奥数题库

数学解题策略问题解答

朱华伟　钱展望　编著

科学出版社

奥数题库

数学解题策略问题解答

朱华伟　钱展望　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书给出了作者编著的《数学解题策略》中全部习题的详解，有的给出了多种解法．这些习题的解答几乎涵盖了数学竞赛中所有的解题策略．本书对部分习题还做了点评．这些习题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是问题的多种解法，或是试题的来源、背景．点评的目的是使读者开阔眼界，加深对问题的理解，培养举一反三的能力．

此书可供高中数学资优生、准备参加高中数学竞赛的选手、中学数学教师、高等师范院校数学教育专业本科生、研究生及高师院校数学教师，数学爱好者及数学研究工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学解题策略问题解答／朱华伟，钱展望编著．—北京：科学出版社，2011

（奥数题库）

ISBN 978-7-03-030893-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．①朱…　②钱…　Ⅲ．中学数学课－题解　Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 073455 号

责任编辑：李　敏　赵　鹏／责任校对：张怡君

责任印制：钱玉芬／封面设计：黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版　　开本：B5（720×1000）

2011 年 5 月第一次印刷　　印张：19 3/4　插页：2

印数：1—6 000　　字数：384 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分. 这个看法是言之成理的. 数学要解题，要发现问题、创造方法. 年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态. 早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题. 竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑.

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话. 有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒. 我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧. 再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训. 就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动. 这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五. 从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可. 对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流. 发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了.

摘自《走进教育数学》丛书总序

前　言

本书是针对作者编著的《数学解题策略》所编写的一本习题指导书．《数学解题策略》的前24章介绍了24种数学解题策略，它们分别是归纳与猜想、数学归纳法、枚举与筛选、整数的表示方法、逻辑类分法、从整体上看问题、化归、退中求进、类比与猜想、反证法、构造法、极端原理、局部调整法、夹逼、数形结合、复数与向量、变量代换法、奇偶分析、算两次、对应与配对、递推方法、抽屉原理、染色与赋值、不变量原理，这几乎涵盖了数学竞赛中所有的解题策略．《数学解题策略》的每一章后面都附有大量的习题，由于篇幅有限，我们没有在《数学解题策略》中给出相应习题的解答，而这些习题的详细解答构成了本书的主要内容．

在国内外各项数学竞赛中出现了很多题目，形容为题海并不为过．在题海中畅游是每位读者的愿望．但是，您如果接触过数学竞赛中的题目，就会发现实现这个愿望不是一件容易的事．这主要是因为数学竞赛中的题目与常规数学教材中的题目不同，常规题目一般有明显的知识背景和可套用的法则，而数学竞赛中的题目恰恰相反．解决数学竞赛中的问题不仅需要扎实的学科知识基础，更需要灵活的方法策略．

若想在题海中畅游，首先要保证不会迷失方向．为了使读者在比较短的时间内具备辨别方向的能力，作者从收集到的大量的题目中精选出具有代表性的题目（这些题目的主要来源是世界各地数学奥林匹克试题、世界各地为准备国际数学奥林匹克的训练题以及选拔考试试题、国际数学奥林匹克试题及备选题），然后按照上面提到的数学解题策略进行分类．读者通过这些题目的练

习，可以更快地掌握数学竞赛中的各种解题策略（也就是解决问题的方向）．也许有时这些解题策略并不能让您得心应手，但是，即使简单几步的尝试，也还是可以打开您的思路．在解决数学问题甚至其他学科的问题时，这些解题策略给读者提供了各种可以尝试的途径．

由于这些题目代表了世界各地高层次数学竞赛的水平，所以读者通过学习和思考这些题目，可以迅速站到数学竞赛的前沿．如果您对上面提到的各种解题策略已经很熟悉，那么本书可以作为独立的竞赛数学习题集．如果您还不太熟悉这些解题策略，不妨结合《数学解题策略》这本书所讲的内容来细细品味这些题目所表达的思想内涵．

本书对部分习题还做了点评．这些习题的点评不拘形式，或是问题的引申和推广，或是类题、似题的分析比较，或是问题的多种解法，或是试题的来源、背景．问题的解答呈现给读者的往往是经过提炼的思维过程．从问题的解答中我们可以感受到数学方法的严谨与巧妙，还有解题高手独特的思维方式．而问题的点评在一定程度上还原了命题者或解题者对问题火热的思考过程，还可以使读者开阔眼界，加深对问题的理解，也可以培养读者举一反三的能力．

在本书的编写过程中，参阅了众多的文献资料，并得到郑焕、付云皓、邹宇、张传军、周弋林等同学的协助，得到科学出版社的大力扶持．在此一并表示感谢．对于本书存在的问题，热忱希望读者不吝赐教．

朱华伟

2011 年元月

目　录

第 1 章　观察、归纳与猜想

1.1　问　　题

1. (1)图 1-1 的(a)(b)(c)(d)为四个平面图．数一数，每个平面图各有多少顶点？多少条边？它们分别围成了多少个区域？请将结果填入表 1-1(按填好的样子做).

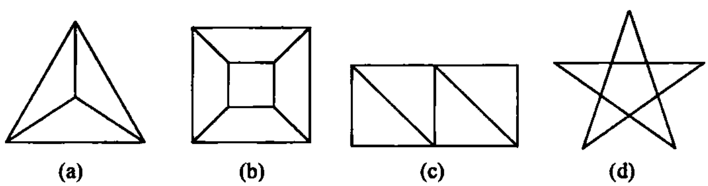


图 1-1

表 1-1

图号	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(2)观察表 1-1，推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系．

(3)现已知某个平面图有 999 个顶点，且围成了 999 个区域，试根据以上关系确定这个图有多少条边．

2. 角谷猜想．

任取一个大于 2 的自然数，反复进行下述两种运算：

(1)若是奇数，就将该数乘以 3 再加上 1；

(2)若是偶数，则将该数除以 2.

例如,对 3 反复进行这样的运算,有

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

对 4,5,6 反复进行上述运算,其最终结果也都是 1,再对 7 进行这样的运算,有

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13$$
$$\to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

运用归纳推理建立猜想(通常称为“角谷猜想”):________.

3. 设$f(x)=x^2+x+11$,取$x=1,2,3,\cdots,9$,则

$$f(1)=13,\quad f(2)=17,\quad f(3)=23,$$
$$f(4)=31,\quad f(5)=41,\quad f(6)=53,$$
$$f(7)=67,\quad f(8)=83,\quad f(9)=101.$$

可以看出,这些值都是素数. 从这些特殊情况是否可以归纳出:对一切自然数x,$f(x)=x^2+x+11$的值都是素数.

4. 一个直角三角形的三边长都是正整数,这样的直角三角形称为整数勾股形,其三边的值叫做勾股弦三数组,下面给出一些勾股弦三数组(勾,股,弦):

$$(3,4,5),\quad (5,12,13),\quad (7,24,25),\quad (8,15,17),$$
$$(20,21,29),\quad (360,319,481),\quad (2400,1679,2929),\quad \cdots.$$

观察这些勾股弦三数组,请你归纳一个猜想,并加以证明.

5. 依次取三角形数的末位数字,排列起来可以构造一个无限小数

$$N=0.1360518\cdots,$$

试证明N是有理数.

6. 整数a,b,c表示三角形三边的长,其中$a\leqslant b\leqslant c$,试问当$b=n$(n是正整数)时,这样的三角形有几个?

7. 在平面上有n条直线,任何两条都不平行,并且任何三条都不交于同一点,这些直线能把平面分成几部分?

8. n个平面,最多把空间分成几个部分?

9. 在平面上画n个三角形,问:

(1)最多能将这个平面分成多少块?

(2)最多能有多少个交点(包括这些三角形的顶点在内)?

10. 要用天平称出从 1 克,2 克,3 克,…,40 克这些不同的整数克质量,至少要用多少个砝码?这些砝码的质量分别是多少?

11. 一条直径将圆周分成两个半圆周,在每个分点标上素数p;第二次将两个半圆周的每一个分成两个相等的$\frac{1}{4}$圆周,在新产生的分点标上相邻两数和

的 $\frac{1}{2}$；第三次将四个 $\frac{1}{4}$ 圆周的每一个分成两个相等的 $\frac{1}{8}$ 圆周，在新产生的分点标上其相邻两数和的 $\frac{1}{3}$；第四次将八个 $\frac{1}{8}$ 圆周的每一个分成两个相等的 $\frac{1}{16}$ 圆周，在新产生的分点标上其相邻两数和的 $\frac{1}{4}$，如此进行了 n 次，最后，圆周上的所有数字之和为 17170，求 n 和 p 的值各为多少？

12. 计算：$C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \cdots$.

13. 正整数数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n - n, & a_n > n, \\ a_n + n, & a_n \leqslant n. \end{cases}$

(1)求 a_{2008}；

(2)求最小的正整数 n，使 $a_n = 2008$.

14. 证明：存在 8 个连续的正整数，它们中的任何一个都不能表示为

$$|7x^2 + 9xy - 5y^2|$$

的形式，其中 $x, y \in \mathbf{Z}$.

1.2 解　　答

1. (1)填表如表 1-2 所示.

表 1-2

图号	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)	8	12	5
(c)	6	9	4
(d)	10	15	6

(2)由表 1-2 可以看出，所给四个平面图的顶点数、边数及区域数之间有下述关系：

$$4 + 3 - 6 = 1, \quad 8 + 5 - 12 = 1,$$
$$6 + 4 - 9 = 1, \quad 10 + 6 - 15 = 1.$$

所以可以推断：任何平面图的顶点数、边数及区域数之间，都有下述关系：

$$\text{顶点数} + \text{区域数} - \text{边数} = 1.$$

(3)由上面所给的关系，可知所求平面图的边数.

$$\begin{aligned}边数 &= 顶点数 + 区域数 - 1 \\ &= 999 + 999 - 1 = 1997.\end{aligned}$$

点评 任何平面图的顶点数、区域数及边数都能满足我们所推断的关系．当然，平面图有许许多多，且千变万化，然而不管怎么变化，顶点数加区域数再减边数，最后的结果永远都等于1，这是不变的．因此，

$$顶点数 + 区域数 - 边数$$

就称为平面图的不变量（有时也称为平面图的欧拉数——以数学家欧拉的名字命名）．

2. 从任意一个大于2的自然数出发，反复进行（1）、（2）两种运算，最后必定得到1.

点评 这个猜想后来被人们多次检验，发现对7000亿以下的数都是正确的，究竟是否对大于2的一切自然数都正确，至今还不得而知．

3. 不能．事实上，当 $x = 10$ 时，$f(10) = 10^2 + 10 + 11 = 121$，这是个合数．

4. 观察上述勾股弦三数组，可以归纳得出如下猜想：整数勾股形中，勾、股中必有一个是3的倍数．

现证明如下：勾股弦三数组是不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组正整数解．

如果 x,y 中无3的倍数，则 $x = 3k \pm 1$ 型的数，$y = 3m \pm 1$ 型的数，它们的平方都是被3除余1的整数．由此可知 $x^2 + y^2$ 是被3除余2的整数．但被3除余2的数一定不是完全平方数，所以与等号右边的 z^2 相矛盾．因此 x,y 中至少有一个是3的倍数．猜想命题"整数勾股形中，勾、股中必有一个是3的倍数"被证明为真．

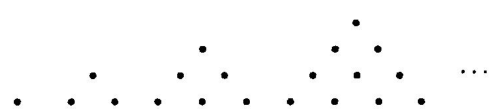
点评 进一步还可以得到如下的猜想：

"整数勾股形中，勾、股中必有一个是4的倍数"．

"整数勾股形中，勾、股、弦中必有一个是5的倍数"．

这两个猜想同样都是真命题，其证明留给同学们作为练习．

5. 所谓三角数是指如下类型的数：



1　　3　　6　　10

第 n 个三角数是 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，记作 a_n．

如果把 N 继续写下去，其规律性就可看得清楚些

$$N = 0.1360518655681506310013 6051\cdots$$

似乎有 a_{n+20} 的个位数字与 a_n 的个位数字相同，若能证明这点，则 N 为有理数．注意到

$$\begin{aligned} a_{n+20} - a_n &= \frac{(n+20)(n+20+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 10 \cdot (2n+21) \end{aligned}$$

是 10 的倍数，即得证．

点评　判定某个无限小数是有理数的关键是看它小数点后的数字是否循环，即是否构成周期数列．

6. 显然 a,b,c 都是正整数，三角形各边 a,b,c 必须满足 $a \leqslant b \leqslant c$ 且 $a + b > c$，先考查特例．

当 $n = 1$ 时，$b = 1 \Rightarrow a = 1, c = 1$，满足条件的三角形仅一个；

当 $n = 2$ 时，$b = 2 \Rightarrow a = 1, c = 2$，或 $a = 2, c = 2$ 或 3，满足条件的三角形有 $1 + 2 = 3$（个）；

当 $n = 3$ 时，$b = 3$，如表 1-3 所示满足条件的三角形有 $1 + 2 + 3 = 6$（个）．

表 1-3

a	b	c	三角形个数
1	3	3	1
2	3	3,4	2
3	3	3,4,5	3

归纳猜想　当 $b = n$ 时，满足题设条件的三角形共有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}（个）. \tag{1-1}$$

证明猜想　当 $b = n$ 时，a 有 n 个值，即 $1,2,\cdots,n$，对于 a 的每一个值，如 $a = k(1 \leqslant k \leqslant n)$，因为 $b \leqslant c < a + b$，即 $n \leqslant c < n + k$，所以，c 的取值刚好有 k 个，即 $n, n+1, \cdots, n+k-1$，所以三角形总数如式(1-1)所示．

点评　此题在考查特殊情形的过程中，发现了三角形三边长 a,b,c 的取值规律，为问题的解答提供线索．

7. 设 n 条直线分平面为 S_n 部分，先实验观察特例有如表 1-4 所示的结果．

表 1-4

n	1	2	3	4	5	6	…
S_n	2	4	7	11	16	22	…

n 与 S_n 之间的关系不太明显,但 $S_n - S_{n-1}$ 有如表 1-5 所示的关系.

表 1-5

n	1	2	3	4	5	6	…
S_n	2	4	7	11	16	22	…
$S_n - S_n^{-1}$		2	3	4	5	6	…

观察表 1-5 发现,当 $n \geqslant 2$ 时,有

$$S_n - S_{n-1} = n.$$

因为在 $n-1$ 条直线后添加第 n 条直线被原 $n-1$ 条直线截得的 n 段中的任何一段都将它所在的原平面一分为二,相应地增加 n 部分,所以 $S_n = S_{n-1} + n$,即 $S_n - S_{n-1} = n$. 从而

$$S_2 - S_1 = 2,\quad S_3 - S_2 = 3,\quad S_4 - S_3 = 4,\cdots,\quad S_n - S_{n-1} = n.$$

将上面各式相加,得到

$$S_n - S_1 = 2 + 3 + \cdots + n,$$

$$S_n = S_1 + 2 + 3 + \cdots + n = 2 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$= 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1).$$

点评 S_n 也可由如下观察发现. 由表 1-4 知:

$$S_1 = 1 + 1,\quad S_2 = 1 + 1 + 2,\quad S_3 = 1 + 1 + 2 + 3,$$

$$S_4 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4,\quad \cdots.$$

以此类推,便可猜想到

$$S_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1).$$

8. 0 个平面时,空间是 1 个部分;

第 1 个平面将空间分成 1 +1 =2 个部分;

第 2 个平面与第 1 个平面有 1 条交线,这条交线将第 2 个平面分成两部分,每一部分都将空间的一个部分变成 2 个,空间被分成了 1 +1 +2 个部分;

第 3 个平面与前两个平面有 2 条交线,这 2 条交线将第 3 个平面分成了 4 个部分,每一部分都将空间的一个部分变成了 2 个,空间被分成了 1 +1 +2 +4

个部分；

……

第 n 个平面与前面 $n-1$ 个平面有 $n-1$ 条交线，根据题 7 的结论，它将第 n 个平面分成了

$$\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

个部分，每个部分都将空间的一个部分变成了两个，故空间被分成了

$$\begin{aligned}&1+\left[1+2+4+\cdots+\frac{1}{2}(n^2-n+2)\right]\\&=1+\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+n\\&=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1\end{aligned}$$

个部分.

9. (1) $n=1$ 时，2 块，依次划边时增加的块数为 0，0，1（图 1-2）.

$n=2$ 时，8 块，依次划边时增加的块数为 1，2，3（图 1-3 ~ 图 1-5）.

$n=3$ 时，20 块，依次划边时增加的块数为 3，4，5（图 1-6）.

$n=4$ 时，38 块，依次划边时增加的块数为 5，6，7（图 1-7）.

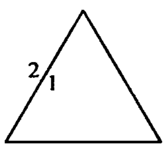


图 1-2

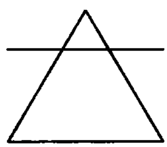


图 1-3

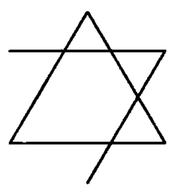


图 1-4

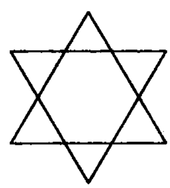


图 1-5

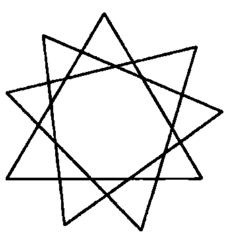


图 1-6

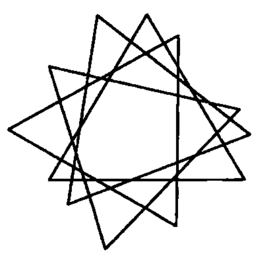


图 1-7