全国各类成人高等学校招生考试专用教材

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套教材

梯田经典教材系列

Classic Textbook Series

Specialized Textbooks for National Entrance Examinations for Adult's Colleges

MATHEMATICS

数 学

理工农医类

高中起点升本、专科

最新版 第7版

主编 刘其隆

中国人事出版社

梯田经典教材系列

全国各类成人高等学校招生考试专用教材

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套教材

（高中起点升本、专科）

数　　学

理工农医类

（第7版）

主编　刘其隆

中国人事出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高等学校招生考试专用教材.数学.理工农医类/刘其隆主编.
—7版.—北京:中国人事出版社,2002.8
高中起点升本、专科
ISBN 7-80139-896-3

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学—成人教育:高等教育—入学考试—教材 Ⅳ.G723.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第059991号

责任编辑:杜 方
封面设计:田 健
责任校对:张 明

中国人事出版社出版

(100101 北京朝阳区育慧里5号)

新 华 书 店 经 销
廊坊人民印刷厂

*

2002年8月第7版 2002年8月第1次印刷
开本:850×1168毫米 1/16 印张:25.5
字数:675千字 印数:1—20000册
定价:32.00元

说　明

为使成人高等学校招生更加适应社会经济和成人高等教育发展的需要，教育部决定从 2003 年起，对现行全国成人高校招生考试科目设置进行调整。此次调整的具体内容为：

高中起点升专科（含高职）、高中起点升本科考试仍按文科、理科分别设置统考科目。其中，高中起点升专科（含高职）统考科目为语文、数学（分文科类、理科类两种，下同）、外语 3 门，主要考查考生是否具备接受高等专科层次教育的最基本要求；考虑到本科教育与专科教育培养目标和教学要求的不同，报考高中起点升本科的统考科目的理科类考生增加一门“物理化学综合科目”（简称物化），文科类考生增加一门“历史地理综合科目”（简称史地）。每个科目考试时间均为 120 分钟。除上述统考科目外，招生院校还可以根据专业要求决定是否对考生加试一门考试科目，加试科目由招生院校自行命题并组织考试。（见下表）

高中起点升本科、专科（含高职）考试科目设置一览表

报考科类		考试科目	
		统一命题考试科目	加试科目
高中起点升本科	理科	语文　数学（理）　外语　物化	招生院校确定
	文科	语文　数学（文）　外语　史地	
高中起点升专科、高中起点升高职	理科	语文　数学（理）　外语	
	文科	语文　数学（文）　外语	

同时，教育部于 2002 年 8 月颁布了新的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》，新考试大纲从考试科目、考试内容、考试题型、命题方向等方面都作了一系列重大调整。

本套教材正是按照调整考试科目后的新大纲修订或重新编写的。

本套教材于 1997 年首次出版，由于其独具的特点和风格，立即获得了广泛的好评。其间，经过 5 年的反复修订，已成为质量上乘、极具权威性的复习教材，成为各地教委、学校、辅导班、学员的首选学习教材，在全国享有较好声誉。

本次修订和重编，我们主要遵循和坚持三个原则：

1. 权威的作者队伍。本套教材的主编和参订工作的编委、审定人员中，部分人员参与了教育部颁布的新大纲的编写及审定，部分人员参与了命题研究，部分人员是一线教学骨干。这些成员都是对 2002 年颁布的新大纲的内容和要求了如指掌的成人教育界的专家、学者，从而保证了本套教材的权威性。

2. 严格遵循科目调整后的新大纲的要求。

3. 遵循成人学习的特点和规律。充分考虑到成人高考考生的水平、素质参差不齐的客观实际。

新版教材包括语文、数学(分文科、理科)、英语、物理化学综合科(分物理分册、化学分册)、历史地理综合科(分历史分册、地理分册)6 科,共计 8 册,供参加全国各类成人高等学校招生考试高中起点升专科(含高职)、本科的考生使用。

新版教材具有如下特点:

1. 同步覆盖。新版教材与新考纲完全同步,覆盖新考纲要求的全部知识点。

2. 科学的可操作性。新版教材既体现新大纲的要求,又兼顾学科的系统性和知识的连贯性。课文内容由浅入深,通俗易懂,利教易学。精编各章练习,从知识范围、能力层次要求、题型结构等方面适应新大纲的要求。

3. 人性化处理模式。采用双色印刷的新颖形式,突出重点、难点;采用新的教材开本,利于学生翻阅学习。

本次修订工作中,我们组织了部分省市及高等院校的在一线教学的教师进行了座谈和交流,积极采纳了他们的建议和意见,在此表示感谢。

《数学》(理工农医类)由刘其隆副教授主编。参加本次修订工作的有张长胜、逯新丽、刘其隆三位老师,由刘其隆副教授主持。

为了把本书编得更好,欢迎读者对本书存在的不足之处批评指正,待再版时进一步修订完善。

编　者

2002 年 8 月

目　　录

第一部分　代数

第二部分　平面三角

第三部分　平面解析几何

第四部分　立体几何

第五部分　概率与统计初步

第一部分 代 数

预备知识

第一节 实数及其概念

一、实数的基本概念

(一)实数系

1. 有理数

整数和分数统称有理数. 有理数可用最简分数$\frac{p}{q}$(p、q互质)表示. 整数可以看成分母是1的分数.

任何一个有理数都可以写成有限小数(整数看成小数点后是零的小数)或循环小数的形式,反过来也对,即任何有限小数和循环小数都是有理数.

2. 无理数

无限不循环小数叫做无理数.

如:$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$;$\pi=3.14159265\cdots$

3. 实数

有理数和无理数统称为实数.

实数可以按照下面的方法分类:

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{零}\end{array}\right\}(\text{自然数})\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\text{有限小数或循环小数}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

(二)有关实数的基本概念

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做**数轴**(图0-1-1).

原点、正方向和单位长度称为数轴的三要素.

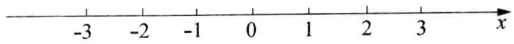

图 0-1-1

每个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反之，数轴上的每一个点又都可以表示一个实数. 也就是说：实数和实数轴上的点是一一对应的.

在数轴上的任意两个点中，右边的点所对应的实数总大于左边的点所对应的实数.

2. 相反数

在数轴上分别在原点的两旁、离开原点的距离相等的两个点所对应的数叫做**互为相反数**.

也就是说，只有符号不同的两个数叫做互为相反数，零的相反数是零.

例如：5 和 -5，$\sqrt{2}$和 $-\sqrt{2}$分别互为相反数.

3. 倒数

1 除以一个数的商叫做这个数的**倒数**. 零没有倒数. 例如，3 和$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{2}$和 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$分别互为倒数. 若 $a\neq 0$，a 的倒数是$\frac{1}{a}$，也就是 a 和$\frac{1}{a}$互为倒数. 又因为 $a\cdot\frac{1}{a}=1$，所以，若 $ab=1$，则 a、b 互为倒数，反之也对.

4. 绝对值

在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离叫做这个数的**绝对值**. a 的绝对值表示为$|a|$.

因此，一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 用式子表示为

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

例如　$|5|=5$，$|-5|=5$，$|0|=0$.

由于在数轴上右边的点所表示的数比左边的点所表示的数大，因此，在两个实数 a、b 之间存在而且只存在下面的三种关系之一：

$$a>b \qquad a=b \qquad a<b$$

还有：正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小.

二、实数的运算

（一）基本运算

在实数范围内可以进行加、减、乘、除、乘方等运算，即实数加、减、乘、除（除数不能是零）、乘方所得结果仍是实数；任何实数可以开奇次方，结果仍是实数，非负实数可以开偶次方，结果仍是实数，负数不能开偶次方.

（二）运算法则

加法：同号两数相加，把加数绝对值相加，并取原来的符号；异号两数相加，用加数中较大绝对值减去较小绝对值，并取绝对值较大加数的符号.

减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数.

乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘，零乘以任何数都得零.

除法：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除. 零不能作除数. 除以一个数等于乘以这个数的倒数，即　$a\div b=a\times\frac{1}{b}(b\neq 0)$

乘方:几个相同的因数相乘的运算叫做**乘方**,乘方所得结果叫做**幂**.如

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots\cdots \cdot a}_{n个} = a^n$$

其中 a 叫做**底数**,n 叫做**指数**,a^n 表示有 n 个 a 相乘所得的积,叫做 **a 的 n 次幂**,n 是正整数.a^n 也叫 a 的**正整数次幂**.

正数的任何次幂都是正数;负数的偶次幂是正数,奇数次幂是负数;零的正整数次幂是零.

例如 $(-2)^4 = 2^4 = 16$;$(-2)^5 = -2^5 = -32$;$0^3 = 0$.

开方:如果 $x^n = a$(n 是大于 1 的整数),那么 x 叫做 **a 的 n 次方根**.

求 a 的 n 次方根运算,叫做把 a 开 n 次方,简称**开方**.a 叫被开方数,n 叫做根指数.

正数的奇次方根是一个正数,正数的偶次方根有两个,它们互为相反数;零的 n 次方根是零;负数的奇次方根是一个负数,在实数范围内,负数没有偶次方根.

在本章第二节我们将重点研究二次根式的有关内容,n 次根式的有关运算问题放在第二章第四节.

(三)运算律

设 a,b,c 是任意实数

交换律:$a+b=b+a$　　　　$a \cdot b = b \cdot a$.

结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$　　　　$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

分配律:$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$　　　　$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(四)运算顺序

在一个算式中,应先算乘方、开方,再算乘、除,最后算加、减;有括号时,应先算括号里的;若有几层括号,应从最里层的括号算起,逐层向外去掉括号,必要时,可根据运算律改变上述运算顺序.

【例 1】 判断题

(1)一个有理数的 5 倍一定大于这个有理数.(　　)

(2)两个互为相反数的绝对值相等.(　　)

(3)零除以任何有理数都等于零.(　　)

(4)一个数的绝对值一定是正数.(　　)

(5)若两个数的乘积等于 1,则这两个数互为倒数.(　　)

(6)若 a 为有理数,则 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$.(　　)

(7)若 $|a|>|b|$,则 $a>b$.(　　)

(8)若 $a^2>b^2$,则 $a>b$.(　　)

(9)3.1415 是无理数.(　　)

(10)两个无理数的和一定是无理数.(　　)

(1)答案　×.

[分析]　若这个数是 -3,$5\times(-3)=-15$,而 $-15<-3$.

(2)答案　✓.

(3)答案　×.

[分析]　除数若等于零,这个除式无意义.

(4)答案　×.

[分析]　零的绝对值是零,不是正数.

(5)答案　✓.

(6)答案　×.

[分析]　若 $a=0$,则 $\frac{1}{a}$ 没意义.

(7)答案　×.

[分析]　若 $a=-5,b=3,|-5|>|3|$,而 $-5<3$.

(8)答案　×.

[分析]　因为 $(-5)^2>(-3)^2$,而 $-5<-3$.

(9)答案　×.

[分析]　因为 3.1415 是有限小数,是一个有理数.

(10)答案　×.

[分析]　因为 $\sqrt{2}$ 与 $-\sqrt{2}$ 都是无理数,而 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$.

【例 2】　选择题

(1) $m+n$ 的相反数是(　　)

(A) $m-n$　　(B) $n-m$　　(C) $-m-n$　　(D) $n+m$

(2)若 $a<0$,则 a 与 $-a$ 的大小关系是(　　)

(A) $a<-a$　　(B) $a\leqslant -a$　　(C) $a>-a$　　(D) $a\geqslant -a$

(3)若 $|m|=|n|$,则 m,n 的关系是(　　)

(A) $m=n$　　(B) $m=-n$　　(C) $m=n$ 或 $-n$　　(D) $-m=n$

(4)一个数的相反数是非负数,那么这个数是(　　)

(A)正数　　(B)正数或零　　(C)负数　　(D)负数或零

(5)如果 $|a|+|b|=0$,则 a,b 的值(　　)

(A)互为相反数　　(B)互为倒数　　(C) $a=0,b=0$　　(D) $a>0,b<0$

(6)有理数中有(　　)

(A)最大数　　(B)最小数　　(C)绝对值最大的数　　(D)绝对值最小的数

(1)答案　(C).

[分析]　因为 $m+n$ 的相反数是 $-(m+n)=-m-n$.

(2)答案　(A).

[分析]　因为 $a<0$ 时 $-a>0$,所以 $a<-a$.

(3)答案　(C).

[分析]　根据绝对值的定义可知.

(4)答案　(D).

[分析]　因为负数的相反数是正数,零的相反数是零.非负数包括零和正数.

(5)答案　(C).

[分析]　因为 $|a|\geqslant 0,|b|\geqslant 0$,所以 $|a|+|b|\geqslant 0$,如果 $|a|+|b|=0$,那么只可能 $|a|=0$,$|b|=0$,即 $a=0,b=0$.

(6)答案　(D).

[分析]　绝对值最小的数是 0.

【例 3】　填空题

(1) $\frac{4}{5}$ 的相反数的倒数是______.

(2)若 $a=\frac{1}{a}(a\neq 0)$,则 $a=$______.

(3)若 $a<0$,则 $a+|a|=$______.

(4)若 $|x|=|-4|$,则 $x=$______.

(5)若 $|x-1|=2$,则 $x=$______.

(6)若 n 是正整数,则 $(-1)^{2n}=$______,$(-1)^{2n+1}=$______.

(1)答案　$-\frac{5}{4}$.

[分析]　因为 $\frac{4}{5}$ 的相反数是 $-\frac{4}{5}$,$-\frac{4}{5}$ 的倒数是 $-\frac{5}{4}$.

(2)答案　± 1.

(3)答案　0.

[分析]　因为 $a<0$,$|a|=-a$,所以　$a+|a|=a-a=0$.

(4)答案　± 4.

[分析]　因为 $|x|=|-4|=4$,所以　$x=\pm 4$.

(5)答案　-1 或 3.

[分析]　因为 $|x-1|=2$,所以　$x-1=\pm 2$,故 $x=3$ 或 $x=-1$.

(6)答案　$1,-1$.

[分析]　因为 n 为正整数,$2n$ 为偶数,则 $(-1)^{2n}=1$,$2n+1$ 为奇数,则 $(-1)^{2n+1}=-1$.

【例4】　计算下列各式:

(1) $-0.75^2\div\left(1\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^8\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

(2) $\left[2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\times(-2)\div\frac{1}{6}\right]\times(-6)$

(3) $1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{5}-2^2\div\left(\frac{1}{4}-1\div\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{19}$

解　(1)原式 $=-\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\times\frac{1}{6}=-\frac{9}{16}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$

(2)原式 $=\left[\frac{7}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}\times 6\right]\times(-6)=\left(-\frac{7}{6}+8\right)\times(-6)$

$=-\frac{7}{6}(-6)+8(-6)=7-48=-41$

(3)原式 $=\frac{5}{3}-\left[\frac{28}{5}-4\div\left(\frac{1}{4}-1\times 3\times\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{19}$

$=\frac{5}{3}-\left[\frac{28}{5}-4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\right]\times\frac{1}{19}$

$=\frac{5}{3}-\left[\frac{28}{5}-4\div(-2)\right]\times\frac{1}{19}$

$=\frac{5}{3}-\left(\frac{28}{5}+2\right)\times\frac{1}{19}$

$=\frac{5}{3}-\frac{38}{5}\times\frac{1}{19}=\frac{5}{3}-\frac{2}{5}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$

说明　**在计算时,一定要注意运算顺序,特别是在进行连续乘除运算时,一定要按题中原来先**

后顺序运算，如 $-1\div\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$，切不可以先计算 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$，正确的是先除后乘得 $1\times3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.

【例5】 解答下列各题

(1)若 $a>0,b<0$，化简 $|a+1|+|b-1|-|b-a|$

(2)化简 $|2x-3|+2x-3$

(3)化简 $|x+1|+|x-3|$

解

(1)$\because$ $a>0,b<0$

$\therefore$ $a+1>0,b-1<0,b-a<0$

$\therefore$ $|a+1|=a+1,|b-1|=-(b-1)=1-b,|b-a|=-(b-a)=a-b$

$\therefore$ 原式 $=(a+1)+(1-b)-(a-b)=a+1+1-b-a+b=2$

(2)当 $2x-3\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|2x-3|+2x-3=2x-3+2x-3=4x-6$

当 $2x-3<0$，即 $x<\frac{3}{2}$ 时，$|2x-3|+2x-3=-(2x-3)+2x-3=0$

(3)$\because$ $x=-1$ 时，$x+1=0$；$x=3$ 时，$x-3=0$

当 $x<-1$ 时，原式 $=-(x+1)-(x-3)=-2x+2$

当 $-1\leqslant x<3$ 时，原式 $=(x+1)-(x-3)=4$

当 $x\geqslant3$ 时，原式 $=(x+1)+(x-3)=2x-2$.

说明　式中含有两个绝对值时，应先找使每一个绝对值等于 0 的字母的值. 这两个值将实数从小到大分成三段，然后分别在三段内去掉绝对值符号，如果含有两个以上绝对值，也按如上方法，只是把实数分成的段是 3 个以上.

【例6】 若 $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+|2b-1|=0$，求 a^2-b^2 的值.

解　$\because$ $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0,|2b-1|\geqslant0$

$\therefore$ 若 $(a+\frac{1}{2})^2+|2b-1|=0$，只有 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 时才能成立.

$\therefore$ $a^2-b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$

第二节　代　数　式

一、代数式

(一)代数式的概念

用加、减、乘、除、乘方、开方等运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式.

单独一个数或一个字母，也叫**代数式**.

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做**代数式的值**.

(二)代数式的分类

代数式包括有理式和无理式，有理式包括整式和分式，整式包括单项式和多项式. 代数式的分类可表示如下：

$$代数式\begin{cases}有理式\begin{cases}整式\begin{cases}单项式\\多项式\end{cases}\\分式\end{cases}\\无理式\end{cases}$$

二、有理式

(一)整式

1. 整式的有关概念

(1)单项式　由几个数字和字母相乘所得到的代数式,叫做单项式. 如$\frac{1}{2}x$, $-4a^2b$ 等都是单项式.

单独一个数或一个字母也是单项式,如, -2, a 等也是单项式.

(2)多项式　几个单项式的和叫做多项式. 多项式中的每一个单项式叫做多项式的项.

例如:$6x^2+(-5x)+\frac{1}{2}$是多项式,简写为 $6x^2-5x+\frac{1}{2}$,其中 $6x^2$, $-5x$, $\frac{1}{2}$都是这个多项式的项.

2. 整式的运算

(1)幂的运算法则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0, m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

(2)合并同类项

在一个多项式里,所含字母相同,并且相同字母的指数也相同的项,叫做同类项.

例如:$4xy^2+3x^2y+2x-3+2xy^2-2x^2y-3y+5$ 中 $4xy^2$ 和 $2xy^2$, $3x^2y$ 和 $-2x^2y$ 分别是同类项,不含字母的项叫做常数项,常数项也是同类项,如多项式中 -3 和 5.

把多项式中的同类项合并成一项,叫做合并同类项. 方法是,把同类项的系数相加,所得结果为系数,字母和字母的指数都不变.

(3)加、减法运算

整式的加、减运算,实际上就是合并同类项,如遇到括号,就根据去括号法则,先去括号,再合并同类项.

例如:$(3a^2-2ab+b^2)-(2a^2+ab+b^2)=3a^2-2ab+b^2-2a^2-ab-b^2=a^2-3ab$

(4)乘法和乘方

整式的乘法和乘方主要运用幂的乘法和乘方的法则. 整式的乘法包括:

单项式乘以单项式所得结果是单项式. 方法是把系数相乘作为积的系数,并把同底数的幂相乘,对于只在一个单项式里有的字母,连同它们的指数作为积的一个因式.

例如:$-3x^2y^3z \times 2x^2y = -6x^4y^4z$

单项式乘以多项式:用单项式去乘多项式的每一项,再把所得积相加,即

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc$$

多项式乘以多项式:先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式,再把所得的积相加,即

$$\begin{aligned}(a+b)(m+n)&=a(m+n)+b(m+n)\\&=am+an+bm+bn\end{aligned}$$

(5)整式的除法(此部分内容合并在分式中讲解)

3. 乘法公式

平方差公式： $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

立方和与立方差公式：

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

完全立方公式：

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

4. 多项式的因式分解

(1)概念

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解，也叫**分解因式**.

多项式的因式分解与整式乘法是互逆的两个恒等变形的过程.

(2)因式分解的方法

A. 提取公因式法：

如： $$ma+mb+mc=m(a+b+c)$$

B. 公式法：

把乘法公式反过来用，就是因式分解公式.

C. 十字相乘法：

对某些二次三项式 ax^2+bx+c，如果能有 $a=a_1\cdot a_2$，$c=c_1\cdot c_2$，且 $a_1c_2+a_2c_1=b$，则

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$$

这个方法可按如下排列：

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

按斜线交叉相乘的积的和就是 $a_1c_2+a_2c_1$，它应当正好等于 b，把这种因式分解的方法叫做十字相乘法.

例如： $$2x^2-x-6=(x-2)(2x+3)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 2 & & 3 \end{array} \qquad 1\times3+2\times(-2)=-1$$

特别的，对某些二次三项式 x^2+px+q，如果有 $q=m\cdot n$，且 $m+n=p$，则

$$x^2+px+q=(x+m)(x+n)$$

例如： $$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

用十字相乘法分解二次三项式，一般在它有有理根的情况下可以分解.

若一个二次三项式有无理根，则可按求根公式分解因式，这种方法在下一节中介绍.

D. 分组分解法：

把多项式的项分成若干组，各组能提取公因式或用公式分解或不动，各组之间有公因式或能用公式，最后化为积的形式.

例如：$ma+mb-na-nb=(ma+mb)-(na+nb)$

$=m(a+b)-n(a+b)=(a+b)(m-n)$

分解因式时，若各项有公因式应先提取公因式，然后再考虑其他方法，在用分组分解法时，要预见到下一步分解的可能性.

(二)分式

1. 概念

如果 A,B 是两个整式,且 B 中含有字母,那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**,其中 B 的值不能为零.

2. 基本性质

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变,即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}(M\text{ 为不等于零的整式})$$

3. 约分和通分

约分:把一个分式的分子与分母的公因式约去,叫做分式的**约分**.

分子与分母没有公因式的分式叫做最简分式.

通分:根据分式的基本性质,把几个异分母的分式化成与原来分式相同的同分母的分式,叫做分式的**通分**.

4. 分式的运算

加、减法:先通分,变成同分母的分式,分子相加减,分母保持不变,即

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

乘、除法:分式乘以分式,用分子的积作为积的分子,分母的积作为积的分母,即

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

分式除以分式,将除式的分子、分母颠倒后,与被除式相乘,即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

乘方:分式乘方,将分子、分母分别乘方,即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{ 为正整数})$$

三、二次根式

上一节,我们已经知道了 n 次方根的概念.一般地,表示方根的式子就叫做根式,这里我们将重点讨论有关二次方根的问题.

(一)平方根和算术平方根

如果 $x^2=a$,那么 x 叫做 a 的**二次方根(也叫平方根)**.

一个正数有两个平方根,它们互为相反数,零的平方根是零.负数没有平方根.

正数 a 的正的平方根,用 $\sqrt{a}$ 表示,零的平方根也可以表示为 $\sqrt{0}$.

例如:4 的平方根是 $\pm\sqrt{4}=\pm2$.

正数 a 的正的平方根,叫做 a 的算术平方根.零的算术平方根是零.

(二)二次根式

1. 概念:式子 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 叫做**二次根式**.

2. 二次根式的性质

$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

3. 最简二次根式

满足下列两个条件的二次根式称为最简二次根式.

(1)被开方数的每一个因式的指数都小于根指数2;(2)被开方数不含分母.

如:$\sqrt{3}$, $\sqrt{ab}$都是最简二次根式.

4. 同类二次根式

几个二次根式化成最简二次根式以后,如果被开方数都相同,那么这几个二次根式叫做同类二次根式.

例如:$\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$ 是同类二次根式,因为$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

(三)二次根式的运算

1. 加、减法:先把各二次根式化为最简二次根式,再把同类二次根式合并.

例如:$\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{32}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

2. 乘、除法:

法则: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$　　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

(四)分母有理化

化去分母中的根号,叫做把**分母有理化**.

1. 有理化因式

两个含有二次根式的代数式相乘,如果积不含二次根式,那么称这两个代数式互为**有理化因式**.

例如:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a(a>0)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b(a>0,b>0)$

$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{a}-\sqrt{b}$分别互为有理化因式.

2. 分母有理化的方法

把分母有理化时,一般是把分子和分母都乘以分母的有理化因式.

二次根式的除法,可以先写成分式的形式,再通过分母有理化进行.

【例1】 填空题

(1)当$x=-1,y=-2$时,代数式$2x^2-y+3$的值是______.

(2)若$3a^3b^{2x}$与$\frac{1}{3}a^3b^{4x-2}$是同类项,则$x=$______.

(3)已知$|a+4|+b^2+6b+9=0$,则$a-b=$______.

(4)$4xz\cdot(-2xy^3)=$______.

(5)$(x-2)(2x-1)=$______.

(6)当$x\neq y$时,$(x^3-y^3)\div(x-y)=$______.

(7)$a^2+\frac{1}{16}b^2+$______$=(a+\frac{1}{4}b)^2$.

(8)当$x=$______时,分式$\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$无意义.

(9)二次根式$\sqrt{18}$,$\sqrt{\dfrac{1}{27}}$,$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$中为同类根式的是______.

(10)计算$\sqrt{\frac{(-2)^2}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}=$______.

(1) 答案 7.

[分析] 当 $x=-1,y=-2$ 时,$2x^2-y+3=2\times(-1)^2-(-2)+3=2+2+3=7$

(2) 答案 1.

[分析] $\because\ 2x=4x-2\ \therefore\ x=1$

(3) 答案 -1.

[分析] $\because\ |a+4|+b^2+6b+9=0$ 化为 $|a+4|+(b+3)^2=0$

$\therefore\ a=-4,\ b=-3\ \therefore a-b=-4-(-3)=-1$

(4) 答案 $-8x^2y^3z$.

[分析] 用单项式乘以单项式的法则.

(5) 答案 $2x^2-5x+2$.

[分析] $(x-2)(2x-1)=2x^2-x-4x+2=2x^2-5x+2$

(6) 答案 x^2+xy+y^2.

[分析] 因为 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$,所以$(x^3-y^3)\div(x-y)=x^2+xy+y^2$

(7) 答案 $\frac{1}{2}ab$.

[分析] $\because\ a^2+$____$+\frac{1}{16}b^2=(a+\frac{1}{4}b)^2$;即 a^2+____$+(\frac{1}{4}b)^2=(a+\frac{1}{4}b)^2$

$\therefore\ 2\cdot a\cdot\frac{1}{4}b=\frac{1}{2}ab$

(8) 答案 0 或 -1.

[分析] $\because\ x=0$ 时,$\frac{1}{x}$无意义;$x=-1$ 时,$1+\frac{1}{x}=0$,原分式无意义.

$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=-1$ 时分式无意义.

(9) 答案 $\sqrt{18}$和$\sqrt{\frac{1}{2}}$.

[分析] $\because\ \sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$;$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{1\times3}{3^3\times3}}=\frac{1}{9}\sqrt{3}$;$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\times2}{2\times2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore\ \sqrt{18}$和$\sqrt{\frac{1}{2}}$是同类根式.

(10) 答案 $-\frac{1}{3}\sqrt{3}-1$.

[分析] 原式$=\sqrt{\frac{2^2\times3}{3\times3}}-\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2}{3}\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=-\frac{1}{3}\sqrt{3}-1$

【例 2】 选择题

(1)对于式子①xyz ②$x^2-xy+\frac{1}{y^2}$, ③$\frac{1}{x}-2$ ④$\frac{x^2-3x+1}{x-1}$ ⑤$\frac{1}{2}x+y$ 判断正确的是

( )

(A)①、③是单项式 (B)②是二次三项式

(C)②、④、⑤是多项式 (D)①、⑤是整式