



状元笔记

教材详解

九年级数学 下

JS

丛书主编：洪林旺 本册主编：仓猛 夏建平



YZLI0890161063

昔日状元读书留笔记
今朝我用笔记中状元

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE



★内含教材习题答案★



龍門書局

龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE

九年级数学 下



丛书主编：洪林旺

本册主编：仓 猛 夏建平

副 主 编：李克强 万广磊 王久祥

编 委：陈晓龙 宋爱华 宋文宝 卜现飞

梁 丽 杨义标 黄建聪



YZLI0890161063

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010-64031958;13801093426

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解. 九年级数学. 下:JS/洪林旺丛书主编;仓猛,夏建平本册主编. —修订版. —北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-1713-2

I. 状… II. ①洪…②仓…③夏… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 164354 号

责任编辑:张凤玲 王丽红/封面设计:魏晋文化



龙门书局出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

铁成印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2008 年 10 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2011 年 9 月第三次修订版 印张:10 1/4

2011 年 9 月第四次印刷 字数:413 000

定 价: 20.80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

他山之石，可以攻玉

——《状元笔记·教材详解》前言

是否，在冥思苦想之余，仍感困惑？

是否，在洗耳恭听之时，还是无助？

是否，在挑灯夜战之后，犹觉茫然？

问鼎状元，如千军万马过独木桥。父母、老师不要求每一位孩子、每一位学生都能力争状元，但如果我们都来借鉴、掌握状元的学习方法、学习技巧，那么，我们就能跳出题海，用较少的时间取得良好的学习效果。因此，龙门书局将全国各省高考状元的各个学科的学习心得和方法技巧，经过名师整理、挖掘与提升出来，形成《状元笔记·教材详解》，与同学们一起分享。

它用“详解”破译你的困惑；用“技巧”解除你的无助；用“警示”驱走你的茫然。

翻开这本笔记，你将看到的经典栏目有：

教材详解：全面、细致地讲解教材上的知识点，深入剖析其内涵，并配典型例题对其进行巩固。一讲一练夯实基础，使你考试稳拿基础分。

解题技巧：归纳各节的解题方法和技巧，辅以例题，通过对例题的分析和点评，让你掌握解题所用的通性通法以及小窍门，快速提高解题能力。

状元笔记：总结规律、提炼学习方法和技巧，让你掌握状元的学习方法。

陷阱警示：梳理学习过程中遇到的易错点和易混点，通过错因透视，扫除学习中的困惑和障碍。

参考答案及点拨：给出本书所有习题以及教材习题的答案，并用精细的分析，对习题进行点拨。

亲爱的同学，“他山之石，可以攻玉”，取状元学习之精华，架成功积累之天梯。如能掌握本书的方法和技巧，到时，你将成为或班级、或学校、或县市、或全省乃至全国的佼佼者。

在学习过程中有什么疑问或本书如有遗漏之处，请与 zyxxbj@163.com 联系，不胜感谢！

洪林旺

2011年9月

《状元笔记·教材详解》学生顾问团



·赵永胜·

山西省文科状元
中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



·卢毅·

浙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：卡尔维诺文集

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统的梳理，无论是预习时或复习时，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



·武春颖·

河北省文科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习习惯，如制订学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



·刘诗洋·

黑龙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



·邱汇·

四川省文科状元
北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远

学习方法、技巧：1.要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2.学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3.学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4.坚持锻炼，劳逸结合。



·林伊·

江苏省文科状元
北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏爱其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



·回米·

北京市理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



·朱师达·

湖北省理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1.知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2.知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3.整体把握兴趣和强弱科的平衡。4.正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



目 录

CONTENTS

第六章 二次函数

1

6.1 二次函数	2
6.2 二次函数的图象和性质(一)	13
6.2 二次函数的图象和性质(二)	27
6.3 二次函数与一元二次方程	51
6.4 二次函数的应用	70
本章小结	93
本章综合测试题	105

第七章 锐角三角函数

116

7.1 正切	117
7.2 正弦、余弦	126
7.3 特殊角的三角函数	138
7.4 由三角函数值求锐角	148
7.5 解直角三角形	155
7.6 锐角三角函数的简单应用	168
本章小结	190
本章综合测试题	202

第八章 统计的简单应用

212

8.1 货比三家	213
8.2 中学生的视力情况调查	227
本章小结	240
本章综合测试题	247



第九章 概率的简单应用

256

- 9.1 抽签方法合理吗 257
- 9.2 概率帮你做估计 268
- 9.3 保险公司怎样才能不亏本 278
- 本章小结 288
- 本章综合测试题 294

全册复习

304

全册综合测试题

313

第六章

二次函数

二次函数的图象——抛物线,是人们最为熟悉的曲线之一,如桥拱、隧道、蔬菜大棚等都给我们以抛物线的形象.像商品经营中的最大利润问题,工农业生产中的最大产量问题等都要用到二次函数知识.

等我研究一下二次函数,就能搞清楚!

一涨价就卖的少,一降价就卖的多,怎样才能赚得最多呢?弄得我西瓜都不会卖了!



本章学习目标

◆ 通过对实际问题情景的分析,能用表格、关系式、图象表示变量之间的二次函数关系,并体会二次函数的意义.

◆ 能够根据具体问题,用适当的方法表示变量之间的二次函数关系.

◆ 会用描点法画出二次函数图象,能根据图象认识二次函数的性质.

◆ 能根据二次函数的关系式确定二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

◆ 理解一元二次方程与二次函数的关系,并能利用二次函数的图象求一元二次方程的近似根.

◆ 能利用二次函数知识解决实际问题,能对变量的变化趋势进行预测.

本章重点难点

◆ 理解二次函数的概念,能用表格、关系式、图象来表示变量之间的二次函数的关系.

◆ 理解二次函数的图象及其性质,能根据二次函数关系式确定二次函数的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

◆ 能够利用二次函数的图象探索其性质和理解二次函数与一元二次方程的关系.

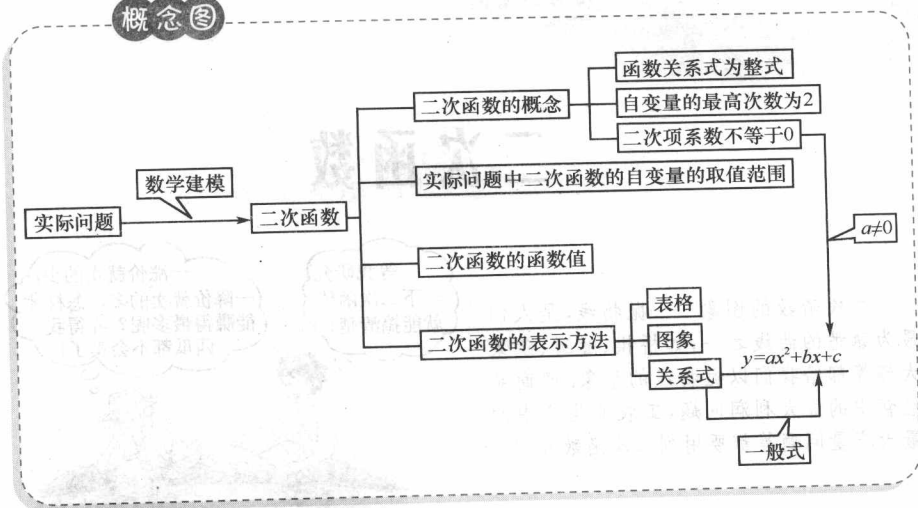
◆ 会利用二次函数知识解决实际问题.

6.1 二次函数



整体感知

概念图



教材详解

知识点一 二次函数的概念

一般地,形如 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数,且 $a \neq 0$) 的函数,称为二次函数,其中, x 是自变量, y 是 x 的函数.

详解 任何一个二次函数都可以化成 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的形式,因此,我们又把 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 称为二次函数的一般形式.

(1) 一个函数是二次函数必须满足以下三个条件:①含有自变量的代数式是整式;②自变量的最高次数是2;③函数关系式中二次项系数不等于0.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有密切的联系.如果二次函数关系式中 $y=0$,那么这个二次函数转化为一个一元二次方程.

概念的作用:判定一个函数是否是二次函数.

温馨提示 学习二次函数的概念要注意以下几点:

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, a, b, c 是常数, a 必须不为0,否则没有了二次项就不是二次函数了,而 b, c 可以为任意实数.特别地,当 $b=0$ 时,二次函数形如 $y=ax^2+c$;当 $c=0$ 时,二次函数形如 $y=ax^2+bx$;当 $b=0, c=0$ 时,二次函数形如 $y=ax^2$,这些都是二次函数的特殊形式.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, x, y 是变量, a, b, c 是常数, a 必须不为 0, 若 $a=0$, 则 $y=ax^2+bx+c$ 即为 $y=bx+c$, 若此时 $b \neq 0$, 则 $y=bx+c$ 是一次函数; 若此时 $b=0$, 则 $y=c$ 是一个常数函数.

(3) 判断一个二次函数是否是二次函数, 应该紧扣二次函数的定义, 若函数关系式的给出形式比较复杂, 必须进行恒等变形, 将它化简, 再给予判断.

【例 1】 下列函数哪些是二次函数?

$$(1) y=2-x^2 \quad (2) y=\frac{1}{x^2-1} \quad (3) y=2x(1+4x) \quad (4) y=x^2-(1+x)^2$$

$$(5) y=mx^2+nx+p \quad (m, n, p \text{ 均为常数})$$

解析: (1) 是二次函数; (2) 含自变量的左边是分式而不是整式不符合二次函数的定义, 故 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 不是二次函数; (3) 把 $y=2x(1+4x)$ 化简为 $y=8x^2+2x$, 是二次函数; (4) $y=x^2-(1+x)^2$ 化简后变为 $y=-2x-1$, 它不是二次函数而是一个一次函数; (5) 由于题目没有给定二次项系数 m 的条件, 故应讨论. 当 $m \neq 0$ 时, $y=mx^2+nx+p$ 是一个二次函数; 当 $m=0$ 时, 函数变为 $y=nx+p$ 是一个一次函数或常数函数.

答案: 二次函数有 (1) 和 (3).

状元笔记

规律总结: 判定一个函数是否是二次函数常有三个标准: ① 所表示的函数关系式为整式; ② 所含自变量的关系式中自变量的最高次数为 2; ③ 函数关系式中二次项系数不等于 0.

【例 2】 如果函数 $y=(k+2)x^{k^2-2}$ 是 y 关于 x 的二次函数, 则 k 的值为多少?

解析: 紧扣二次函数定义求解. 注意易错点为忽视 $k+2 \neq 0$ 的条件.

$$\text{解: 根据题意知 } \begin{cases} k^2-2=2 \\ k+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\pm 2 \\ k \neq -2 \end{cases}, \therefore k=2.$$

状元笔记

规律总结: 紧扣二次函数定义中的两个特征: ① $a \neq 0$; ② 自变量最高次数为 2.

知识点二

实际问题中二次函数的自变量的取值范围

一般地, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的自变量 x 的取值范围是全体实数, 但在实际问题中, 二次函数由于受到实际问题的限制, 自变量的取值范围往往不是全体实数.

详解 函数是用来描述一个量与另一个量之间的对应关系, 在许多实际问题中, 存在着二次函数关系, 因此函数的自变量取值范围受到实际问题要求和限制, 自变量的取值往往不是全体实数, 如有关时间、面积、周长、边长等均为非负数, 人数是整数等.

【例 3】 已知长方形窗户的周长为 6 米, 写出窗户面积 y (米²) 与窗户宽 x (米) 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

解析: 由长方形窗户的周长为 6 米, 宽为 x 米, 可知其长为 $(3-x)$ 米, 利用长方形的面积公式, 可得 $y=x(3-x)=-x^2+3x$. 由题意知 $x > 0, 3-x > 0$, 所以 $0 < x < 3$.

解: 由题意得: $y=x(3-x)=-x^2+3x$, 其中自变量 x 的取值范围是 $0 < x < 3$.

【例4】如图 6.1-1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, $AB=12\text{mm}$, $BC=24\text{mm}$, 动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向 B 以 2mm/s 的速度移动, 动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向 C 以 4mm/s 的速度移动. 已知 P 、 Q 分别从 A 、 B 同时出发, 求 $\triangle PBQ$ 的面积 S 与出发时间 t 的函数关系式, 并求出 t 的取值范围.

解析: 本题是动态几何题, 欲求 $\triangle PBQ$ 的面积 S 与出发时间 t 的函数关系式, 首先要正确用含 t 的代数式表示 PB 和 BQ 的长, 再根据面积公式求出 $\triangle PBQ$ 的面积, 注意要正确地确定自变量 t 的取值范围.

解: 依题意, 得 $AP=2t$, $BQ=4t$, 则 $PB=12-2t$.

$$S = \frac{1}{2} PB \times BQ = \frac{1}{2} \times (12-2t) \times 4t = -4t^2 + 24t.$$

$\therefore \triangle PBQ$ 的面积 S 与出发时间 t 的函数关系式为 $S = -4t^2 + 24t$.

$$\therefore \begin{cases} 0 < 12-2t < 12 \\ 0 < 4t < 24 \end{cases},$$

$\therefore$ 自变量的取值范围为 $0 < t < 6$.

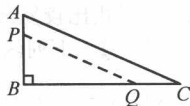


图 6.1-1

状元笔记

规律总结: 一般地, 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的自变量 x 的取值范围是全体实数, 但在实际问题中, 二次函数由于受到实际问题的限制, 自变量的取值范围往往不是全体实数.

知识点三

二次函数的函数值

把自变量所取的值代入函数关系式中求出的结果即为函数值, 注意结果的唯一性.

详解 当给定自变量 x 的一个值后, 就有唯一的 y 的值与之对应, 这时相应的 y 的值就是函数值.

温馨提示 对于二次函数中自变量的取值范围内的每一个自变量的值, 都有唯一的一个函数值与之对应, 反之却不一定成立.

【例5】 已知二次函数 $y=3(x-1)^2+2$, 当 $x=5$ 时, y 的值是_____; 当 $y=5$ 时, x 的值是_____.

解析: 求函数值只要将自变量的取值代入即可直接得到; 求自变量的值, 需要将函数值代入后求解一元二次方程.

解: 当 $x=5$ 时, $y=50$;

当 $y=5$ 时, $3(x-1)^2+2=5$, 即 $(x-1)^2=1$, 解得 $x=0$ 或 $x=2$.

状元笔记

规律总结: 求函数值实际上就是求代数式的值; 求二次函数自变量的值可以转化为解一元二次方程.

【例6】 一条隧道的截面如图 6.1-2 所示, 它的上部是一个半圆, 下部是一个矩形, 矩形的一边长 2.5m .

(1) 求隧道的截面面积 $S(\text{m}^2)$ 关于上部半圆半径 $r(\text{m})$ 的函数关系式;

(2) 求当上部半圆半径为 2m 时的截面面积. (π 取 3.14 , 结果精确到 0.1m^2)

解析: (1) 隧道的截面面积等于半圆面积加上长方形的面积, 注意长方形的长就是半圆的直径; (2) 实际上就是求当自变量 $r=2$ 时, 函数 S 的值.

$$\text{解: (1) } S = 2r \times 2.5 + \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 + 5r.$$

$$(2) \text{ 当 } r=2 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 2^2 + 5 \times 2 \approx 16.3 (\text{m}^2).$$

答: 所求函数关系式为 $S = \frac{1}{2} \pi r^2 + 5r$; 当 $r=2$ 时, 隧道的截面面积为 16.3m^2 .

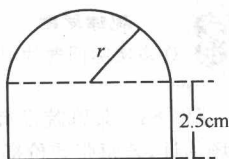


图 6.1-2

知识点四 列实际问题中的二次函数的关系式

函数是用来描述一个量与另一个量之间的对应关系, 在许多实际问题中, 存在着二次函数. 在解决实际问题时, 应先把实际问题抽象成数学问题, 再理清变量与变量之间的关系, 找出两个变量之间的等量关系.

讲解 (1) 列函数关系式的步骤: ①审清题意, 找出实际问题中的已知量、未知量, 将文字、图形语言转化为数学符号语言; ②找出等量关系式; ③列出函数关系式, 设出表示变量的字母, 把等量关系用字母的代数式替换, 并将关系式写成用自变量表示因变量的形式.

(2) 几种常见的二次函数关系

①面积、体积的一些计算公式在特定的情况下可以看着二次函数关系式. 如: 在圆面积公式中, $S = \pi r^2$ 时, 半径与圆的面积的关系满足二次函数关系; 周长一定时, 矩形的面积与其中一边长的关系满足二次函数关系; ②在特定情况下, 销售利润与售价的关系; ③在特定情况下, 银行存款本利和年利率的关系; ④在特定情况下, 总量与增长率(降低率)的关系; ⑤在特定情况下, 一些物理化学公式也满足二次函数关系.

温馨提示 解决与实际问题有关的二次函数的问题时, 应理清两个变量之间的关系, 然后列出函数关系式, 同时应根据自变量的实际意义及所列的函数关系式确定自变量的取值范围.

【例 7】 一个正方形的边长是 12cm . 若从中挖去一个长为 $2x \text{cm}$, 宽为 $(x+1) \text{cm}$ 的小长方形, 剩余的部分的面积为 $y \text{cm}^2$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式, 并指出 y 是 x 的什么函数;

(2) 当小长方形的长中 x 的值为 $2, 4$ 时, 相应的剩余部分面积是多少?

解析: 几何图形的面积一般需要画图分析, 相关线段必须先用 x 的代数式表示出来. 如图 6.1-3 所示.

$$\text{解: (1) } y = 12^2 - 2x(x+1), \text{ 即 } y = -2x^2 - 2x + 144.$$

$\therefore y$ 是 x 的二次函数.

(2) 当 $x=2, 4$ 时, 相应的 y 的值分别为 $132 \text{cm}^2, 104 \text{cm}^2$.

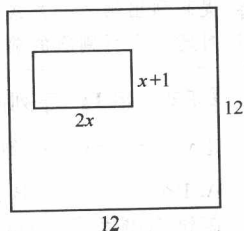


图 6.1-3

状元笔记

规律总结: 二次函数是刻画现实世界变量之间关系的一种常见的数学模型.

许多实际问题的解决,可以通过分析题目中变量之间的关系,建立二次函数模型.

【例 8】 某剧院设有 1000 个座位,门票每张 3 元可达客满,据长期的营业情况进行市场估计,若每张票价提高 x 元,将要少售出 $200x$ 张门票.

求提价后每场电影的票房收入 y (元)与 x (元)之间的函数关系式和自变量的取值范围.

解析:提价后每场电影的票房收入应等于提价后门票价格与所售出门票数量的积,另外自变量 x 的取值范围既要考虑到实际生活中钱数的非负性,又要考虑到少售出的门票数量的限制.

$$\text{解: } y = (1000 - 200x)(x + 3) = -200x^2 + 400x + 3000.$$

根据题意, $\begin{cases} x \geq 0 \\ 200x \leq 1000 \end{cases}$, 解得 $0 \leq x \leq 5$, $\therefore$ 自变量 x 的取值范围为 $0 \leq x \leq 5$.

状元笔记

方法总结: 本例中二次函数关系式 $y = -200x^2 + 400x + 3000$ 中自变量 x 的取值范围应在实际问题中意义;而没有实际问题背景的二次函数关系式 $y = -200x^2 + 400x + 3000$ 的自变量 x 的取值范围是一切实数.



解题技巧

技巧 1 巧用二次函数的定义识别二次函数

【例 9】 已知正方体的棱长是 x cm, 它的表面积是 S cm², 体积是 V cm³.

(1) 分别写出 S 与 x , V 与 x 的函数关系式;

(2) 这两个函数中, 哪个是 x 的二次函数?

解析: 利用正方体的表面积公式和体积公式写出函数关系式, 应用二次函数的定义识别是否为二次函数.

解: (1) $S = 6x^2$, $V = x^3$ ($x > 0$). (2) $S = 6x^2$ 是 x 的二次函数.

状元笔记

方法总结: 熟记一些常用公式, 几种常见基本图形的面积、体积等公式, 是提高列出函数关系式速度的有效方法之一, 而正确理解二次函数的定义, 是迅速对题目进行判断的前提.

【变式引申 1】 下列函数中是二次函数的有

()

$$\textcircled{1} y = x + \frac{1}{x}; \textcircled{2} y = 3(x-1)^2 + 2; \textcircled{3} y = (x+3)^2 - 2x^2; \textcircled{4} y = \frac{1}{x^2} + x.$$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

解析: $\textcircled{1}$ 根据定义判断不是二次函数; $\textcircled{2} \textcircled{3}$ 根据定义判断是二次函数; $\textcircled{4}$ 不是二次函数. 故选择 B.

答案: B

【变式引申 2】 用总长为 60m 的篱笆围成矩形场地, 矩形面积 S (m²) 与矩形一边长 l (m) 之间的关系是什么? 是函数关系吗? 是哪一种函数?

解析:矩形的一边长为 l ,则另一边长为 $(\frac{60}{2}-l)$;根据题意列出函数关系式.

解: $S=l(\frac{60}{2}-l)=l(30-l)=30l-l^2=-l^2+30l$,是二次函数关系式.

状元笔记

方法总结: 本例是由矩形的面积列出二次函数的关系式,列关系式时,要在理解题意的基础上,正确表示出长与宽的代数式,再利用面积公式求解.

技巧2 巧用二次函数定义求未知系数值

【例10】 已知函数 $y=(m^2-1)x^2+(m+1)x+5$.

(1) m 为何值时,此函数是二次函数;

(2) m 为何值时,此函数是一次函数;

解析:(1) 本题考查二次函数的概念,要使函数 $y=(m^2-1)x^2+(m+1)x+5$ 是二次函数,则 m 应满足 $m^2-1 \neq 0$; (2) 本题考查一次函数的概念,要使函数 $y=(m^2-1)x^2+(m+1)x+5$ 是一次函数,则 m 应满足 $m^2-1=0$,且 $m+1 \neq 0$.

解:(1) 由函数是二次函数,得 $m^2-1 \neq 0$,即 $m \neq \pm 1$, $\therefore m \neq \pm 1$,此函数是二次函数.

(2) 由函数是一次函数,得 $\begin{cases} m^2-1=0 \\ m+1 \neq 0 \end{cases}$,得 $m=1$, $\therefore m=1$ 时,此函数是一次函数.

【变式引申】 已知关于 x 的函数 $y=(a-b)x^3+2x^2+2+\frac{2a+b-3}{x}$ 是二次函数,求

a, b 的值

解析:因为函数是关于 x 的二次函数,则右边应为关于 x 的二次多项式,故 $(a-b)x^3$ 与 $\frac{2a+b-3}{x}$ 必须都为 0,即 $a-b=0$,且 $2a+b-3=0$,列出方程组求出 a, b .

解:由题意得 $\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+b-3=0 \end{cases}$,解之得 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

技巧3 巧用二次函数解决实际问题

【例11】 王强在一次高尔夫球的练习中,在某处击球,其飞行路线满足抛物线 $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x$,其中 $y(m)$ 是球的飞行高度, $x(m)$ 是球飞出的水平距离,结果球离球洞的水平距离还有 2m. 如图 6.1-4 所示,请求出球飞行的最大水平距离.

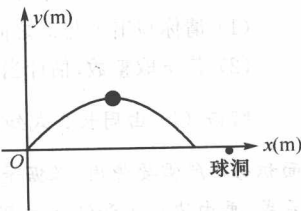


图 6.1-4

解析:求球飞行的最大水平距离就是求当函数值 $y=0$ 时,自变量 x 的取值.

解:令 $y=0$,得: $-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x=0$. 解得: $x_1=0, x_2=8$.

$\therefore$ 球飞行的最大水平距离是 8m.

状元笔记

方法总结: 读懂题意是解决问题的关键,本题关键:球飞行的最大水平距离,就是当函数值 $y=0$ 时,得到一个含有自变量 x 的一元二次方程,解出方程,得到自变量 x 的取值.

【变式引申】如图 6.1-5, 一块草坪是一长 100 米, 宽 80 米的矩形, 现欲在中间修两条互相垂直的宽为 x 米的小路, 这时草坪的面积为 y 平方米, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

解析: 草坪是由四块组成, 单独求出四块小长方形的面积显然不行, 由于小路的长和宽是一定的, 其面积与所在的位置无关, 因此我们可以将四块草坪通过平移, 放在一起组成一个大草坪, 如图 6.1-6 所示, 组成的大草坪的长为 $(100-x)$ 米, 宽为 $(80-x)$ 米, 面积 y 可表示出来.

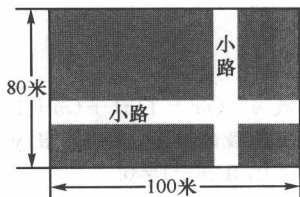


图 6.1-5

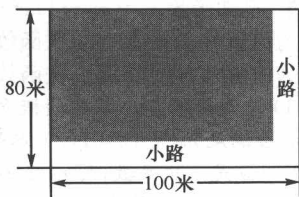


图 6.1-6

解: 根据题意, 得 $y = (100-x)(80-x)$. 整理, 得 $y = x^2 - 180x + 8000$.

根据题意 $\begin{cases} x > 0 \\ 80-x > 0 \\ 100-x > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x < 80$, 从而自变量的取值范围是 $0 < x < 80$.

技巧 4 巧用估算法求最值

【例 12】某广告公司设计一块周长为 12 米的矩形广告牌, 广告设计费为每平方米 1000 元, 设计矩形广告牌的一边长为 x 米, 所花费用为 y 元.

(1) 请你写出 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(2) 若 x 取整数, 估计当 x 取何值时, y 取最大设计费用?

解析: (1) 由周长公式知, 一边长为 x 米, 另一边可表示为 $\frac{12-2x}{2} = (6-x)$ 米, 求出面积易得所需要费用. 根据等量关系式: 所花费用 = 1000 × 广告牌的面积, 可列出函数关系式. 再由边长 x 和 $(6-x)$ 都是正数, 得 x 的取值范围.

解: (1) 设一边长为 x 米, 由题意, 得

$y = 1000x(6-x) = -1000x^2 + 6000x$, 由边长 $x > 0$, 且 $6-x > 0$, 得 $0 < x < 6$.

(2) 列表如下:

x (米)	1	2	3	4	5
y (元)	5000	8000	9000	8000	5000

由上表可估计, 当 $x=3$ 时, $y_{\text{最大值}} = 9000$ 元, 因此当 $x=3$ 米时, 最大设计费用为 9000 元.

状元笔记

方法总结：用尝试取值法求实际问题中函数的最大值时，根据实际问题中的取值范围列出表格，依次取值，估计并猜测函数的最大值或最小值。



陷阱警示

易错点 1 对二次函数的概念理解得不透，忽略 $a \neq 0$ 而出错

一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数，且 $a \neq 0$) 的函数，称为二次函数，其中， x 是自变量， y 是 x 的函数。理解概念时，要特别注意“ $a \neq 0$ ”这个条件。

【例 13】当 $y = (m-2)x^{m^2-2} + 3x - 5$ 是二次函数，求 m 的值。

正确答案：由题意可知 $\begin{cases} m^2 - 2 = 2 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases}$ ，
解得 $m = -2$ 。

错误答案：因为 $y = (m-2)x^{m^2-2} + 3x - 5$ 是二次函数，所以 $m^2 - 2 = 2$ ，解得 $m = \pm 2$ 。

错因分析：上述解法只注意到“二次函数中的自变量 x 的最高次幂是 2”，而忽略了二次函数的二次项系数 $(m-2)$ 不能为零这一十分重要的条件。

易错点 2 忽视实际问题中自变量取值范围致错

【例 14】如图 6.1-7，钢球从斜面顶端由静止开始沿斜面滚下，速度每秒增加 1.5m/s。

(1) 写出滚动的距离 s (单位：m) 与滚动时间 t (单位：s) 之间的关系式。(友情提示：本题中，距离 = 平均速度 $\bar{v} \times$ 时间 t ， $\bar{v} = \frac{v_0 + v_t}{2}$ 其中 v_0 是开始时的速度， v_t 是 t 秒时的速度)

(2) 如果斜面的长是 3m，钢球从斜面顶端滚到底端用多长时间？

正确答案：(1) $s = \frac{1.5t+0}{2} \cdot t$ ，即 $s = \frac{3}{4}t^2$ 。(2) 当 $s = 3$ 时， $3 = \frac{3}{4}t^2$ ， $\therefore t = 2$ (t 取正值)。答：(1) 滚动的距离 s 与滚动时间 t 的关系式为 $s = \frac{3}{4}t^2$ 。

(2) 斜面的长是 3m 时，钢球从斜面顶端滚到底端用了 2s。

错因分析：本题第一个小问题求出函数关系式是正确的，第二小问中忽略时间不可能为负值的情况，从而导致出错。

错误答案：(1) $s = \frac{1.5t+0}{2} \cdot t$ ，即 $s = \frac{3}{4}t^2$ ；(2) 当 $s = 3$ 时， $3 = \frac{3}{4}t^2$ ， $\therefore t = \pm 2$ 。答：(1) 滚动的距离 s 与滚动时间 t 的关系式为 $s = \frac{3}{4}t^2$ ；(2) 斜面的长是 3m 时，钢球从斜面顶端滚到底端用了 2s 或 -2s。

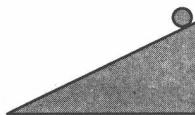


图 6.1-7



最新三年中考经典

中考命题总结和展望

知识点	中考地位	考查形式	中考趋势预测
二次函数概念	考点	选择题、填空题	在中考中仅是了解层次,一般不单独出中考试题.
根据实际问题确定二次函数关系式,并求出自变量取值范围	热点	选择题、填空题、解答题	分析实际问题情景,确定实际问题的二次函数关系式,在选择题、填空题属于中难度题,解答题则常出现在第(1)问中,是历年中考的热点考点.

题型 解答题

【例 15】(2010·山东青岛改编)某市政府大力扶持大学生创业.李明在政府的扶持下投资销售一种进价为每件 20 元的护眼台灯.销售过程中发现,每月销售量 y (件)与销售单价 x (元)之间的关系可近似的看作一次函数: $y = -10x + 500$. 设李明每月获得利润为 w (元),求每月获得利润 w (元)与销售单价 x (元)之间的函数关系式.

解析:利润=销售量 $\times$ 销售单价-成本,即 $w = (x - 20) \cdot y$ 又 $y = -10x + 500$, 可得 w 与 x 的函数关系式,它是一个二次函数.

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1) 由题意, 得: } w &= (x - 20) \cdot y \\
 &= (x - 20) \cdot (-10x + 500) \\
 &= -10x^2 + 700x - 10000.
 \end{aligned}$$

点评:本题是销售过程中营销策略问题的函数关系,来源于生活,能很好地考查学生把学习的知识应用于生活实际的能力.

【例 16】如图 6.1-8,某数学研究所门前有一个边长为 4 米的正方形花坛,花坛内部要用红、黄、紫三种颜色的花草种植成如图所示的图案,图案中 $AE = MN$. 准备在形如 $\text{Rt}\triangle AEH$ 的四个全等三角形内种植红色花草,在形如 $\text{Rt}\triangle EMH$ 的四个全等三角形内种植黄色花草,在正方形 $MNPQ$ 内种植紫色花草,每种花草的价格如下表:

品种	红色花草	黄色花草	紫色花草
价格(元/米 ²)	60	80	120

设 AE 的长为 x 米,正方形 $EFGH$ 的面积为 S 平方米,买花草所需的费用为 W 元.

- (1) 求 S 与 x 之间的函数关系式;
- (2) 求 W 与 x 之间的函数关系式;
- (3) 当 $x=1$ 时,求 S 与 W 的值.

解析:本题中 EF^2 沟通了正方形 $EFGH$ 的面积 S 与 x 间的关系;买花草所需的费用为 W 应为红、黄、紫三种颜色的花草价钱之和;第 3 小问属于当自变量确定时求特定函数值问题.

解: (1) $\because AE = x, AB = 4, \therefore BE = 4 - x, \therefore \text{Rt}\triangle EBF$ 中, EF^2

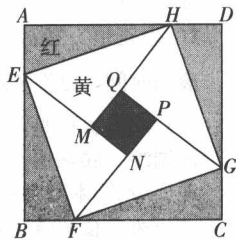


图 6.1-8