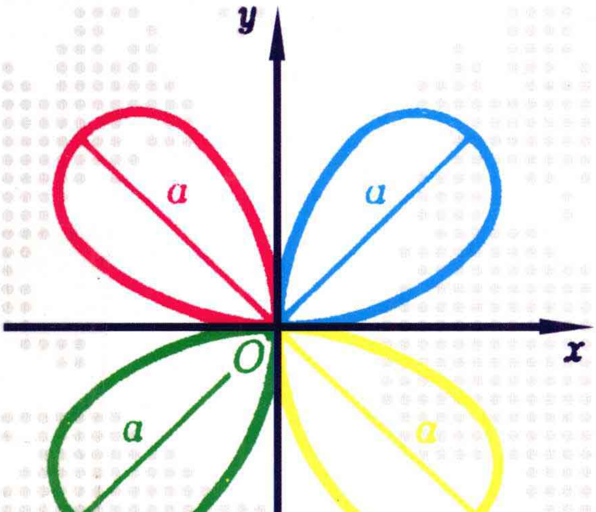
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

上册

瞿晓鸿　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

上册

主　编　瞿晓鸿
副主编　刘晓莉　宋春玲　杨　勇

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书融入了编者多年的教学实践经验，编写宗旨是：（1）立足高等教育大众化的发展趋势；（2）参照教育部颁发的高等学校本科（非数学类专业）高等数学课程教学大纲的要求；（3）与中学数学充分衔接。

本书分上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和常微分方程等七章内容。书末附有几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

本书力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂、题型广泛，适应面广。适用于理工类、经济类、农医等各专业的学生使用，也可供成人本科教育和高等职业教育选用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/瞿晓鸿主编．—北京：中国铁道出版社，2011.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-13073-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①瞿… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 156037 号

书　　名：**高等数学·上册**
作　　者：瞿晓鸿　主编

策划编辑：李小军
责任编辑：李小军　　　**读者热线电话**：400-668-0820
编辑助理：王　芳
封面设计：付　巍　　　**封面制作**：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（北京市宣武区右安门西街 8 号　　**邮政编码**：100054）
印　　刷：航远印刷有限公司
版　　次：2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：700×1000mm　**印张**：18　　**字数**：364 千
书　　号：ISBN 978-7-113-13073-2
定　　价：29.80

前　言

该系列教材的编写原则是：适用理工类、经济类、农医类等专业的本科学生。也可供成人本科教育、高等职业教育选用。

为培养学生理论联系实际、应用数学知识分析问题和解决问题的能力，该系列教材在编写过程中特别注重现代数学思想和方法的运用；重点讲解数学的基本概念、基本理论、基本思想、基本方法和应用背景；突出强调科学性、系统性和准确性；合理处理具体与抽象、定量与定性、直观判断与逻辑推理等关系。

该系列教材对课程内容进行了系统的优化，力求既能降低学习难度又能保证课程教学的基本要求。

根据我们所积累的丰富教学经验和多年的教学改革实践，按照高等教育大众化的发展趋势，进一步对国内外优秀教材进行了对比研究，形成了本教材的特点：

1.与中学数学充分衔接，反映了当前高等数学教学理念和教学内容的改革趋势；

2.强化了数学知识在实际生活中以及在专业上的应用，与专业结合紧密，力求理工类、经济类、农医类等专业均能使用；

3.突出极限的本质，以加深极限的思想；

4.以几何直观、实际背景或典型例题等作为引入基本概念的切入点；从多个侧面对重要概念、重要定理、难点内容进行剖析和注解，做到难点分散，便于学生理解与掌握；

5.用同一个数学方法给出了定积分、二重积分、三重积分、第一类曲线积分和第一类曲面积分的概念和思想，以降低对多元函数积分的理解和学习难度。

参加本书编写工作的有佛山科学技术学院瞿晓鸿、刘晓莉、宋春玲、杨勇等老师。限于编者的水平和时间仓促，本教材一定存在不妥之处，望广大读者不吝赐教。

编　者

二零一一年五月

目　录

第 1 章

函数与极限

高等数学的研究对象是变量，函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法.本章先复习和深入讨论映射与函数的有关知识，再介绍极限与函数连续性的基本概念及其性质.

1.1 函数

1.1.1 集合

1. 集合概念

定义 1.1 **集合**是指具有某种特定性质的事物的总体.常用 A,B,C 等大写字母表示.组成集合的事物称为集合的**元素**，常用 a,b,c 等小写字母表示.

a 是集合 M 的元素，表示为 $a\in M$；a 不是集合 M 的元素，表示为 $a\notin M$.

集合有两种表示法：

(1)列举法：把集合的全体元素按任何顺序、不遗漏、不重复地一一列举出来.

(2)描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

常用的数集有：

所有自然数构成的集合称为**自然数集**，用 $\mathbf{N}$ 表示

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\},\mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

所有实数构成的集合称为**实数集**，用 $\mathbf{R}$ 表示

所有整数构成的集合称为**整数集**，用 $\mathbf{Z}$ 表示

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

所有有理数构成的集合称为**有理数集**，用 $\mathbf{Q}$ 表示

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

2. 集合的关系

若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$.

如果集合 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

3. 集合的运算

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

如果我们研究的问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为全集或基本集，称 $I\setminus A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c.

集合满足的运算法则：设 A、B、C 为任意三个集合，则：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4)对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

$x\in(A\cup B)^c\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Leftrightarrow x\in A^c\cap B^c$，

所以　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任取一个元素 x，在集合 B 中任取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**(或**笛卡儿乘积**)，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

4. 区间和邻域

设 $a<b$，称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地有

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**.

其中 a 和 b 称为区间 (a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$ 的**端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**. 以上统称为**有限区间**，在数轴上可表示为(图 1-1(a)，(b))：

图 1-1

数集

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,|x|<+\infty\}.$$

统称为**无限区间**，在数轴上可表示为(图 1-2(a)，(b))：

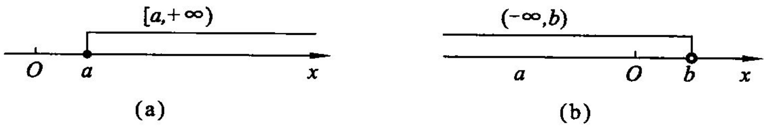


图 1-2

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$. 设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(图 1－3). 将数集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为**点 a 的去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

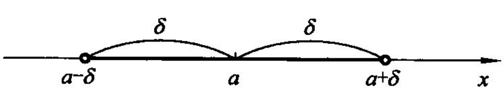


图 1-3

1.1.2　映射

1. 映射的概念

定义 1.2　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称法则 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f:X\rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的**像**，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即

$$D_f=X,$$

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**（或**双射**）.

2. 逆映射与复合映射

定义 1.3 设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$. 于是，我们可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为映射 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

定义 1.4 设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\qquad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映射成 $f(g(x))\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:X\to Z,$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),x\in X.$$

映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合映射.

由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义. 即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

【例 1】 设有映射 $f:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，

映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$.

则映射 g 和 f 构成复映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

1.1.3 函数

1. 函数概念

定义 1.5 设有非空数集 D、W，则称映射 $f:D\to W$ 为定义在数集 D 上的**函数**，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中符号 x 称为**自变量**，在数集 D 上取值，y 称为**因变量**，在数集 W 上取值，D 称为定

义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

在定义中，对每一个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f **值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

显然，

$$R_f=f(D)\subset W.$$

将坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**图形**.

从函数定义可知，函数的实质是数集之间的对应关系，它有三个环节：自变量 x 的取值范围，即数集 D；对应法则 f；因变量 y 的取值范围，即数集 W. 两个函数，只有当它们的三个环节完全相同，才认为是同一个函数. 另外，为了叙述方便，习惯上常用记号"$y=f(x)$，$x\in D$"来表示定义在 D 上的函数. 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"F"，"φ"等. 此时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；二是对抽象地用算式表达的函数，这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合.

【例 2】 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须 $x\neq 0$，且 $x^2-4\geqslant 0$，即 $|x|\geqslant 2$. 所以，函数的定义域为

$$D=\{x\mid |x|\geqslant 2\}，或 D=(-\infty,2]\cup[2,+\infty).$$

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 本书中的函数一般指单值函数，除非有特殊说明. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值，所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加"$y\geqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$"作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加"$y\leqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant 0$"作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）.

本书重点研究解析法.

【例 3】 函数 $y=|x|=\begin{cases} x & 当\ x\geqslant 0 \\ -x & 当\ x<0\end{cases}$ 称为**绝对值函数**. 其定义域为 $D=(-\infty,$

$+\infty)$,值域为 $R_f=[0,+\infty)$(图 1-4).

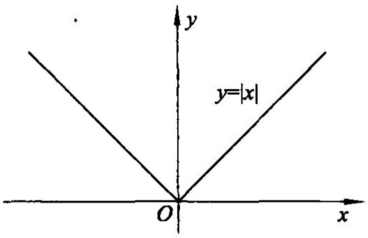


图 1-4

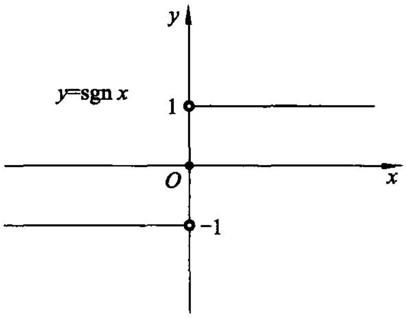


图 1-5

【例 4】 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当\ x>0 \\ 0 & 当\ x=0 \\ -1 & 当\ x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$(图 1-5).

【例 5】 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**,记作$[x]$. 则函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\mathbf{Z}$(图 1-6).

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4.$$

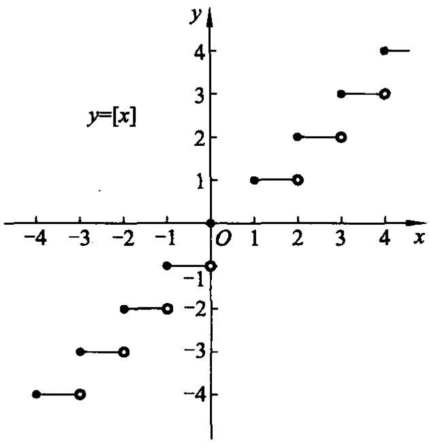


图 1-6

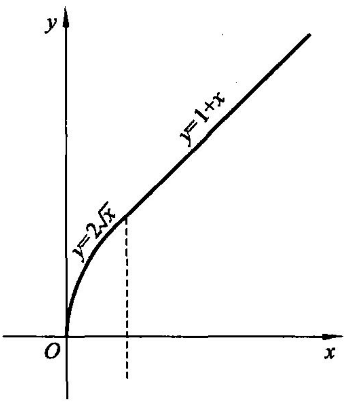


图 1-7

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**. 例 4、例 5 都是分段函数.

【例 6】 函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x} & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x & 当\ x>1\end{cases}$(图 1-7),这是一个分段函数,其定义域为

$D=[0,+\infty)$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y=2\sqrt{x}$; 当 $x>1$ 时, $y=1+x$.

例如, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$; $f(1)=2\sqrt{1}=2$; $f(3)=1+3=4$.

2. 函数的几种特性

这里简单复习归纳一下中学已经学过的函数的几种特性.

(1)函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在数 M_1, 使得对任一 $x\in X$, 有 $f(x)\leqslant M_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**, 而称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 函数图形的特点是, 函数 $y=f(x)$ 在 X 上的图形在直线 $y=M_1$ 的下方.

如果存在数 M_2, 使对任一 $x\in X$, 有 $f(x)\geqslant M_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**, 而称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 其图形特点是, 函数 $y=f(x)$ 在 X 上的图形在直线 $y=M_2$ 的上方.

如果存在正数 M, 使对任一 $x\in X$, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**, 其图形特点是, 函数 $y=f(x)$ 在 X 上的图形夹在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

结论: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界(习题 1-1 练习 15).

(2)函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$, 则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$, 有

$$f(-x)=f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$, 有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果 $0\in D$, 对奇函数 $f(x)$, 因 $f(-0)=-f(0)$, 即 $f(0)=0$.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

【例 7】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$, 证明: 必存在 $(-l,l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得

$$f(x)=g(x)+h(x).$$

分析:如果 $f(x)=g(x)+h(x)$,则 $f(-x)=g(x)-h(x)$,于是

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

证明 作 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,则 $f(x)=g(x)+h(x)$,且

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x).$$

(4)函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D.如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为 $f(x)$的**周期**.

周期函数的图形特点:在函数的定义域内的每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状,如图 1-8 所示.

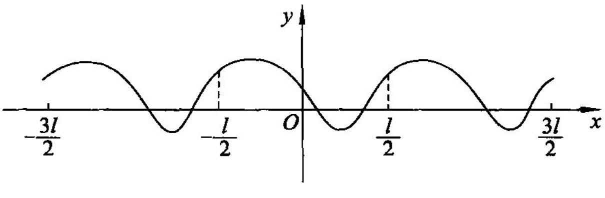


图 1-8

3. 反函数与复合函数

定义 1.6 设函数 $f:D\to f(D)$是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称此映射 f^{-1}为函数 f 的**反函数**.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x.$$

这就是说,反函数 f^{-1}的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.一般地,$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 $f:D\to f(D)$是单射,于是 f 的反函数 f^{-1}必定存在,而且容易证明 f^{-1}也是 $f(D)$上的单调函数.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$来说,原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.把函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关

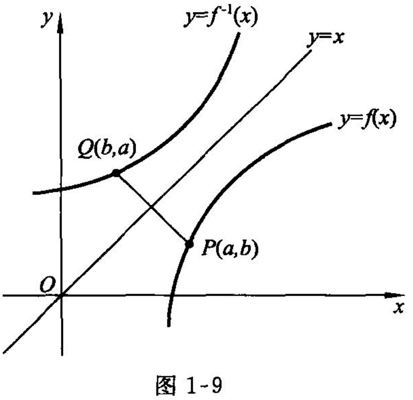


图 1-9

于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-9).

定义 1.7　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，且 $g(D)\subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)),x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

g 与 f 构成的复合函数 $f\circ g$ 的条件是，函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数.

例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义，且 $g(D)\subset[-1,1]$，则 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2},x\in D.$$

但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为对任一 $x\in\mathbf{R}$，$u=x^2+2\geqslant 2$.

只要条件允许，多个函数也可以构成复合函数. 例如，函数

$$y=\ln u,u=\sin v,v=\frac{x}{2}$$

可以构成复合函数 $y=\ln\sin\frac{x}{2}$，其中 u 与 v 都是中间变量，复合函数的定义域是

$$D=\{x\mid 2k\pi<x<2(1+k)\pi,k\in\mathbf{Z}\},$$

不再是 $v=\frac{x}{2}$ 的定义域 $\mathbf{R}$.

4. 函数的运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的四则运算：

和(差) $f\pm g$：　$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D$；

积 $f\cdot g$：　$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$；

商 $\frac{f}{g}$：　$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D\backslash\{x\mid g(x)=0\}$.

5. 初等函数

(1)基本初等函数

将以下五类函数统称为**基本初等函数**.

幂函数：$y=x^\mu$ ($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)；

指数函数：$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)；

对数函数：$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$；

三角函数：正弦函数 $y=\sin x$,

余弦函数 $y=\cos x$,

正切函数 $y=\tan x$,

余切函数 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$,

正割函数 $y=\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$,

余割函数 $y=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$;

反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,

反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[0,\pi]$,

反正切函数 $y=\arctan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(0,\pi)$.

反三角函数的图形可由原函数的图形关于直线 $y=x$ 对称而得到.

在后续学习过程中，常会用到以下三角函数的一些运算性质.

基本关系 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\tan^2 x+1=\sec^2 x$, $\cot^2 x+1=\csc^2 x$.

加法公式 $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$, $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

和差与积互化公式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)];$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\quad \sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)].$$

降幂公式 $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

(2)初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sin^2 x,\ y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 本课程所讨论的函数绝大多数都是初等函数.