21世纪高等院校基础类课程规划教材

高等数学

释疑与学习指导

（上册）

石　琳　王嘉谋　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等院校基础类课

高等数学释疑与学习指导

（上册）

主编 石 琳 王嘉谋

参编 石 萍 刘玉瑛 程慧琴 王培吉

张晓斌 陈 溟 何莉敏 唐 俊

张 景 刘兴薇 董 艳

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书根据全国工科院校高等数学教学基本要求编写，是编者多年从事高等数学教学和辅导工作的积累和结晶。

本书是一本将高等数学学习指导和高等数学解题指导融为一体的参考书，可以帮助读者深刻理解高等数学的基本概念和基本理论，准确抓住基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。全书共分 12 章，每章包括基本要求，内容提要，内容注释，基本方法，典型例题分析，练习题，自我测试题七部分。

本书是理工科非数学专业学生学习高等数学的配套教材，也可供报考硕士研究生的考生参考，还可作为高等学校工科高等数学课程的教学参考书。

本教材获得 2010 年度内蒙古科技大学教材基金资助。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学释疑与学习指导. 上册/石琳，王嘉谋主编. --北京：北京邮电大学出版社，2010. 9

ISBN 978-7-5635-2232-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①石…②王…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 133172 号

书　　名：高等数学释疑与学习指导(上册)
主　　编：石　琳　王嘉谋
责任编辑：王晓丹　方　瑜
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt. edu. cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：16. 25
字　　数：406 千字
版　　次：2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2232-3　　定价（上、下册）：50. 00 元
本册定价：26. 50 元

前　言

高等数学是高等工科学校最主要的基础理论课之一。高等数学的基本概念、基本理论、基本运算和分析方法，在高等数学的学习中占有举足轻重的地位，掌握好这“三基”内容，不仅是学习后继课程和将来从事理论研究或实际工作的必要基础，而且对学生的理性思维训练以及今后的提高和发展都有深远的影响。

对于高等数学的基本概念、基本理论、基本运算和分析方法不熟悉的学生，很难想象能够学好高等数学，所以，对于初学高等数学的学生来说，如何帮助他们在学习中学会提出问题，善于提出问题，辨别命题真伪，抓准解题关键，清晰地辨明解题思路，提高分析问题和解决问题的能力，以达到搞清基本概念、掌握基本理论、灵活熟练地掌握基本方法的目的，这无疑是高等数学教师的重要任务。

为使高等理工科院校学生加深理解高等数学中的基本概念和基本理论，帮助学生抓住这门课的重点和要点，清理出其中的条条块块，使其在千变万化的解题方法中归纳出一些基本原则（或经验），组织了部分多年从事高等数学教学、具有丰富经验的教师共同编写了本书，该书融汇了高等数学中各个环节的内容。

本书内容的取舍是根据我国普通高等工科本科生的《高等数学课程基本要求》，同时也照顾到财经管理类学生的需求。本书与现行的任何一本工科本科高等数学教材同步。

本书在内容安排上紧扣“基本要求”，在章节的编排上尽量与教材同步。每章内容包括基本要求、内容提要、内容注释、基本方法、例题、练习、自测题七大部分。基本要求指出了本章重点、难点。内容提要列出了该章主要概念、重要定理和公式，起到了提纲挈领的作用。内容注释是本书的精华部分，也是该书最重要的内容之一，可帮助学生正确理解基本概念，深化基本理论认识，可引导学生勤于思考、培养学生抽象能力、逻辑思维能力，从而达到提高学生分析问题、解决问题能力的目的。基本方法与典型例题分析是本书的重点内容之二，在例题的挑选上，首先，围绕基本概念精选题目，尽量依据基本概念做题解分析，让读者体会到基本概念是理解内容、分析解答问题的基础，和基本概念的重要性；其次，精选基本方法典型性强、覆盖面广、且有层次感的题目，分析力求详尽，推导尽量不省略，基本上不跳步，且适当加以证明，让普通大学生独自阅读没有什么困难，这是笔者编写此书所希望实现的。最后精选了综合提高题，其中一部分是硕士研究生入学考试题，以帮助读者消化掌握课程的基本内容，同时也满足了考研者的需求，部分例题还给出一题多解，以帮助读者扩大视野，开阔思路。许多例题在解题前进行了充分分析，题后又进行了方法的总结，以深化对高等数学基本概念和理论的理解，提高解题和证题的能力，以期掌握思考问题和处理问题的方法和技巧，做到举一反三，触类旁通。每章的练习题分两部分，一是同步练习题，可以帮助读者对本章内容和基本方法起到复习和巩固的作用；二是自我测试题，模仿平时考试题型进行模拟训练，起到自我考核的作用。

全书思路清晰，逻辑严谨，概念准确，叙述详细，便于自学。本书在编选例题和习题时参

考了有关资料，在此谨向有关同事表示致谢。

本书由石琳、王嘉谋主编，参加编写工作的有：王嘉谋（1 章），石琳（3 章），石萍（4 章），刘玉瑛（7 章），程慧琴（12 章），王培吉（6 章），张晓斌（9 章），陈溟（5 章），何莉敏（2 章），唐俊（10 章），张景（11 章），刘兴薇和董艳（8 章），王嘉谋编写了全书的内容注释，石琳老师编写了全书典型例题的分析。全书由王嘉谋、石琳负责全书的统稿，章树玲老师参与了全书的校对工作。

虽然在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求为读者奉献一本精品读物，但书中难免有疏忽和纰漏之处，敬请同行和读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章　函数及其图形

一、基本要求

1. 能熟练地求出集合(区间)的并、交、差.

2. 掌握邻域的概念、绝对值的定义及性质.

3. 理解函数的概念,并能熟练地求出较简单函数的定义域.

4. 了解函数的有界性、单调性、周期性.

5. 掌握函数奇、偶的概念及几何意义.

6. 理解复合函数及初等函数的概念,同时掌握把复杂函数拆成一串简单函数构成函数链的方法.

7. 掌握求反函数的方法及反函数与直接函数图形间的关系.

8. 掌握基本初等函数的性质及图形.

函数概念是本章的重点,同时也是难点.

二、内容提要

1. 集合

(1) 概念

具有某种确定属性的事物的全体——集合.

以大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,以小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示构成集合的事物——元素.

若元素 a 是集合 A 中的元素,则记为 $a\in A$.

若元素 a 不是集合 A 中的元素,则记为 $a\bar{\in} A$.

由有限多个元素构成的集合称为有限集.

由无限多个元素构成的集合称为无限集.

(2) 集合的表示方法

① 列举法:将集合中的元素以任意次序不重复、不遗漏地写在{　}之中的方法.

② 描述法:设 $P(a)$是某个与 a 有关的条件或法则,A 为满足 $P(a)$的一切 a 构成的集合,则记为 $A=\{a\mid P(a)\}$.

集合及集合间的关系可以用图形表示,称为文氏图.

(3) 全集与空集

① 空集:不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

② 全集:由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记为 U.

(4) 子集

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素,即"若 $a\in A$,则 $a\in B$",则称 A 为 B 的子集.记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读做 A 包含于 B 或 B 包含 A.如图 1-1 所示.

设有集合 A 和 B，如果 $A \subset B$ 且 $A \supset B$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

关于子集有下列结论.

① $A \subset A$；

② 对任何集合 A，都有 $\varnothing \subset A, A \subset U$；

③ 若 $A \subset B, B \subset C$，则 $A \subset C$.

(5) 集合的运算

① 并集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，如图 1-2 所示.

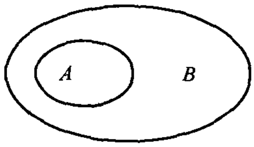


图 1-1

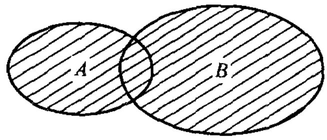


图 1-2

设有集合 A 和 B，并集运算具有下列性质.

- $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$；
- $A \cup \varnothing=A, A \cup U=U$；
- $A \cup A=A$.

② 交集：设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，如图 1-3 阴影部分所示.

设有集合 A 和 B，交集运算具有下列性质.

- $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$；
- 对任何集合 A，都有 $A \cap \varnothing=\varnothing, A \cap A=A, A \cap U=A$.

③ 差集：设有集合 A 和 B，A 中的不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x \in A$ 且 $x \bar{\in} B\}$，如图 1-4 阴影部分所示.

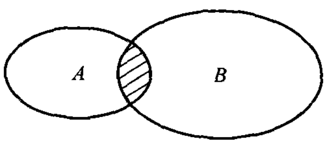


图 1-3

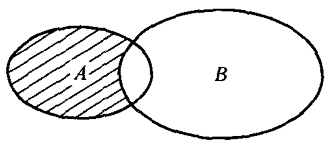


图 1-4

设有集合 A 和 B，差集运算具有下列性质.

- 若 $A \subset B$，则 $A-B=\varnothing$；
- $(A-B) \cap B=\varnothing$；
- $A-A=\varnothing$.

④ 补集：全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A'，即 $A'=\{x \in U$ 且 $x \bar{\in} A\}$，或简写为 $A'=\{x \mid x \bar{\in} A\}$，如图 1-5 阴影部分所示.

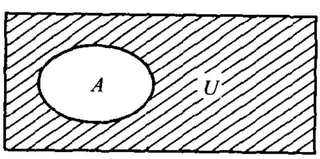


图 1-5

设有集合 A，补集运算具有下列性质.

- $A \cup A'=U$；
- $A \cap A'=\varnothing$.

2. 实数集

(1) 实数

有理数与无理数统称为实数.在微积分中考虑的数都是实数.

(2) 绝对值

实数 a 的绝对值 $|a|=\begin{cases}a, & a>0\\ 0, & a=0.\\ -a, & a<0\end{cases}$

由绝对值的定义,显然有 $|a|=\sqrt{a^2}$, $|-a|=|a|$, $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3) 常用的几个重要不等式

① $|x|<a$ 的充要条件是 $-a<x<a\,(a>0)$;

② $|x|>a$ 的充要条件是 $x>a$ 或 $x<-a\,(a>0)$;

③ $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$, $|a|-|b|\leqslant|a-b|$;

④ $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

(4) 区间、邻域

设 a,b 都是实数,且 $a<b$.

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x,称为以 a、b 为端点的闭区间,记为 $[a,b]$;

满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x,称为以 a、b 为端点的开区间,记为 (a,b);

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有 x,称为以 a、b 为端点的半开半闭区间,记为 $[a,b)$.

上述区间统称为有限区间.

满足不等式 $x<a$ 的所有 x,记为 $(-\infty,a)$;

满足不等式 $x\leqslant a$ 的所有 x,记为 $(-\infty,a]$;

满足不等式 $x>b$ 的所有 x,记为 $(b,+\infty)$;

满足不等式 $x\geqslant b$ 的所有 x,记为 $[b,+\infty)$;

全体实数记为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $-\infty<x<+\infty$.

开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域.

3. 函数

(1) 函数的定义及表示方法

① 函数的定义

设 x、y 是变量,D 是非空的数集,如果对 D 中的每个 x,通过对应规律 f 有唯一确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$.其中,x 称为自变量,y 称为因变量,数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域,记为 D_f.记号 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,表示函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值.

② 函数的表示方法

一般来说,函数有 3 种表示法:分析法(公式法)、图示法、列表法.

(2) 函数的简单性质

① 奇、偶性

设函数 $y=f(x)$ 在对称区间 $(-a,a)\,(a>0)$ 内有定义,若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

显然，奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称.

② 单调性

设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2 且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是减函数. 增函数与减函数统称为单调函数.

使函数在区间 (a,b) 内为增函数(或减函数)的区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

③ 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在正数 M，使得对一切 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，否则，称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

④ 周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使对其定义域内的任何 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 的最小值称为函数 $f(x)$ 的周期.

(3) 反函数的概念

① 概念

已知函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in A$，若对于 A 中的每个 y，由 $y=f(x)$ 得到唯一确定的 x 值与之对应，则 x 是 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量，而字母 y 表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数就写成 $y=f^{-1}(x)$.

② 反函数的图形与直接函数图形的关系

把函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形画在同一直角坐标系中，它们的图形关于 $y=x$ 对称，且直接函数的定义域、值域依次是反函数的值域、定义域.

(4) 初等函数

① 复合函数

设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，$u\in D_f$，u 是 x 的函数，$u=g(x)$，$x\in D_g$. $D=\{x\,|\,x\in D_g, g(x)\in D_f\}$. 若对 D 中的每个 x，通过对应规律 g 得到唯一确定的 u，再通过对应规律 f 得到唯一确定的 y 值与之对应，则 y 是 x 的函数，这个函数称为复合函数，记为 $y=f[g(x)]$.

② 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

③ 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次的复合步骤而成的可用一个式子表示的函数称为初等函数.

三、内容注释

1. 集合方面的注释

(1) 集合概念方面的注释：构成集合的元素所具有的属性必是确定的属性，否则，其元素族不是集合. 如某单位的高个子职工不构成集合；某商店中的高档商品不构成集合.

(2) 集合与元素间的关系只能是属于或不属于，两者必居其一，且仅居其一.

(3) 集合与集合间的关系只能是下列 4 个关系中的其中一个："$\supset$"、"$\subset$"、"$=$"、"$\not\subset$"(互不包含于).

(4) 任何集合都以空集为其子集.任何集合都是全集的子集.任何集合都是其本身的子集.

(5) 邻域方面的注释：

① 通俗地说，点 x_0 的邻域就是点 x_0 附近的所有点的集合；

② 邻域定义中的"δ"，是用来刻画"附近"中的"近"的程度；

③ 邻域一定是开区间；

④ 设有区间 (a,b)，它可以看成点 $\frac{a+b}{2}$ 的 δ 邻域，其中 $\delta=\frac{b-a}{2}$.

2. 函数方面的注释

(1) 函数定义中的数集 D 是非空的，否则，x 与 y 间的关系不是函数. 例如，$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$，因 $D=\varnothing$，故它不是函数；$y=\sqrt{\sin^2 x-2}$，因 $D=\varnothing$，故它不是函数.

(2) 函数的定义域指函数有定义或有意义的一切 x 构成的集合.

对于由实际问题建立的函数关系，是使该函数有实际意义的一切 x 构成的集合——函数的定义域.

对于抽象函数，其定义域是使该函数有定义的一切 x 构成的集合——函数的定义域.

(3) 从函数的定义可知，说"y 是 x 的函数"时，并不要求"x 变化时，y 也变化"，而是要求"x 取定一个值时，有唯一确定的对应值". 从而，$y=c$ 是一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数. 而 $x<y$，因当 x 取定一个值时，y 有无穷多个值与之对应，所以它不是函数关系.

(4) 在函数定义中，对应规律指自变量之间确定的依赖关系.

对于分析法表示的函数，其对应规律就是分析法表示的公式，如 $f(x)=x^2+2x+\sin x$，则 $f(\ )=(\ )^2+2(\ )+\sin(\ )$.

对于图示法表示的函数，其对应规律就是图示法表示的曲线如图 1-6 所示.

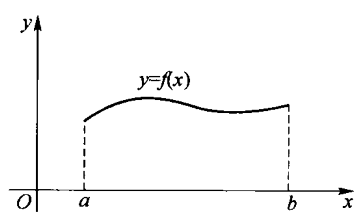


图 1-6

(5) 函数的定义域和对应规律是确定函数的两要素，两者缺一不可.

由此可见，两个函数相等指这两个函数的定义域相同，对应规律相同. 例如，$y=1$ 和 $y=\frac{x}{x}$ 不是同一个函数，这是因为 $y=1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；再如，$y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 不是同一个函数，这是因为 $y=x^3$ 与 $y=\sqrt[3]{x}$ 的对应规律不同.

3. 函数几种特性方面的注释

(1) 单调性方面

① 在区间 (a,b) 内 $y=f(x)$ 是单调函数，它是指在 (a,b) 内，$y=f(x)$ 要么是增函数，要么是减函数，两者必居其一且仅居其一. 所以，一般把函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调的且是增(减)函数说成单调增(减)函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是减函数，在 $(0,+\infty)$ 内是增函数，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内

$y=x^2$ 不是单调函数,即$(-\infty,+\infty)$不是 $y=x^2$ 的单调区间.

② 一般来说,上升曲线表征的函数是增函数,下降曲线表征的函数是减函数.

③ 两个单调增(减)函数之和为增(减)函数.

④ 两个单调增(减)函数的复合函数为增(减)函数.

⑤ 单调增(减)函数的反函数不仅存在而且其反函数也是增(减)函数.

⑥ 函数 $y=f(x)$ $(f(x)\neq 0)$ 为增(减)函数的充分必要条件是 $y=\frac{1}{f(x)}$为减(增)函数.

(2) 函数奇偶性方面的注释

① 非对称区间上定义的函数不能讨论奇偶性.

② 可以证明,对定义在区间$(-a,a)$ $(a>0)$上的任意函数 $f(x)$,有 $F(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数,$G(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数,$H(x)=f(|x|)$是偶函数,且 $f(x)$可表示为 $f(x)=\frac{1}{2}[F(x)+G(x)]$.

③ 下列结论在讨论函数奇偶性方面是常用的,它们的证明从略.

- 奇(偶)函数的代数和仍然是奇(偶)函数.
- 两个奇(偶)函数之积是偶函数.
- 若函数 $y=f(x)$是偶函数,$x=\psi(t)$是奇函数,则 $y=f[\psi(t)]$是偶函数.
- 若函数 $y=f(x)$是奇函数,$x=\psi(t)$是偶函数,则 $y=f[\psi(t)]$是偶函数.
- 若函数 $y=f(x)$是奇(偶)函数,$x=\psi(t)$是奇(偶)函数,则 $y=f[\psi(t)]$是奇(偶)函数.

④ 一般来说,关于 y 轴对称的曲线所表征的函数是偶函数.关于原点对称的曲线表征的函数是奇函数.

(3) 函数周期性方面的注释

① 一般说来,周期函数指定义域内任意点的函数值定期地重复.

② 周期函数的周期是与函数自变量无关的正的最小常数.

③ 并非任何周期函数都有最小正周期.例如,函数 $y=f(x)=c$ 是没有最小正周期的周期函数.

④ $|\sin x|$,$|\cos x|$,$|\tan x|$,$|\cot x|$,$|\sec x|$的周期是 π.

⑤ $y=A\sin(\omega t+\varphi)$,$y=A\cos(\omega t+\varphi)$的周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$,其中,A、ω、φ 均是常数.$y=\tan(\omega t+\varphi)$,$y=\cot(\omega t+\varphi)$的周期是 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$,其中,ω、φ 均是常数.

⑥ 具有相同周期 T 的两个周期函数的和(积)仍是周期为 T 的周期函数.

⑦ 可以证明,若 $f(x)$是周期为 T 的周期函数,则 $f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}$.

⑧ 可以证明,若 $f_K(x)$是周期为 T_K $(K=1,2,\cdots,n)$的周期函数,则 $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$是周期为 $T=[T_1,T_2,\cdots,T_n]$的周期函数.其中,$[T_1,T_2,\cdots,T_n]$表示 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的最小公倍数.

⑨ 可以证明,$\sin|x|$,$\tan|x|$,$\cot|x|$,$\sin x^2$ 都不是周期函数.

(4) 函数有界性方面的注释

① 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有界，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有界.

② 函数在区间 $[a,b]$ 有界的充分必要条件是它在这个区间上任何点处都有界.

③ 函数在某区间 I 内有界，通俗地说，就是该函数对于区间 I 中每一点处的函数值都落入一有限区间内. 反之亦然.

④ 函数在某区间 I 内有界，站在几何的观点上就是介于区间 I 内的曲线在 y 轴上的投影是一有界(限)区间.

4. 复合函数方面的注释

(1) 两个函数 $y=f(u),u\in D_f,u=g(x),x\in D_g,u\in U$(其中 D_f 是 $f(u)$ 的定义域，D_g 是 $g(x)$ 的定义域，U 是函数 $u=g(x)$ 的值域)，则 $y=f[g(x)]$ 是函数的条件是 $U\cap D_f\neq\varnothing$，这时，函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $D=\{x\mid x\in D,g(x)\in U\}$.

(2) 并不是任意两个函数都可以构成复合函数，如 $y=\sqrt{u}$、$u=\sin^2x-2$ 就不能构成复合函数，这是因为 $u=\sin^2x-2$ 的值域 $U=\{u\mid -2\leqslant u\leqslant -1\}$ 与函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=\{u\mid u\geqslant 0\}$ 的交集是空集.

(3) 用以形成复合函数的中间变量还可以不止一个，即复合函数可以由多个函数构成. 例如，$y=\sqrt{u},u=v^2+1,v=\sin x$，则 $y=\sqrt{\sin^2x+1}$.

(4) 用以形成复合函数的多个简单函数，其构成复合函数的过程是由内向外；若反过来，即若把复合函数分解为简单函数串，则其过程是由外向内. 例如，$y=\ln\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)$，则 $y=\ln u$、$u=\sin v$、$v=\sqrt{w}$、$w=1-x^2$.

5. 反函数方面的注释

(1) 反函数的概念可直观地叙述为：设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上，值域是 Y 的函数，对 Y 内任意一个 y，通过函数 $y=f(x)$ 可反解出唯一的 x 与 y 相对应，则称 x 是 y 的函数，称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

(2) 直接函数 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，或者说，f 和 f^{-1} 互为反函数.

(3) 直接函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域依次是反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域、定义域.

(4) 直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在同一直角坐标系下的曲线相同，但一般来说，它们表示不同的函数.

(5) 直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一直角坐标系下的曲线关于直线 $y=x$ 对称. 但关于直线 $y=x$ 对称的曲线所表示的函数不一定互为反函数. 例如，$y=c$ 函数没有反函数，但直线 $y=c$ 与直线 $x=c$ 关于直线 $y=x$ 对称.

6. 初等函数方面的注释

(1) 函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数.

这是因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是由 $y=\sqrt{u}$、$u=x^2$ 复合而成的复合函数. 从而，“分段函数都不是初等函数”的说法是不正确的.

(2) 分段函数：一个在其定义域内的不同范围用不同公式表示的函数称为分段函数.

由此可见，分段函数不论分为几段，总是表示一个函数，同时，分段函数的定义域就是各段范围(数集)的并集.

四、基本方法

1. 函数概念

(1) 求函数定义域

当函数是以分析法表示时，求函数定义域的参考原则是：

① 分式的分母不能为 0；

② 偶次根式的被开方式不能为负数；

③ 对数函数的真数必须是正数；

④ 反正(余)弦符号下的式子的绝对值不能大于 1；

⑤ 正切符号下的式子不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，其中 k 为整数；

⑥ 余切符号下的式子不能等于 $k\pi$，其中 k 为整数；

⑦ 若上述情况均在一个公式中出现，则分别求出各自定义域，然后求各定义域的交集，即这个函数的定义域；

⑧ 分段函数的定义域为每个表达式的自变量取值范围的并集.

(2) 求函数值

① 若函数 $y=f(x)$ 是初等函数，求其在给定点的函数值.

- 摆出对应规律 $f()$；
- 向括号内赋值；
- 结果.

② 若函数 $y=f(x)$ 是分段函数，求其在给定点的函数值.

- 判断给定点的自变量取值范围；
- 用该范围上定义的关系式求已知函数在给定点的函数值；
- 结果.

2. 函数的特性

(1) 函数奇偶性的判定

若自变量取相反数，函数值不变，则该函数是偶函数. 若自变量取相反数，函数值也取相反数，则该函数是奇函数.

几何上，奇函数表示的曲线关于原点对称，偶函数表示的曲线关于 y 轴对称.

一般地，关于原点对称的曲线所表示的函数为奇函数，关于 y 轴对称的曲线所表示的函数为偶函数.

设 $y=f(x)$ 是已知函数，其判定奇偶性的方法是：

- 判定 $f(x)$ 的定义域是否为对称区间.
- 计算 $f(-x)$.
- 结论. 若 $f(-x)=f(x)$，则 $y=f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $y=f(x)$ 是奇函数；若上述两种情况都不满足，则 $y=f(x)$ 为非奇非偶函数.

注：函数 $y=0$ 既是奇函数又是偶函数，此外，再无其他函数具备这一点.

3. 反函数的求法

设有函数 $y=f(x)$，求其反函数：

① 对 $y=f(x)$ 进行反解，即 y 用表示 x；

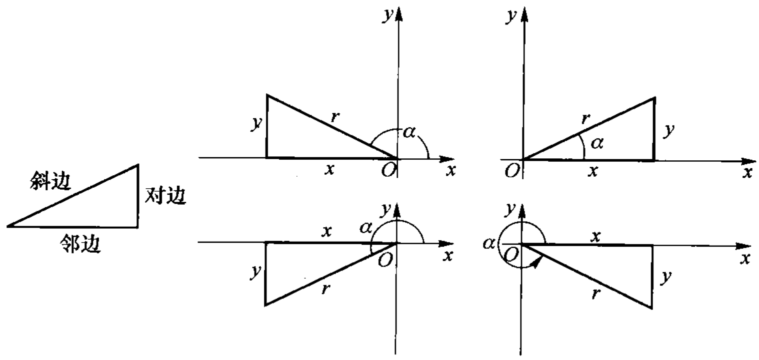
② 判定①的结果是否为函数；

③ 若是函数，则交换 x、y 的位置得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

五、附注

1. 三角函数的常用公式及定义

(1) 定义



$\sin\alpha=\frac{对}{斜}=\frac{y}{r}$， $\cos\alpha=\frac{邻}{斜}=\frac{x}{r}$， $\tan\alpha=\frac{对}{邻}=\frac{y}{x}$

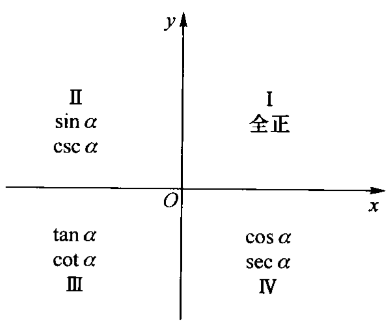
$\cot\alpha=\frac{邻}{对}=\frac{x}{y}$， $\sec\alpha=\frac{斜}{邻}=\frac{r}{x}$， $\csc\alpha=\frac{斜}{对}=\frac{r}{y}$

(2) 基本关系

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$， $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$， $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$， $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$， $\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

(3) 三角函数的正值区域



(4) 特殊角的三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

(5) 常用公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$，　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$，　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$　　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　　$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$　　$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

2. 对数函数

(1) 定义

如果 $a^x=b(a>0,a\neq1)$，则 x 称为 b 的以 a 为底的对数，记为 $x=\log_a b$，其中 a 称为对数的底，b 称为对数的真数.

当 $a=10$ 时，$\log_{10}b$ 记为 $\lg b$——常用对数；

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\log_{\mathrm{e}}b$ 记为 $\ln b$——自然对数.

(2) 性质

① $a^{\log_a b}=b$，特例，$\mathrm{e}^{\ln b}=b$；　　② $\log_a a^x=x$，特例，$\ln \mathrm{e}^x=x$；

③ $\log_a 1=0$，特例，$\ln 1=0$；　　④ $\log_a a=1$，特例，$\ln \mathrm{e}=1$.

(3) 运算法则

① $\log_a(b_1b_2\cdots b_n)=\log_a b_1+\log_a b_2+\cdots+\log_a b_n$

② $\log_a\dfrac{b_1}{b_2}=\log_a b_1-\log_a b_2$

③ 对任意实数 α，有

$\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$，$\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$，$\log_a\dfrac{1}{b}=-\log_a b$

④ 对数的换底公式

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(c>0,c\neq1)$

六、例题

1. 实数、绝对值

例 1-1　填空：

(1) 与 $|x|<2$ 等价的不等式是______________；