黄维扬<sup>[25,26,27]</sup>又对应力边界条件提出看法。

虽然 Eringen<sup>[28]</sup>和 Künin<sup>[29]</sup>都曾指出非局部弹性理论中的应力可能是非对称的,但因无法解决,所以仍把应力对称条件强加于非局部弹性理论。高键首先在他的博士论文中<sup>[18]</sup>较为圆满地解决了这个悬而未决的问题,1990 年高键和戴天民<sup>[30]</sup>提出了具有



非局部体力矩的非局部弹性理论,接着高键等<sup>[31,32,33]</sup>发表了系列论文,为非局部场论作了更为系统的补充。本书将补充推导非局部弹性理论的有关变分原理。

### 1.2.1 局部非对称弹性理论概述

有体力矩的弹性理论<sup>[34,35,36,37]</sup>是一个有待深入研究的课题,它涉及到自然科学的很多领域。在物理上,它像磁力矩在磁场中每一点产生偏转效应一样,体力矩在变形体中每一点也产生偏转;在化学上,它涉及到分子的结构以及组合排列等等。非对称弹性力学出现的体矩作用与固体电磁场和应力的关系、血液流动中红白细胞的旋转运动、断裂尖端的位错力偶场等近代力学问题都有根本关系。

Kroener 在 1967 年曾提出在裂纹尖端有体力矩作用。裂纹尖端场的问题即属于大变形大转动的非对称问题,在裂纹的形成过程中包含有裂尖分支面的相对转动。要研究裂尖的应力场,微转动场分析占有重要地位,过去人们往往忽视了转动所引起的作用。王冲和陈至达<sup>[15,16,17]</sup>从实验中观察到裂纹尖端的局部转动场,研究了转动引起裂纹的扩展等现象。

如果只考虑外加体矩的作用,那么应力非对称的情形只针对局部场。

在建立动量矩定理时,可以得到公式<sup>[38]</sup>

$$\sigma^{i,j} - \sigma^{i,j,T} + \rho m^{i,j} = 0$$

当有体矩  $m$  存在时,应力张量是非对称的,即

$$\sigma^{i,j} \neq \sigma^{i,j,T}$$

当  $m \equiv 0$  时,应力张量是对称的,即

$$\sigma^{i,j} = \sigma^{i,j,T}$$