大学数学系列教材

概率论与数理统计

学习指导书

主　编 刘龙章
副主编 段五朵　朱旭生
熊小峰

江西高校出版社

XIZHIDAOSHU

概率论与数理统计
学习指导书

主　编　刘龙章
副主编　段五朵　朱旭生
　　　　熊小峰

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导书/刘龙章主编 —南昌:江西高校出版社,2003.8

ISBN 7-81075-489-0

Ⅰ.概… Ⅱ.刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第039423号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道96号)

邮编:330046 电话:(0791)8592235,8504319

各地新华书店经销

江西恒达科贸有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

2003年第8月第1版 2004年1月第2次印刷

850mm×1168mm 1/32 6.75印张 182千字

印数:8001~16000册

定价:11.00元

前　言

《概率论与数理统计》是高等学校理工科、经济学有关专业的一门重要基础课，也是工学、经济学硕士研究生数学入学考试中必考的内容；它在科学技术和人类实践活动中有着十分广泛的应用，并正在发挥越来越大的作用和影响，从而越来越引起大家的重视。

本书是按照教育部“关于概率论与数理统计课程教学基本要求”和“全国工学、经济学硕士研究生数学入学考试大纲”编写而成，它包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及其分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等内容，通过对 190 道典型题进行分析和求解，揭示了概率论与数理统计的解题方法和技巧。每章末尾各有一份目标测试题，作为自我检查用。全书选题力求题型全面，内容分布广泛，相当一部分例题选自全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学试题，并在每道试题前面注明了试题的年份及类别。题目具有一定的典型性和启发性，对解题能力和综合素质的培养将会起到很好的作用。

全书共分九章，其中第一、二、三章由戴立辉编写，第四、五章由刘龙章编写，第六、九章由刘南根编写，第七、八章由乐励华编写，由刘龙章、戴立辉对全书进行统稿。

本书是高等工科院校学生学习《概率论与数理统计》课程的复习指导书，可作为报考工学、经济学硕士研究生考生的复习参考书，也可供大专院校数学教师及其他有关人员作参考。

由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正，以便修改。

编　者

2003 年 5 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

内容提要

●随机事件、频率与概率

随机试验:可以在相同的条件下重复进行,试验的可能结果不止一个,但事先已知试验的所有可能结果;每次试验前总是恰好出现所有可能结果中的一个,但究竟出现哪一个结果试验前不能确切预言.

样本空间:随机试验中每一可能的结果称为一个样本点(或基本事件),样本点的全体组成的集合称为随机试验的样本空间,用 Ω 表示,Ω 中的元素,即样本点,用 ω 表示,记为 $\Omega = \{\omega\}$.

随机事件:样本空间 Ω 的某个子集称为随机试验的随机事件,Ω 为必然事件,空集 Φ 为不可能事件.

事件的关系与运算:

包含　$A \subset B$,称事件 B 包含事件 A,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

相等　$A \subset B$ 且 $B \subset A$,称事件 A 与事件 B 相等.

和(并)　$A \cup B$,表示两事件 A 与 B 至少有一个发生;$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生;$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生.

积(交)　$A \cap B$,也记作 AB,表示事件 A 和 B 同时发生;$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生,$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

互不相容(互斥)　指 $AB = \Phi$,即事件 A 与 B 不能在一次试验中同时发生;若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的任意两个事件不能同时发生,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容.

互为对立(互逆)　若 $A \cup B = \Omega$,且 $AB = \Phi$,则 A 与 B 两事件互逆.有 $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \Phi$.

交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

分配律　$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC), A \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_k (AB_k)$;

$A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cup (\bigcap_k B_k) = \bigcap_k (A \cup B_k)$;

对偶律　$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k, \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A}_k$.

频率:在 N 次重复试验中,事件 A 发生的次数 n 称为 A 的频数,比值 $\frac{n}{N}$ 称为事件 A 的频率,记为 $F_N(A) = \frac{n}{N}$.

统计概率:当 N 很大时,事件 A 发生的频率 $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 稳定在某一常数 p 的附近摆动,则该常数 p 为事件 A 的统计概率,记为 $P(A) = p$.

古典概率:若试验的样本点为有限个,且每个样本点出现的可能性相同,则试验对应古典概型(等可能概型),事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 包含的样本点的个数}}{\text{样本点总数}}.$$

几何概率:将事件 A 与样本空间 Ω 用几何量的测度 $\mu(A)$ 与 $\mu(\Omega)$(长度,面积或体积)定义的概率 $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

概率的公理化定义:若 Ω 是试验 E 的样本空间,对于 E 的每一事件 A 对应着一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的概率.函数 $P(*)$ 具有:

非负性　对任一事件 A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

规范性　$P(\Omega) = 1$;

可列可加性　对互不相容的事件 $A_k (k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$,有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

概率的运算性质:

性质 1　$P(\Phi) = 0$.

性质 2　有限可加性成立,即对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

性质 3　对于事件 A 和 B,如果 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性质 4　对于任意两事件 A,B,有加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5　对于任意两事件 A,B,有减法公式

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

性质 6　对任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 7　对任意三个事件 A_1,A_2,A_3,有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

● 条件概率及有关公式

条件概率:在事件 B 已经发生的条件下,事件 A 发生的概率,称为事件 A 在给定条件 B 下的条件概率,记作 $P(A\mid B)$.

若 $P(B)>0$,则 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

也可以在缩减的样本空间(B 发生的样本空间)中求事件 A 发生的概率.

乘法公式:对于任意两事件 A 与 B,若 $P(A)>0,P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

全概率公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 n 个互不相容的事件,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,如果 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

贝叶斯公式:在全概率公式条件下,若 $P(A)>0$,则有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\text{其中 }k=1,2,\cdots,n.$$

● 事件的独立性及贝努里概型

事件的独立性：设 A,B 是两个随机事件，若有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

若对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意 m 个事件

$$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_m},1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n,2\leqslant m\leqslant n,$$

都满足关系式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 总体相互独立，或简称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

贝努里概型：若一个试验只有两种结果 A 与 $\overline{A}$，且 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p,(0<p<1)$，则称这个试验为贝努里试验，它的 n 次重复独立试验称为 n 重贝努里试验.

在 n 重贝努里试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

例题分析

例 1 一个工厂生产了四件产品，以 A_i 表示该厂生产的第 i 件产品是正品 $(i=1,2,3,4)$. 试用 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示下列事件：

(1) 没有一件产品是次品；

(2) 至少有一件产品是次品；

(3) 恰有一件产品是次品；

(4) 至少有两件产品不是次品.

解 (1) {没有一件产品是次品} = {四件产品都是正品}

$=\{A_1,A_2,A_3,A_4$ 同时发生$\}=A_1A_2A_3A_4$;

(2) {至少有一件产品是次品} = $\overline{\{没有一件产品是次品\}}$

$=\overline{A_1A_2A_3A_4}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3\cup\overline{A}_4$;

(3) {恰有一件产品是次品}

$=\bigcup\limits_{i=1}^{4}\{$第 i 件产品是次品，其余各件产品为正品$\}$

$=\bigcup\limits_{i=1}^{4}\{A_i$ 不发生但 A_j 发生，$j\neq i,j=1,2,3,4\}$

$= \overline{A}_1A_2A_3A_4 \cup A_1\overline{A}_2A_3A_4 \cup A_1A_2\overline{A}_3A_4 \cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$;

(4) {至少有两件产品不是次品} = {至少有两件产品是正品}

= {A_1, A_2, A_3, A_4 至少有两个发生}

$= A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_1A_4 \cup A_2A_3 \cup A_2A_4 \cup A_3A_4$.

例2 (1989.Ⅳ,Ⅴ) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对应事件 $\overline{A}$ 为( ).

A."甲种产品滞销,乙种产品畅销";

B."甲、乙两种产品均畅销";

C."甲种产品滞销";

D."甲种产品滞销或乙种产品畅销".

解 用 A_1 表示"甲种产品畅销",A_2 表示"乙种产品滞销",则 $A = A_1A_2$,从而由对偶律得 $\overline{A} = \overline{A_1A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$,表示"甲种产品滞销或乙种产品畅销".故应选 D.

例3 (1990.Ⅰ) 设随机事件 A,B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别为 0.4,0.3 和 0.6.若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B}) =$ ________.

解 因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

所以
$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1.$$

由减法公式得

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.1 = 0.3.$$

例4 (1994.Ⅰ) 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A) = p$,则 $P(B) =$ ________.

解 因为
$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(A) - P(B) + P(AB),$$

由题设 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(AB)$,所以 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$.

例5 设 A,B 为两随机事件,求证:

(1)$P(AB)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$;

(2)$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)$
$$\leqslant P(A)+P(B).$$

证 (1) 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

所以
$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=[1-P(\overline{A})]+[1-P(\overline{B})]-[1-P(\overline{A\cup B})]\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})\end{aligned}$$

(2) 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

由(1)有 $P(AB)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$

而 $P(AB)\geqslant 0, P(\overline{A}\,\overline{B})\geqslant 0$,

所以 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B), 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$;

又因为 $AB\subset A\cup B$,可知 $P(AB)\leqslant P(A\cup B)$.

综上可得:
$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

例 6 甲从 2,4,6,8,10 中任取一数,乙从 1,3,5,7,9 中任取一数,求甲取的数大于乙取的数的概率.

解 用(i,j)表示甲取到数 i,乙取到数 j 这一结果,则样本空间为
$$\Omega=\{(i,j)\mid i=2,4,6,8,10;j=1,3,5,7,9\},$$
这是一个古典型随机试验.

设 A 表示事件"甲取到的数大于乙取到的数",则
$$\begin{aligned}A=\{&(2,1),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3),(6,5),(8,1),(8,3),\\&(8,5),(8,7),(10,1),(10,3),(10,5),(10,7),(10,9)\}.\end{aligned}$$

由于样本点总数为 25,A 所包含的样本点有 15 个,所以
$$P(A)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

例 7 一个教室共有 $n+k$ 个座位,随机地坐上 n 个人,求其中指定的 s 个座位$(s<n)$都坐上人的概率.

解 n 个人坐在有 $n+k$ 个座位的教室里,每一种坐法为一个样本点,样本点总数为 $C_{n+k}^{n}\cdot n!$,由于坐法的任意性,各样本点出现是等可能的.

坐在指定位置上的 s 人是从 n 个人中选出来的,有 C_n^s 种选法,选出的 s 个人坐在指定的位置上有 $s!$ 种坐法,其余 $n-s$ 人,只能坐在未指定的位置上,坐法有 $C_{n+k-s}^{n-s}\cdot(n-s)!$ 种,由乘法原理即知事件"指定的 s 个座位都坐上人"含有 $C_n^s\cdot s!C_{n+k-s}^{n-s}\cdot(n-s)!$ 个样本点,因此所求概率为

$$p=\frac{C_n^s\cdot s!C_{n+k-s}^{n-s}\cdot(n-s)!}{C_{n+k}^{n}\cdot n!}=\frac{C_n^s}{C_{n+k}^s}.$$

例8 从数字 1,2,…,9 中可重复地任取 n 次,每次取一个数.求 n 次所取的数的乘积能被 10 整除的概率.

解 因为每次取数可取到 1,2,…,9 九个数中任意一个(有 9 种取法),所以 n 次取数不同的取法有 9^n 种,每种取法为一个样本点,各样本点的出现是等可能的.

设 A 为事件"取得的 n 个数的乘积能被 10 整除",B 为事件"取得的 n 个数中至少有一个是 5",C 为事件"取得的 n 个数中至少有一个是偶数".

注意,n 次取得的数的乘积能被 10 整除,相当于取得的 n 个数中至少有一个是 5,并且至少有一个是偶数,即 $A=BC$,从而所求概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(BC)=1-P(\overline{BC})\\&=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-[P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\,\overline{C})].\end{aligned}$$

若各次取数都没有取到 5,则每次只能从除 5 以外的 8 个数字中取(有 8 种取法),n 次取数有 8^n 种不同取法,即 $\overline{B}$ 包含 8^n 个样本点.

同理,$\overline{C}$ 包含 5^n 个样本点,$\overline{B}\,\overline{C}$ 包含 4^n 个样本点,于是得到

$$P(\overline{B})=\frac{8^n}{9^n},P(\overline{C})=\frac{5^n}{9^n},P(\overline{B}\,\overline{C})=\frac{4^n}{9^n}.$$

所求概率为 $$P(A)=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.$$

例 9 将一枚骰子重复掷 n 次,试求掷出的最大点数为 5 的概率.

解 掷一次骰子有 6 种不同的结果,掷 n 次就有 6^n 种不同结果,每一种结果为一样本点.

设 A 表示事件"掷出的最大点数为5",A_k 表示事件"恰有 k 次掷出的点数是 5,其它各次掷出的点数小于 5",$k=1,2,\cdots,n$,则

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k.$$

指定某 k 次掷出的点数是 5,其它各次掷出的点数小于 5,有 4^{n-k} 种不同结果.由于指定方式有 C_n^k 种,所以 A_k 包含 $C_n^k\cdot4^{n-k}$ 个样本点.故得 A_k 的概率为

$$P(A_k)=\frac{C_n^k\cdot4^{n-k}}{6^n}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

注意 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的,所以

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=\frac{1}{6^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k4^{n-k}=\frac{5^n-4^n}{6^n}.$$

也可以直接求 A 包含的样本点个数,再计算 $P(A)$.

因为 n 次掷出的点数都不大于5,有 5^n 种不同的结果,而 n 次掷出的点数都不大于4,有 4^n 种不同的结果,所以 n 次掷出的最大点数为 5 有 5^n-4^n 种不同的结果,即 A 包含 5^n-4^n 个样本点.故

$$P(A)=\frac{5^n-4^n}{6^n}.$$

例 10 随机取一非负整数,求这整数的平方数的个位数是 4 的概率.

解 任一非负整数 x 均可表示为 $a+10b$,其中 a 为 x 的个位数,它可取 0,1,2,…,9 等十个数字.

因为 $\quad x^2=(a+10b)^2=a^2+20ab+100b^2,$

可见平方数的个位数只与 a 有关,且仅当 $a=2$ 或 $a=8$ 时,x^2 的个位数是 4,故所求概率为

$$p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

例 11 向正方形区域 $\Omega = \{(p,q) \mid |p| \leqslant 1, |q| \leqslant 1\}$ 中随机投一点,如果 (p,q) 是所投点 M 的坐标,试求:

(1) 方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个实根的概率;

(2) 方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个正根的概率.

解 (1) 由于方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个实根的充要条件是 $p^2 - 4q > 0$,因此事件"方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个实根"可用区域

$$A = \{(p,q) \mid |p| \leqslant 1, |q| \leqslant 1, \text{且 } p^2 - 4q > 0\}$$

来表示. A 是 Ω 的子集(图 1 - 1 中的阴影部分).

区域 Ω 的面积为 4,即 $\mu(\Omega) = 4$;

区域 A 的面积为 $2 + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} p^2 \mathrm{d}p = \frac{13}{6}$,即 $\mu(A) = \frac{13}{6}$.

因为是几何型随机试验,故所求概率为

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{13}{24}.$$

(2) 由于方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个正根的充分必要条件是 $p^2 - 4q > 0$,且 $p < 0, q > 0$,所以事件"方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个正根"可用区域

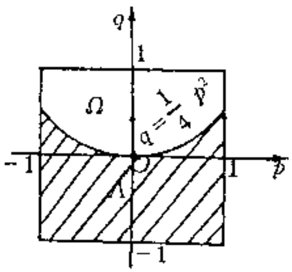

图 1 - 1

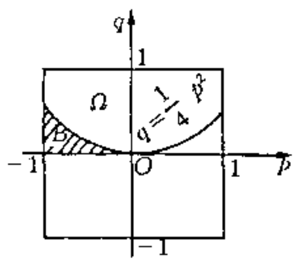

图 1 - 2

$$B = \{(p,q) \mid |p| \leqslant 1, |q| \leqslant 1 \text{ 且 } p^2 - 4q > 0, p < 0, q > 0\}$$
$$= \{(p,q) \mid 0 < q < \frac{1}{4}p^2, -1 \leqslant p < 0\}$$
来表示. B 是 Ω 的子集(图 1 - 2 中的阴影部分).

因为区域 B 的面积为$\int_{-1}^{0} \frac{1}{4}p^2 \mathrm{d}p = \frac{1}{12}$,即 $\mu(B) = \frac{1}{12}$,故所求概率为

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{1}{48}.$$

例 12 在线段[0,1]上任意投三个点 M_1,M_2 和 M_3. 试求三线段 OM_1,OM_2 和 OM_3 能构成三角形的概率.

解 设三线段 OM_1,OM_2 和 OM_3 的长度分别是 x,y 和 z,则问题可以看作是向空间区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 投点的几何型随机试验,Ω 是边长为 1 的立方体(图 1 - 3).

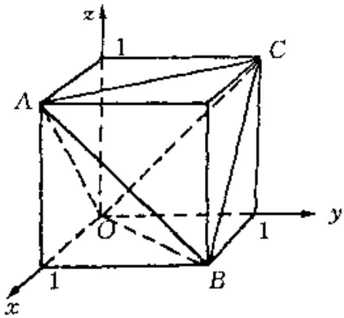

图 1-3

"三条线段能构成三角形"这一事件可用如下的空间区域 G 表示:

$$G = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x,y,z \leqslant 1, x + y > z, x + z > y, y + z > x\}.$$

G 是四面体 $OABC$(见图 1 - 3).