面向21世纪中等职业教育规划教材

数　学

（初等数学部分）

齐金菊　主编

科学出版社
www.sciencep.com

面向21世纪中等职业教育规划教材

数　　学

（初等数学部分）

齐金菊　主　编

李德家　主　审

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是中等职业学校数学的初等数学部分,结合当前中等职业教育及中职学生的特点合理选择内容.它主要包括:集合与逻辑用语、不等式、函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.直线与二次曲线、平面向量、立体几何、数列、复数.

本教材的内容安排合理,注重基础知识,富有较大弹性,在一些内容组织和阐述上有创新,主要目的是提高学生学习数学的兴趣,培养学生科学的思维方式,使学生打下扎实的基础.

本教材可供各类中等职业学校使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学/齐金菊主编.—北京:科学出版社,2004
(面向21世纪中等职业教育规划教材)
ISBN 7-03-013857-0

Ⅰ.数… Ⅱ.齐… Ⅲ.数学课-专业学校-教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068118号

责任编辑:王 彦/责任校对:柏连海
责任印制:吕春珉/封面设计:北新华文

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张:14 1/2
印数:1—5 000 字数:285 000

定价:20.00元

前　　言

根据2000年教育部颁布的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》的内容,结合当前中等专业学生实际情况,并贯彻国务院关于全面推进素质教育的精神,我们组织了部分教师编写了本教材.

在编写过程中,充分吸收了中职教育的实践教学经验,针对中职学生特点,突出体现了两方面的作用:一是着重培养学生的数学思维方式,抓住事物主要特征,抽象出概念或者建立模型;通过直觉判断、归纳推理、类比推理、逻辑分析及推理,揭示出事物的内在规律.二是让学生准确把握数学的根基,使学生扎扎实实地掌握基础知识和基本技能,通过知识的学习,使学生能应用于实际问题,应用于专业知识.

《数学》包括了集合与逻辑、不等式、函数、幂函数和指数与对数函数、三角函数、平面向量、直线与二次曲线、数列、立体几何、复数等内容.本书可供中等职业各专业数学课程使用,也可作为五年制高职学生学习初等数学部分选用.

本教材还配备了《数学练习册》,为学生巩固提高之用.

参加本书编写的人员有:齐金菊、王凌云、王峥、顾越昆、高群、石勇、崔若青、张辉、尹黄伦、孙风河.

主编:齐金菊,副主编:王凌云、顾越昆、石勇.

主审:李德家.

在编写过程中,得到了编审人员所在院校领导的大力支持和协助,并得到了科学出版社的热情关怀与指导,在此一并致谢.

由于编者水平所限,难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编　者

2004年6月

目　录

第 1 章　集合与逻辑用语

本章介绍集合与逻辑用语.集合论是现代数学的一个重要组成部分,它的基本知识已被运用于数学的各个领域.逻辑学是一门研究人类思维规律的学科,具有广泛的应用.学好这一章,将使我们能够准确理解和简洁表述数学的内容,为今后进一步学好数学打下基础,同时对学习计算机科学以及日常生活中的交谈大有好处.

1.1　集合的概念

一、集合的有关概念

1. 集合的意义

先观察下面的例子.

(1) 某学校一年级的全体学生;

(2) 所有不大于 4 的正整数;

(3) 某超市的全部商品;

(4) 不等式 $x-3>0$ 的所有解.

上面的例子中所用的"全体"、"所有"、"全部" 都是指具有某种共同性质的对象的总体.

我们把具有某种共同性质的对象组成的总体叫做集合,简称集.把组成集合的各个对象叫做这个集合的元素.

例如,上述例子中的(1) 是由这个学校一年级的全体学生组成的集合,一年级的每一个学生都是该集合的元素.

注意:

(1) 组成集合的对象都是确定的.如:某校一年级全体学生组成的集合,谁是与谁不是该校一年级的学生都是明确的.

(2) 由一些对象组成集合时,每个对象不能重复出现.如:某校一年级学生花名册上,每位学生的名字只写一次.

(3) 由于集合是由一些对象组成的总体,因此不计较这些对象的排列顺序.如,由 2,3,4 组成的集合与由 4,3,2 组成的集合是同一个集合.

以上三点就是集合中元素具有的确定性、互异性、无序性.

2. *集合与元素的关系*

集合通常用英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，而元素通常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 如果 a 是集合A 的元素，记为“$a \in A$”，读作“a 属于A”，如果 a 不是集合 A 的元素，记为“$a \notin A$”，读作“a 不属于A”. 元素与集合间的关系要么是“属于”，要么是“不属于”. 例如，将上面例子中的(2) 记为 A，则有 $2 \in A, 5 \notin A$.

3. *常用的数集及记号*

由数字组成的集合叫数集. 常用的数集用以下记号来表示：

名称	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

注：0 也是自然数.

如果上述数集中的元素只限于正数，就在集合记号的右上角标以“+”号，如果上述数集中的元素全是负数，就在集合记号的右上角标以“-”号. 例如，正整数集用 $\mathbf{Z}^{+}$、负实数集用 $\mathbf{R}^{-}$ 表示.

如果集合中的元素为有限个，这个集合叫做有限集. 例如，前面例中的(1)，(2)，(3)；如果集合中的元素为无限个，这个集合叫做无限集. 例如，实数集 **R**.

二、集合的表示法

1. *列举法*

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号$\{\ \}$内(每个元素仅写一次，不考虑顺序)，这种表示集合的方法叫做列举法. 例如，所有小于 4 的自然数组成的集合可表示为$\{0,1,2,3\}$ 或$\{2,1,0,3\}$.

当集合的元素较多，或者它是无限集时，可以只写出几个元素，其他元素用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数集可表示为$\{0,1,2,3,\cdots,99\}$；正偶数集可表示为$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$.

2. *描述法*

把集合中的元素所具有的特定性质描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做描述法. 例如，某图书馆的藏书组成的集合可表示为$\{$某图书馆的藏书$\}$；又如，不等式 $x-3>0$ 的解组成的集合可表示为$\{x \mid x-3>0\}$；再如，抛物线 $y=x^2$ 上所有的点(x,y) 组成的集合可表示为$\{(x,y) \mid y=x^2\}$.

以上所述集合的两种表示方法，使用时要看具体问题而定.

例 1　用适当的方法表示下列集合:

(1) 不等式 $x+6>0$ 的实数解;

(2) 大于 0 且小于 7 的所有偶数;

(3) 某商场所有的冰箱;

(4) 绝对值等于 2 的全体实数.

解　(1) 用描述法表示为 $A=\{x \mid x>-6 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$;

(2) 用列举法表示为 $B=\{2,4,6\}$;

(3) 用描述法表示为 $C=\{$某商场的冰箱$\}$;

(4) 用列举法表示为 $D=\{-2,2\}$.

三、单元素集与空集

只含有一个元素的集合叫做单元素集合.例如,方程 $x+2=0$ 的解集就是单元素集合.

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.例如,方程 $x^2+2=0$ 在实数范围内的解集就是空集.

为叙述方便,把至少含有一个元素的集合叫做非空集合.

注意　(1) 空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的概念;

(2) 单元素集合 $\{a\}$ 与单个元素 a 是两个不同的概念.

四、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

观察集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ 可以发现,集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素.

定义 1　对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 中的任何一个元素都属于 B,则集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

因此 $\{1,2,3\}$ 是 $\{1,2,3,4\}$ 的子集,可记为 $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ 或 $\{1,2,3,4\} \supseteq \{1,2,3\}$.

根据子集的定义可知,任何集合 A 都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$.我们规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing \subseteq A$.

定义 2　如果集合 A 是集合 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则集合 A 叫做集合 B 的真子集,记为 $A \subset B$(或 $B \supset A$).

例如,$\{1,2,3\}$ 不但是 $\{1,2,3,4\}$ 的子集,而且还是它的真子集,记作 $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$.

又如,自然数集 $\mathbf{N}$ 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的真子集;有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集,它

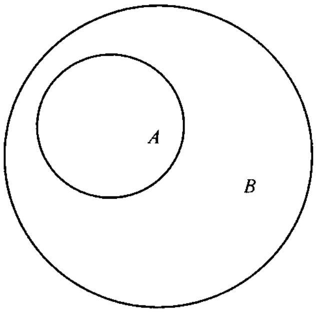

图 1-1

们分别记为 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

显然,空集是任何非空集合的真子集.

为了形象地说明集合之间的包含关系,通常用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示集合,而用圆中的点表示该集合的元素,这样的图形称为文氏(Wenn)图.图 1-1 表示集合 A 是集合 B 的真子集.

例 2　写出集合 $A = \{1,2,3\}$ 的所有子集,并指出哪些是真子集.

解　集合 A 的所有子集是:$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

所有真子集是:$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$.

从例 2 可以看出,集合 A 有三个元素,子集个数为 8,而 $8 = 2^3$,真子集的个数是 $2^3 - 1 = 7$.

可以证明,如果集合有 n 个元素,它的所有子集的个数为 2^n,真子集的个数为 $2^n - 1$.

2. 集合的相等关系

定义 3　对于两个集合 A 和 B,如果 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$,读作"A 等于 B".

两个集合相等就是表示两个集合中的元素完全相同.如 $\{a,b,c\} = \{a,b,c\}$.

例 3　设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$、集合 $B = \{-2,2\}$,讨论集合 A 与集合 B 之间的关系.

解　方程 $x^2 - 4 = 0$ 的所有解是 $x_1 = -2, x_2 = 2$,因此 $A = \{-2,2\}$,而 $B = \{-2,2\}$,所以 $A = B$.

习题 1.1

1. 下列各题中给定的对象的全体能否构成一个集合?

(1) 方程 $x + 1 = 0$ 的解;

(2) 小于 10 且被 3 整除的自然数;

(3) 某班数学成绩好的同学;

(4) 我国古代四大发明;

(5) 所有的直角三角形.

2. 用适当的符号"$\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$, $\supset$, $=$"填空:

(1) 0 ____ $\mathbf{N}$;　　(2) -3 ____ $\mathbf{Q}$;

(3) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{R}$;　　(4) a ____ $\{a\}$;

(5) $\varnothing$ ____ $\{a,b\}$;　(6) $\{1,2,3\}$ ____ $\{3,1,2,4\}$;

(7) $\mathbf{Q}^{+}$ ____ $\mathbf{R}^{+}$;　(8) $\mathbf{N}$ ____ $\mathbf{Z}$;

(9) $\{a,b,c\}$ ____ $\{c,b,a\}$;　(10) $\{x \mid x^2 = 4\}$ ____ $\{x \mid |x| = 2\}$.

3. 用列举法或描述法表示下列集合:

(1) 所有正奇数;

(2) 不等式 $x^2 + 5x + 6 > 0$ 的解;

(3) 小于 10 的所有正整数的平方数;

(4) 所有 5 的正整数倍数;

(5) 直线 $y = kx + b$ 上所有的点;

(6) 你所在的班级本学期开设的课程的全体.

4. 写出集合 $A = \{3,5,7\}$ 的所有子集,指出其中哪些是真子集.

5. 讨论下列各题中两集合间的关系:

(1) $A = \{x \mid x = 5n, n \in \mathbf{N}, n < 6\}$,　$B = \{5,15,25,10,20\}$;

(2) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \mid x^2 < x\}$;

(3) $A = \{1,3,7,9\}$, $B = \{$小于 10 的正整数$\}$;

(4) $A = \{x \mid (x+1)^2 \leqslant 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\}$.

1.2　集合的运算

一、交集

看下面的例子:

设集合 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, $C = \{1,3\}$,易知,集合 C 的元素正是集合 A 与 B 的所有公共元素.

定义 1　设 A 和 B 是两个集合,把属于 A 且属于 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集,记为 $A \cap B$,读作"A 交 B",即:$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

这里的"$x \in A$ 且 $x \in B$"指的是 $A \cap B$ 的元素要同时属于 A 和 B. 图 1-2 中的阴影部分表示了集合 A 与 B 的交集.

由定义 1 知,上面例子中的集合 C 就是 A 与 B 的交集. 即:$C = A \cap B$.

由定义 1 和图 1-2 可知,$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, $A \cap B = B \cap A$.

对于任意一个集合 A,显然有 $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

求交集的运算称为交运算.

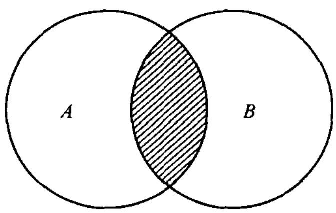

图 1-2

例 1　设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,f,g\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{b,d\}$.

例 2　设 $A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x\mid x>0\text{ 且 }x<3\}=\{x\mid 0<x<3\}$.

二、并集

看下面的例子：

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，$C=\{1,2,3,4,5,7\}$，易知，集合 C 是集合 A 与 B 中的所有元素合并在一起组成的.

定义 2　设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

这里的"$x\in A$ 或 $x\in B$"包括三种情况：①$x\in A$ 但 $x\notin B$；②$x\in B$ 但 $x\notin A$；③$x\in A$ 且 $x\in B$. 图 1-3 中的阴影部分表示了 $A\cup B$ 中元素的几种情况.

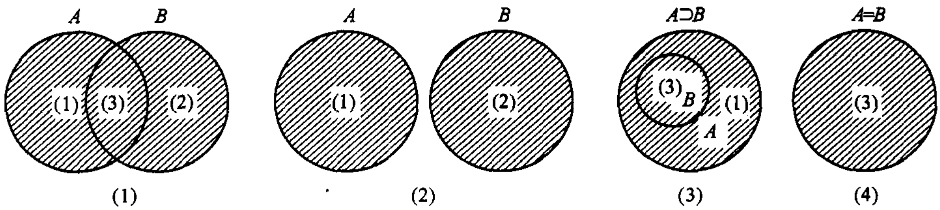

图 1-3

上面例子中的集合 C 就是集合 A 与 B 的并集，可记为 $C=A\cup B$.

由定义 2 及图 1-3 知，对于任意集合 A 和 B 总有：$A\subseteq A\cup B$；$B\subseteq A\cup B$；$A\cup B=B\cup A$；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$.

求并集的运算称为并运算.

例 3　设 $A=\{x\mid x+1<0\}$，$B=\{x\mid x-2>0\}$，求 $A\cup B$.

解　$\because A=\{x\mid x+1<0\}=\{x\mid x<-1\}$，

$B=\{x\mid x-2>0\}=\{x\mid x>2\}$，

$\therefore A\cup B=\{x\mid x<-1\text{ 或 }x>2\}$.

例 4　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，$C=\{-2,0,2\}$. 求 $(A\cup B)\cup C$.

解　$\because A\cup B=\{1,2\}\cup\{-1,0,1\}=\{-1,0,1,2\}$，

$\therefore (A\cup B)\cup C=\{-1,0,1,2\}\cup\{-2,0,2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$.

三、全集和补集

在研究某些集合时，每一个集合都是某一个给定集合的子集，称给定的集合为全集，记为 Ω.

例如，到目前为止，同学们认识的数都是实数，那么由某些数组成的集合就是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，如 $\{1,2,3\} \subset \mathbf{R}$. 因此在讨论有关数集的问题时，常常把 $\mathbf{R}$ 作为全集. 即 $\Omega = \mathbf{R}$.

设集合 A 是全集 Ω 的子集，根据全集的定义可知：

$$A \cup \Omega = \Omega,\ A \cap \Omega = A$$

在图 1-4 中，矩形表示全集 Ω，圆表示 Ω 的子集 A，对于矩形内除 A 以外的(阴影) 部分给出下面定义.

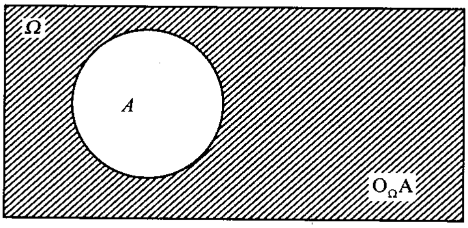

图 1-4

定义 3　设 Ω 是全集，A 为 Ω 的子集，把 Ω 中不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 Ω 中的补集，记为 $C_{\Omega}A$，读作"A 在 Ω 中的补集". 即 $C_{\Omega}A = \{x \mid x \in \Omega 且 x \notin A\}$.

由定义 3 知：

$$A \cup C_{\Omega}A = \Omega, A \cap C_{\Omega}A = \varnothing$$
$$C_{\Omega}\varnothing = \Omega, C_{\Omega}(C_{\Omega}A) = A$$
$$C_{\Omega}(A \cap B) = C_{\Omega}A \cup C_{\Omega}B$$
$$C_{\Omega}(A \cup B) = C_{\Omega}A \cap C_{\Omega}B$$

求补集的运算叫补运算.

注意　补集是对于全集而言的. 例如，设 $\Omega = \{a,b,c,d\}, A = \{a,b\}$ 则 $C_{\Omega}A = \{c,d\}$，如果设 $\Omega = \{a,b,c,d,e,f\}$，则 $C_{\Omega}A = \{c,d,e,f\}$.

例 5　设 $\Omega = \{1,2,3,4,5\}, A = \{3,5\}$ 求：(1) $C_{\Omega}A$; (2) $C_{\Omega}(C_{\Omega}A)$.

解　(1) $C_{\Omega}A = \{1,2,4\}$.

(2) $C_{\Omega}(C_{\Omega}A) = \{3,5\}$.

例 6　设 $\Omega = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x \leqslant -4\}$, $B = \{x \mid x \geqslant 4\}$. 求：(1) $C_{\Omega}A$;

(2) $C_\Omega B$; (3) $C_\Omega A \cap C_\Omega B$.

解　(1) $C_\Omega A = \{x \mid x > -4\}$;

(2) $C_\Omega B = \{x \mid x < 4\}$;

(3) $C_\Omega A \cap C_\Omega B = \{x \mid -4 < x < 4\}$.

习题 1.2

1. 设 $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{0,3,6\}$.求:

(1) $A \cap B$;　　(2) $B \cap C$;

(3) $A \cap B \cap C$;　　(4) $A \cup B$;

(5) $B \cup C$;　　(6) $A \cup B \cup C$;

(7) $(A \cup B) \cap C$;　　(8) $A \cup (B \cap C)$;

(9) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. 设 $A = \{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$, $B = \{x \mid x > 0\}$,求:

(1) $A \cap B$;　　(2) $A \cup B$.

3. 设 $\mathbf{N}$ 是全集,$A = \{n \mid n \in \mathbf{N}$,且 $n \geqslant 5\}$,求:

(1) $C_{\mathbf{N}}A$;　　(2) $A \cap C_{\mathbf{N}}A$;

(3) $A \cup C_{\mathbf{N}}A$.

4. 设 $\mathbf{R}$ 是全集,$A = \{x \mid x \geqslant 7\}$,$B$ 是所有无理数组成的集合,求:

(1) $C_{\mathbf{R}}B$;　　(2) $C_{\mathbf{R}}A$;

(3) $A \cup C_{\mathbf{R}}A$;　　(4) $C_{\mathbf{R}}(C_{\mathbf{R}}B)$.

5. 学校开运动会,设 A = {参加跳绳比赛的同学}, B = {参加百米比赛的同学},求:

(1) $A \cap B$;　　(2) $A \cup B$.

6. 设 $A = \{y \mid y = x^2\}$, $B = \{y \mid y = 1 - x^2\}$,求:

(1) $A \cap B$;　　(2) $A \cup B$.

7. 已知 $\Omega = \mathbf{R}$,$A = \{x \mid x - 16 < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$.求:

(1) $A \cap B$;　　(2) $A \cup B$;

(3) $C_{\mathbf{R}}(A \cap B)$;　　(4) $C_{\mathbf{R}}A \cup C_{\mathbf{R}}B$.

1.3　逻辑用语

逻辑学是研究人类思维规律的学科,它包括辩证逻辑和形式逻辑.形式逻辑是数学推理的基础.本节介绍形式逻辑的一些基础知识.

一、命题

辨别下列语句的真假:

(1) 雪是黑的;

(2) 一年共有300天;

(3) 0是自然数;

(4) $\sqrt{2}$ 是有理数.

易知上面的语句(1),(2),(4)是假的,(3)是真的.

在数学里,一个叙述判断的语句称为命题.命题通常用陈述句表示.正确的命题叫真命题,错误的命题叫假命题.

上面语句(1),(2),(3),(4)都是命题,其中(1),(2),(4)是假命题;(3)是真命题.

然而(1)祝你幸福!(2)你是学生吗?都不是命题.

为简便起见,命题常用大写字母 $P,Q,R,\cdots$ 来表示.例如,P:3大于1,意思是命题 P 为"3大于1".

在同一个命题的讨论中,不能用同一个字母作为两个或两个以上命题的记号.当命题 P 为真时,就说命题 P 取值为1,记作 $P=1$;当命题 P 为假时,就说命题 P 取值为0,记作 $P=0$.这里的"1"和"0"称为真值,凡命题都必须有惟一的真值.

例1　指出下列语句哪些是命题,哪些不是命题,如果是命题,指出它的真假.

(1) 北京不是中国的首都;

(2) -5 不是自然数;

(3) 请保持安静;

(4) 空集是任一非空集合的真子集.

解　(1),(2),(4)都是命题.(3)不是命题;(1)是假命题;(2),(4)是真命题.

二、逻辑联结词

日常语言中,通过"并且"、"或者"、"不"、"当且仅当"等联结词,可将一些命题连接起来构成新命题,即复合命题.

1. 命题的"且"运算

先看下面的例子,房间里的电灯受房间内开关 K_1 和楼里的总闸 K_2 双重控制(如图1-5),只有当 K_1,K_2 都合上时灯泡才会亮.在这里,图1-5所示的逻辑电路中,规定用 P 表示命题"开关 K_1 合上",Q 表示命题"开关 K_2 合上".如果要灯亮,必须有 P,Q 都成立.用"$P\wedge Q$"表示"开关 K_1 合上且开关 K_2 合上".这是命题 P 与命题 Q 通过一种运算得到一个新命题.命题的这种运算称为"且"运算.

一般地,设 P,Q 是两个命题,用且连接 P,Q 得到一个与 P,Q 相关的新命题记为 $P\wedge Q$,读作"P 且 Q".将 $P\wedge Q$ 称为 P 与 Q 的"且"运算.

表1-1是 $P\wedge Q$ 的真值表.

由表 1-1 知,只有当 P 和 Q 同时为真时,$P \wedge Q$ 才为真,否则 $P \wedge Q$ 为假.

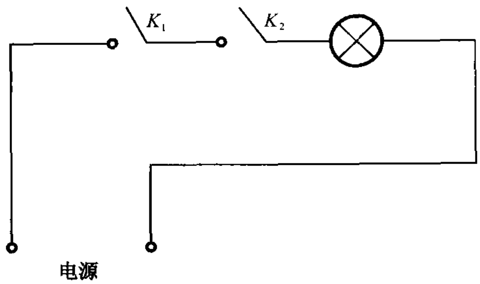

图 1-5

表 1-1

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例 2　指出下列命题的真值:

(1) P:$\frac{1}{3}$ 是有理数且 $\frac{1}{3} < 0$;

(2) Q: 12 是偶数且 12 是 4 的倍数;

(3) S:数学是一门基础课且应用广泛.

解　(1) 因为"$\frac{1}{3}$ 是有理数" 为真,"$\frac{1}{3} < 0$" 为假,所以 P 为假命题,P 的真值为 0.

(2) 因为"12 是偶数" 为真,"12 是 4 的倍数" 为真,所以 Q 为真命题,Q 的真值为 1.

(3) 因为"数学是一门基础课" 为真,"数学应用广泛" 为真,所以 S 为真命题,S 的真值为 1.

2. 命题的"或" 运算

一间房子里有一盏电灯,为了使用方便,装有两个开关 K_1,K_2,当开关 K_1 或开关 K_2 合上时电灯就亮,自然,若两个开关同时合上时,电灯也会亮(如图 1-6 所示).在这里,图 1-6 所示电路为一逻辑电路,它规定,用 P 表示命题"开关 K_1 合上",用 Q 表示命题"开关 K_2 合上",如果要灯亮,需要有 P 成立或 Q 成立.用 $P \vee Q$ 表示"开关 K_1 合上或开关 K_2 合上".这也是命题 P 与命题 Q 通过一种运算得到的一个新命题.命题的这种运算称为"或" 运算.

一般地,设 P 与 Q 是两个命题,用"或" 连接 P,Q 得到一个与 P,Q 相关的新命题,记作"$P \vee Q$",读作"P 或 Q",将 $P \vee Q$ 称为 P 与 Q 的"或" 运算.

表 1-2 是 $P \vee Q$ 的真值表.由表 1-2 知,P 与 Q 至少一个为真时,$P \vee Q$ 为真当 P 与 Q 同时为假时,$P \vee Q$ 为假.

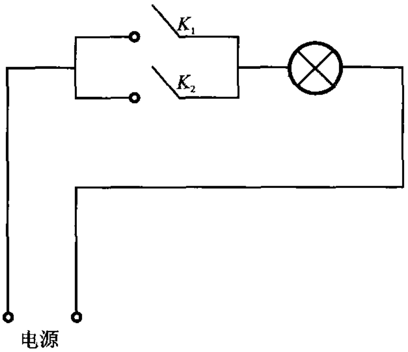

图 1-6

表 1-2

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例 3　指出下列命题的真假,并指出其真值.

(1) P:$8 \leqslant 7$;

(2) Q: $\sqrt{9} = 3$ 或$\sqrt{9} = -3$;

(3) S: 对于任意实数 a, $\sqrt{a^2}$ 等于 a 或 $-a$.

解　(1) 因为 $8 \leqslant 7$ 是指 $8 < 7$ 或 $8 = 7$,这两个命题都是假命题,所以 P 是假命题,即 $P = 0$.

(2) 因为$\sqrt{9} = 3$ 是真的,$\sqrt{9} = -3$ 是假的,所以 Q 是真命题,即 $Q = 1$.

(3) 因为当 $a \geqslant 0$ 时,$\sqrt{a^2} = a$; 当 $a < 0$ 时,$\sqrt{a^2} = -a$,所以 S 是真命题,即 $S = 1$.

3. 命题的“非”运算

对以下命题:

P:0 是自然数; Q: 0 不是自然数; S: 4 是奇数; T: 4 不是奇数.
易知,命题 P,T 是真命题; Q,S 是假命题; 命题 P 是Q 的否定; S 是T 的否定.

一般地,设 P 是命题,则 P 的否定也是命题,记为“$\neg P$”,读作“非 P”. 我们将 $\neg P$ 称为P 的“非”运算.$\neg P$ 与P 的真值恰好相反,其真值如表 1-3.

表 1-3

P	$\neg P$
1	0
0	1

例 4　写出下列命题的非,并确定其真假:

(1) P:6 是偶数;

(2) Q: $-1,1,2$ 都是自然数;

(3) S: $|0|$, $|3|$ 都等于 0;