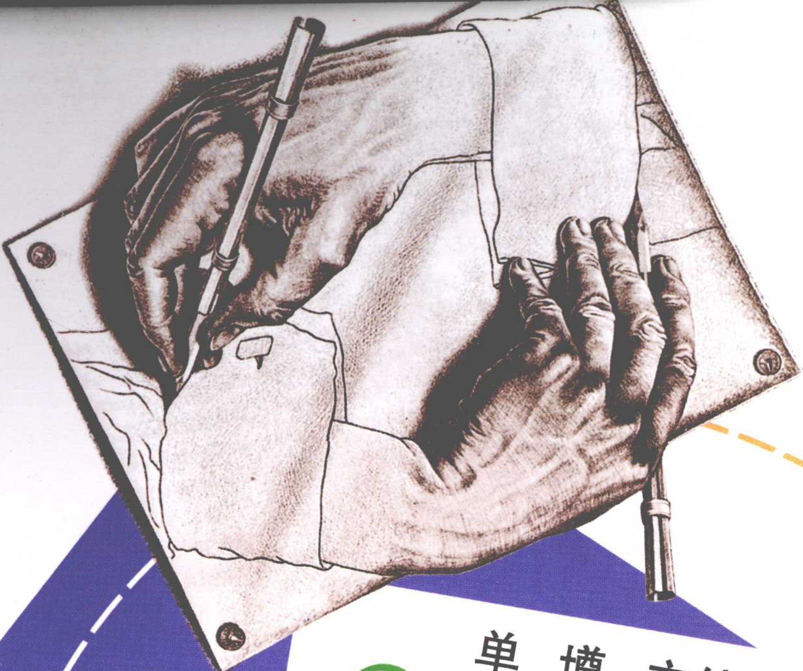


单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

三角函数·复数

杨德胜 著

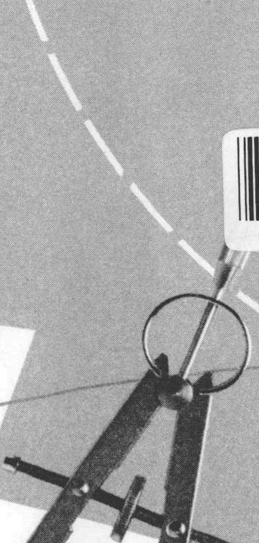
上海科技教育出版社

单墫 主编

数学奥林匹克命题人讲座

三角函数·复数

杨德胜 著



上海科技教育出版社

责任编辑：卢　源
封面设计：童郁喜

数学奥林匹克命题人讲座

三角函数·复数

单　墫　主编

杨德胜　著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行

（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）

www.ewen.cc　www.sste.com

全国新华书店经销　上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240　1/32　印张 10.875　字数 282 000

2010 年 12 月第 1 版　2010 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5428-5110-9/O·698

定价：25.00 元

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1980 年)问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的作者与书名初定如下：

黄利兵	陆洪文	《解析几何》
王伟叶	熊　斌	《函数迭代与函数方程》
陈　计	季潮丞	《代数不等式》
田廷彦		《圆》
冯志刚		《初等数论》
单　墫		《集合与对应》《数列与数学归纳法》
刘培杰	张永芹	《组合问题》
任　韩		《图论》
田廷彦		《组合几何》

唐立华　　　　　《向量与立体几何》

杨德胜　　　　　《三角函数·复数》

显然，作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生是博士生导师，不仅在代数数论等领域的研究上取得了卓越的成绩，而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式，是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是2008年IMO中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献，培养了很多的人才。2008年9月14日，“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立，担任这个研究中心主任的正是多届IMO中国国家队领队、华东师范大学数学系教授熊斌。

这些作者有一个共同的特点：他们都为数学竞赛命过题。

命题人写书，富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新，是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学到很多新的知识，产生很多新的想法。

新，会不会造成深、难呢？

这套书当然会有一定的深度，一定的难度。但作者是命题人，充分了解问题的背景（如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景），写来能够深入浅出，“百炼钢化为绕指柔”。另一方面，倘若一本书十分浮浅，一点难度没有，那也就失去了阅读的价值。

读书，难免遇到困难。遇到困难，不能放弃。要顶得住，坚持下去，锲而不舍。这样，你不但读懂了一本好书，而且也学会了读书，享受到读书的乐趣。

书的作者，当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏，富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中，能够想到一些新的问题或新的解法，能够发现书中的不足或改进书中的结果，那就是古人所说的“读书得间”，值得祝贺！

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社，特别是编辑卢源先生，策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关，使书中的错误减至最少，又在书中设置了一些栏目，使这套书增色很多。

单　墫

2008年10月

目　录

第一部分　三角函数

第一讲　三角恒等式(一) / 1

§1.1　任意角的三角比 / 1

§1.2　诱导公式及同角三角函数的关系 / 12

第二讲　三角恒等式(二) / 25

§2.1　两角和与差的正弦、余弦与正切 / 25

§2.2　倍角、半角、和差化积与积化和差 / 36

第三讲　三角函数的图像与性质 / 52

第四讲　反三角函数与三角方程 / 81

§4.1　反三角函数 / 81

§4.2　三角方程 / 94

第五讲　解三角形 / 103

§5.1　解三角形 / 103

§5.2　面积法 / 122

第六讲　三角代换与三角不等式 / 129

§6.1　三角代换 / 129

§6.2　三角不等式 / 139

第二部分　　复数

第七讲　复数的概念 / 161

第八讲　复数的运算 / 180

第九讲　复数与三角 / 192

第十讲　复数与方程 / 213

参考答案及提示 / 241

第一部分 三角函数

第一讲 三角恒等式（一）

§1.1 任意角的三角比

知识桥

一、任意角及其度量

1. 正角、负角和零角

如图 1.1 所示，一条射线绕端点按逆时针方向旋转形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转形成的角叫做负角. 特别地，当一条射线没有旋转时，我们也认为形成了一个角，这个角叫做零角.

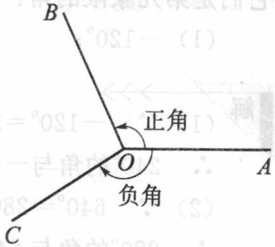


图 1.1

2. 终边相同的角

从角的形成过程可以看到，与某一个角 α 的始边相同且终边重合的角有无数个，它们的大小与角 α 都相差 360° 的整数倍. 我们把所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，构成一个集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

3. 象限角

角的顶点合于坐标原点，角的始边合于 x 轴的正半轴，角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角.用集合形式表示的象限角如下：

第一象限的角表示为$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°,(k\in\mathbf{Z})\}$；

第二象限的角表示为$\{\alpha|90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°,(k\in\mathbf{Z})\}$；

第三象限的角表示为$\{\alpha|180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°,(k\in\mathbf{Z})\}$；

第四象限的角表示为$\{\alpha|270°+k\cdot 360°<\alpha<360°+k\cdot 360°,(k\in\mathbf{Z})\}$.

4. 轴线角

当角的终边在坐标轴上时，就认为这些角不属于任何象限.

终边在 y 轴正半轴上的角可以表示为：$\theta=90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$；

终边在 y 轴负半轴上的角可以表示为：$\theta=270°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$；

终边在 y 轴上的角的集合可以表示为：$\{\theta|\theta=90°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在 x 轴正半轴上的角可以表示为：$\theta=0°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$；

终边在 x 轴负半轴上的角可以表示为：$\theta=180°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}$；

终边在 x 轴上的角的集合可以表示为：$\{\theta|\theta=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

训练营

例 1 在 0°到 360°范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限的角：

(1) $-120°$；　　(2) $640°$；　　(3) $-950°12'$.

解

(1) ∵ $-120°=240°+(-360°)$,

∴ 240°的角与$-120°$的角终边相同，它是第三象限角.

(2) ∵ $640°=280°+360°$,

∴ 280°的角与 640°的角终边相同，它是第四象限角.

(3) ∵ $-950°12'=129°48'+(-3\times 360°)$,

∴ $129°48'$的角与$-950°12'$的角终边相同，它是第三象限角.

例 2 写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中在$-360°\sim 720°$间的角写出来：

(1) $60°$； (2) $-21°$； (3) $363°14'$.

解 (1) $S=\{\beta|\beta=60°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

S 中在 $-360°\sim720°$ 间的角是：

$$60°-1\times360°=-300°,$$
$$60°+0\times360°=60°,$$
$$60°+1\times360°=420°.$$

(2) $S=\{\beta|\beta=-21°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

S 中在 $-360°\sim720°$ 间的角是：

$$-21°+0\times360°=-21°,$$
$$-21°+1\times360°=339°,$$
$$-21°+2\times360°=699°.$$

(3) $S=\{\beta|\beta=363°14'+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

S 中在 $-360°\sim720°$ 间的角是：

$$363°14'-2\times360°=-356°46',$$
$$363°14'-1\times360°=3°14',$$
$$363°14'+0\times360°=363°14'.$$

例 3 写出角的终边在图 1.2 中阴影区域内的角的集合(不包括边界).

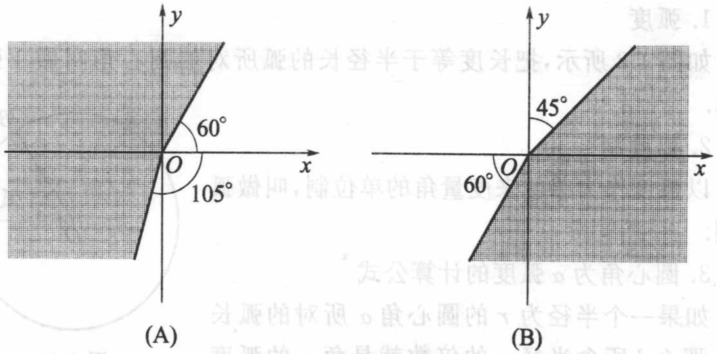


图 1.2

解 对(A)：$\{\alpha|60°+k\cdot360°<\alpha<255°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,

对(B):$\{\alpha \mid -120^\circ + k\cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

例 4 已知 α 是第二象限角,问:$\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角? 2α 是第几象限角?

解 ∵ α 在第二象限, ∴ $90^\circ + k\cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

于是,$45^\circ + k\cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

当 $k=2n$ 时,$45^\circ + n\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + n\cdot 360^\circ$,$\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限;

当 $k=2n+1$ 时,$225^\circ + n\cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < 270^\circ + n\cdot 360^\circ$,$\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限.

∴ 当 α 在第二象限时,$\frac{\alpha}{2}$ 可能在第一象限,也可能在第三象限.

同理,$180^\circ + k\cdot 720^\circ < 2\alpha < 360^\circ + k\cdot 720^\circ, k\in \mathbf{Z}$.

∴ 当 α 在第二象限时,2α 可能在第三象限,也可能在第四象限.

知识桥

二、弧度制

1. 弧度

如图 1.3 所示,把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

2. 弧度制

以弧度作为单位来度量角的单位制,叫做弧度制.

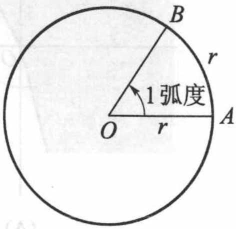


图 1.3

3. 圆心角为 α 弧度的计算公式

如果一个半径为 r 的圆心角 α 所对的弧长为 l,那么 l 所含半径 r 的倍数就是角 α 的弧度数,即

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

4. 角度制与弧度制的换算

用角度制度量周角为 $360°$,用弧度制度量周角为 2π 弧度,所以角度制与弧度制的换算公式为:

$$360°=2\pi \text{ 弧度};$$

$$180°=\pi \text{ 弧度};$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.017\,45 \text{ 弧度};$$

$$1 \text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.3°=57°18'.$$

由于弧度数是弧长与半径长的比值,所以它是一个实数.因此,用弧度制表示角的大小时,通常省略“弧度”两字.

因为需要不同,所以角的度量不是单用角度制,还要用弧度制.比如学习三角函数,需要画出它的图像,采用角度制会产生很大不便.引进弧度制后,角的集合与实数集合建立了一一对应的关系,如图 1.4 所示.

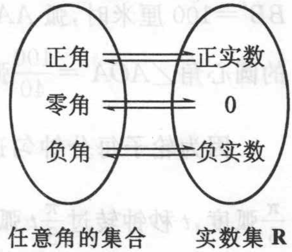


图 1.4

下面是一些特殊角的度数与弧度的对应表.

角度	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$	$120°$	$135°$
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
角度	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
弧度	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

5. 扇形的弧长及面积公式

如图 1.5 所示,扇形圆心角的弧度数为 α $(0<\alpha<2\pi)$,半径为 r,弧长为 l,面积为 S.则

$$l=\alpha r;$$

$$S=\frac{1}{2}\alpha r^2;$$

$$S=\frac{1}{2}lr.$$

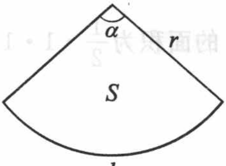


图 1.5

训练营

例5 绳索绕在半径为40厘米的轮圈上，绳索的下端B处悬挂着物体W(见图1.6). 如果轮子按逆时针方向每分钟匀速旋转6圈，那么需要几秒才能把物体W的位置向上提升100厘米？

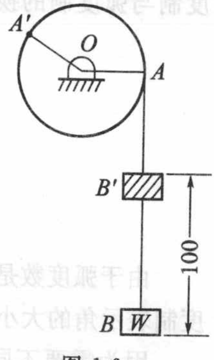


图 1.6

解 轮子按逆时针方向旋转时，点A转过的弧AA'的长等于点B上升到点B'的距离. 于是当$BB'=100$厘米时，弧$AA'=100$厘米，弧AA'所对的圆心角$\angle AOA'=\frac{100}{40}$弧度.

因为轮子每分钟匀速旋转6圈，所以每秒匀速转过$\frac{6\times 2\pi}{60}$弧度$=\frac{\pi}{5}$弧度，t秒钟转过$\frac{\pi}{5}t$弧度. $\frac{\pi}{5}t=\frac{100}{40}\Rightarrow t=\frac{25}{2\pi}\approx 4$(秒).

所以，需要约4秒才能把物体W的位置向上提升100厘米.

例6 如图1.7，弓形ABC所在圆的半径为1. 如果弓形的弧ACB的长为x，弓形的面积为y，试写出y关于x的函数关系式.

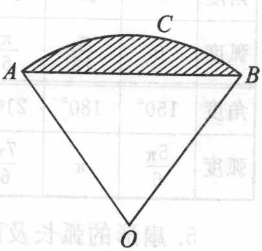


图 1.7

解 扇形OAB的面积为$\frac{1}{2}\cdot x\cdot 1=\frac{x}{2}$，又由公式$\alpha=\frac{l}{r}$，可得$\angle AOB=x$(弧度)，故$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x=\frac{1}{2}\sin x$，所以

$$y=\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}(0<x<\pi).$$

知识桥

三、任意角的三角比

如图 1.8 所示，把 Rt$\triangle POQ$ 放到直角坐标系 xOy 中，设 $P(x,y)$，则 $OQ=x$，$QP=y$，$|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ $(r>0)$. 从 x,y,r 中任意取两个作比值，共有 6 个.

α 的三角比可以写成：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z};$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y},\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z};$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y},\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

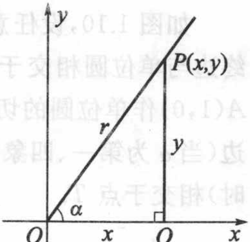


图 1.8

6 种三角比在各个象限的符号如下表所示：

角 α 属于的象限	点 P 的坐标		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
	x	y						
第一象限	+	+	+	+	+	+	+	+
第二象限	−	+	+	−	−	−	−	+
第三象限	−	−	−	−	+	+	−	−
第四象限	+	−	−	+	−	−	+	−

四、用单位圆中线段来表示三角比

1. 有向线段

坐标轴是规定了方向的直线. 一条在坐标轴上或与坐标轴平行的

线段也可以规定两种相反的方向. 如图 1.9，x 轴上的线段 MN，可以规定从点 M 到点 N 或从点 N 到点 M 两种相反的方向，这样的线段是有方向的，分别记为有向线段 MN 和有向线段 NM. 与 y 轴平行的线段 PQ，也可类似规定两种相反的方向. 如果这样的线段的方向与坐标轴的正方向一致，就规定这条线段是正的，否则，就规定它是负的.

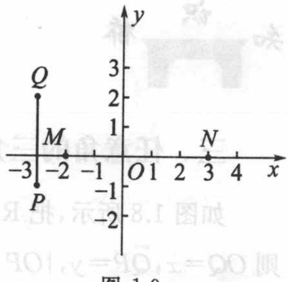


图 1.9

2. 三角函数线

如图 1.10，设任意角 α 的顶点为 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$. 过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；过 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，这条切线必然平行于 y 轴，设它与角 α 的终边(当 α 为第一、四象限角时)或其反向延长线(当 α 为第二、三象限角时)相交于点 T.

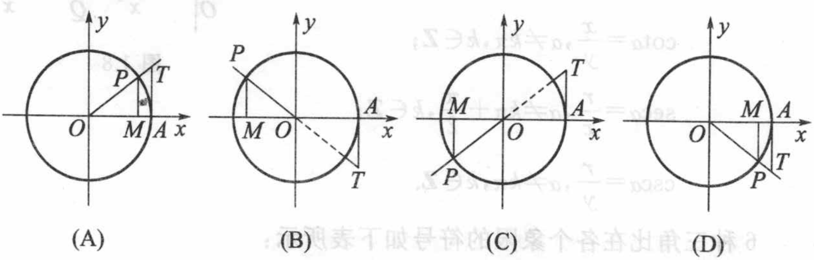


图 1.10

显然，线段 $OM=x$，线段 $MP=y$.

于是，根据正弦、余弦函数的定义有

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=y=MP,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=x=OM.$$

这两条与单位圆有关的有向线段 MP，OM 分别叫做角 α 的**正弦线**、**余弦线**.

类似地，我们把 AT 看作有向线段，根据正切函数的定义和相似三角形的知识，就有

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=AT.$$

有向线段 AT 叫做角 α 的**正切线**，AT 在 x 轴上方为正，在 x 轴下方为负.

当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线分别变成一个点；当角 α 的终边在 y 轴上时，余弦线变成一个点，正切线不存在.

我们把这三条与单位圆有关的线段 MP、OM、AT 通称为角 α 的三角函数线.

训练营

例 7 如果角 α 终边上一点为 $P(-3m,4m)$，$m\neq0$，求角 α 的 6 个三角比.

解 (1) 当 $m>0$ 时，因为 $x=-3m$，$y=4m$，

所以 $r=\sqrt{(-3m)^2+(4m)^2}=5|m|=5m$，于是

$$\sin\alpha=\frac{4m}{5m}=\frac{4}{5};\ \cos\alpha=\frac{-3m}{5m}=-\frac{3}{5};\ \tan\alpha=\frac{4m}{-3m}=-\frac{4}{3};$$

$$\cot\alpha=\frac{-3m}{4m}=-\frac{3}{4};\ \sec\alpha=\frac{5m}{-3m}=-\frac{5}{3};\ \csc\alpha=\frac{5m}{4m}=\frac{5}{4}.$$

(2) 当 $m<0$ 时，得 $r=5|m|=-5m$，于是

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5};\ \cos\alpha=\frac{3}{5};\ \tan\alpha=-\frac{4}{3};$$

$$\cot\alpha=-\frac{3}{4};\ \sec\alpha=\frac{5}{3};\ \csc\alpha=-\frac{5}{4}.$$

点评 本例中，点 P 坐标含有参数 m，而又必须满足 $r>0$，因此要对 m 分类讨论，防止漏掉 $m<0$ 的情况. 进一步讨论可知：当 $m>0$ 时，角 α 是第二象限的角；当 $m<0$ 时，角 α 是第四象限的角，三角比的符号相应地出现两种情况.