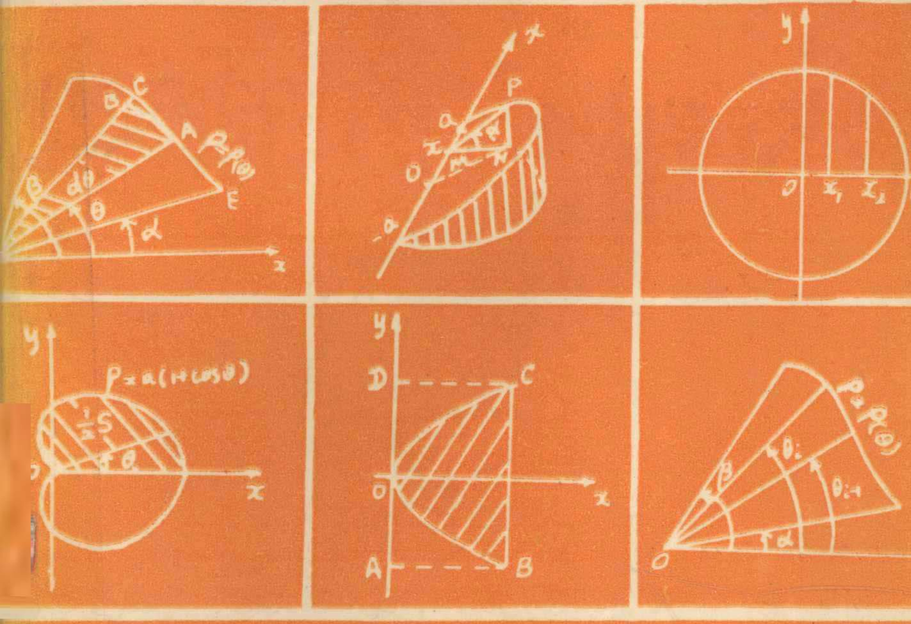
全国高等院校民族班教材

数　学

甲种本（全一册）

微　积　分

程永芳　编



中央民族学院出版社

全国高等院校民族班教材

数　学

甲种本（全一册）

微　积　分

程永芳 编

中央民族学院出版社

〔京〕新登字 184
责任编辑：邱　立
封面设计：金　文

微　积　分

甲种本（全一册）

程永芳编

*

中央民族学院出版社出版
（北京西郊白石桥路 27 号）
（邮政编码：100081）
新华书店北京发行所发行
北京昌平亭自庄福利印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开 13.5 印张 292 千字
1993 年 6 月第 1 版　1993 年 6 月第 1 次印刷
印数：01-5000 册

ISBN7-81001-502-8/G・221
定价：6.35 元

前　言

在国家民委、教委民族司的支持下，根据“普通高校预科工作会议”和1990年元月北京“民族院校预科数学教材修改会议”的精神，为了培养我国少数民族各类专门人才，适应预科教育的进一步发展，提高预科教学水平，决定对1985年编写的全国高等院校民族班数学教材进行修改，并由中央民族学院，中南民族学院，西南民族学院，云南民族学院，贵州民族学院，西北民族学院预科部数学教研室分工修改编写。根据学生程度和培养目标，教材分为甲、乙种本，即甲种本（全一册）《微积分》和乙种本《初等数学》（上册）及《微积分》（下册）。

甲种本《微积分》是为了适应重点大学预科班的要求和学生的实际水平而编写的。它以一元微积分为主要内容，同时复习一些必要的初等数学知识。本书力求基本概念准确、清晰易懂，注意理论的系统性和严密性，并配备有较多的例题和习题，培养学生有一定的推理能力，分析问题与解决问题的能力和计算能力。

参加教材审稿会议的有：中央民族学院程永芳，中南民族学院张应族，西南民族学院田长明，云南民族学院谢冬梅，贵州民族学院马在良、周如银，广西民族学院黄华贤、梁汉光，青海民族学院韩洪潮，西北民族学院黄继峰、常靖国、马艳琳、闫景璧。

在教材的编审过程中，得到中央民族学院、西北民族学院、青海民族学院领导的关怀和支持，深表感谢。全教材由中央民族学院程永芳主持编写，审稿工作。

本教材不仅可供各民族院校大学预科班，各高等院校民族班使用，还适用于师范专科，中学教师进修、培训和青年自学使用，参考。

本书在编写过程中得到了中央民族学院预科部数学教研室同志们的热情支持和帮助，在此一并表示感谢！

由于作者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992年7月于中央民族学院

目　录

预 备 知 识

一 逻辑符号

为了书写方便，我们常采用以下逻辑符号。

设S_1，S_2是两个陈述句，它们可以指命题，也可以指条件。

符号　　$S_1 \Rightarrow S_2$

表示命题（或条件）S_1成立，则命题（或条件）S_2也成立。

符号　　$S_1 \Leftrightarrow S_2$

表示命题（或条件）S_1与S_2等价，即表示由命题（或条件S_1可以推出命题（或条件）S_2，反之由命题（或条件）S_2也可以推出命题（或条件）S_1.

符号　　$\forall$

表示任给，即“对任意给定的……”；写法是将英文字母A倒过来写。

符号　　$\exists$

表示存在或找到，写法是将英文字母E反过来写。

例“存在正数X，使得$\frac{1}{2} < X < 2$”可表示成：

$\exists X > 0$，使$\frac{1}{2} < X < 2$.

例“对任意给定的正数ε，存在正数N，使得当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$”，可以表示成：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$.

二　命题，充分条件与必要条件

命题是由条件和结论两部分组成的，它的一般公式是“若

A,则 B”,其中 A 是条件,B 是结论。

一个命题可能是正确的,也可能是错误的,正确的称为是真的,错误的称为是假的,在数学中重要的正确的命题称为定理。

要肯定一个命题为真,应当给出证明,要说明一个命题为假,通常的办法是举出反例。

如命题“若 $a^2 = 25$,则 $a = 5$”为假,可举出反例:

$$(-5)^2 = 25, \text{但} -5 \neq 5.$$

对命题“若 A,则 B”如果将条件和结论交换或者将它们的否定作为条件或结论,总共就有四种不同形式的命题。分别称为:(以下记 $\overline{A}$ 为 A 的否定,$\overline{B}$ 为 B 的否定,读作“非 A”,“非 B”)

Ⅰ　原命题:“若 A,则 B”.

Ⅱ　逆命题:“若 B,则 A”.

Ⅲ　否命题:“若 $\overline{A}$,则 $\overline{B}$”.

Ⅳ　逆否命题:“若 $\overline{B}$,则 $\overline{A}$”.

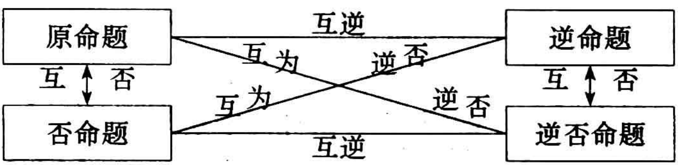
四种命题之间的相互关系是:

1. 原命题和逆否命题同真同假;

2. 逆命题和否命题同真同假;

3. 若原命题为真,则它的逆命题可真可假。

因此,就本质上来看,命题只有两种,即Ⅰ(原命题)和Ⅱ(逆命题)。Ⅲ(否命题)与Ⅳ(逆否命题)不是什么别的,它不过是Ⅰ(原命题)与Ⅱ(逆命题)的否定形式而已。如图:



在弄清命题的四种形式以及它们之间的相互关系之后,

就比较容易理解充分，必要和充要条件。

定义 1 （充分条件）如果条件 A 成立时，结论 B 一定成立，那么就说条件 A 对于结论 B 是充分条件。记作：$A\Rightarrow B$.

容易了解，能推出 B 的任何前提，都是 B 的充分条件。

例 1　如果 $x=y$，那么 $x^2=y^2$.

这里，$x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的充分条件。

例 2　命题"等腰三角形，两底角相等"。

显然，"三角形等腰"是"两底角相等"的充分条件。

定义 2 （必要条件）如果条件 A 不成立时，结论 B 一定不成立，那么就说条件 A 对于结论 B 是必要条件。

由否命题与逆命题等价，即"若 $\overline{A}$，则 $\overline{B}$"与"若 B，则 A"等价，因此"A 是 B 的必要条件"也记作：$B\Rightarrow A$，由此可见，由 B 推出的任何结论，都是 B 的必要条件。

例 3　若 a,b 都是正数，则 $a\cdot b$ 也是正数。

这里，"$a\cdot b$ 是正数"就是"a,b 都是正数"的必要条件。

例 4　"三角形的两底角相等"是"等腰三角形"的必要条件。

显然，在"$A\Rightarrow B$"中既可以说 A 是 B 的充分条件，也可以说 B 是 A 的必要条件，到底怎样说，要看在具体问题中哪一个是条件，哪一个是结论。

定义 3 （充要条件）如果 A 既是 B 的充分条件又是 B 的必要条件，那么就说 A 是 B 的充分必要条件，简称充要条件。记作：$A\Leftrightarrow B$，这时也称 A 与 B 是等价的。

在数学命题中，我们也常用"当且仅当"，"必须而且只须"来代替"充分而且必要"的条件。

例 5　多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除的充要条件是 $f(a)=0$，可叙述为

"当且仅当 $f(a)=0$ 时，多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除"。

"要使多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除，必须而且只须 $f(a)=0$"。

三　数学归纳法

数学归纳法是数学中的一种重要的证明方法，常用它来证明与自然数有关的数学命题，数学归纳法有以下二种：

第一数学归纳法：设 $p(n)$ 是一个与自然数 n 有关的命题，如果

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2 等）时，命题 $p(n_0)$ 成立；

(2) 假设当 $n=k(k\in N$，且 $k>n_0)$ 时，命题 $p(k)$ 成立，证明当 $n=k+1$ 时命题 $p(k+1)$ 也成立。则对一切自然数 $n(\geqslant n_0)$，命题 $p(n)$ 都成立。

第二数学归纳法：设 $p(n)$ 是一个与自然数 n 有关的命题，如果：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2 等）时，命题 $p(n_0)$ 成立；

(2) 假设当 $n_0\leqslant n\leqslant k(k\in N)$ 时，命题 $p(n)$ 都成立，证明当 $n=k+1$ 时命题 $p(k+1)$ 也成立。则对一切自然数 $n(\geqslant n_0)$，命题 $p(n)$ 都成立。

下面我们举例来说明，如何应用数学归纳法来证明数学命题。我们常用第一数学归纳法来证题。

例 1　用数学归纳法证明

$$x^{2n}-y^{2n}\qquad(n\in N)$$

能被 $x+y$ 整除

证　(1) 当 $n=1$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 能被 x

$+y$ 整除。

(2) 假设当 $n=k(k\in N)$ 时，$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除。则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}&x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}\\&=x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}\\&=x^2\cdot x^{2k}-x^2y^{2k}+x^2y^{2k}-y^2y^{2k}\\&=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)\end{aligned}$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$ 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，所以它们的和 $x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$ 也能被 $x+y$ 整除，即当 $n=k+1$ 时，$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$ 能被 $x+y$ 整除。

根据(1)和(2)可知，命题对任何 $n\in N$ 都成立。

有时，我们需要通过对一些自然数的情况，进行判断和推测，归纳出一般规律，得到数学命题再用数学归纳法证明。

例 2　求数列的前 n 项和

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

解：此题由 $n=1,2,3$ 时，$S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$，$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$，归纳出：

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

下面用数学归纳法证明

(1) 当 $n=1$ 时，由上可知结论正确。

(2) 假设当 $n=k$ 时，结论正确. 即

$$S_k=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

则当 $n=k+1$ 时

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2}$$

$$=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

即当 $n=k+1$ 时,结论也正确。

根据(1) 和(2) 可知,数列的前 n 项之和

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{n}{n+1}.$$

有些命题需要用第二数学归纳法来证明。

例 3 已知方程 $x^2-2ax+b=0$(a,b 为整数) 求证:对于任何自然数 n,两个根的 n 次方的和必为偶数。

证:设方程的二根为 $\alpha,\beta,S_n=\alpha^n+\beta^n\quad(n\in N)$

(1) 当 $n=1$ 时,$S_1=\alpha+\beta=2a$ 为偶数。

(2) 假设当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时,命题正确,即 $S_1,S_2,S_3,\cdots S_k$ 都是偶数。则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\\&=(\alpha^{k+1}+\alpha^k\beta+\alpha\beta^k+\beta^{k+1})-(\alpha^k\beta+\alpha\beta^k)\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k)-\alpha\beta(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})\\&=2aS_k-bS_{k-1}\end{aligned}$$

因为 S_{k-1},S_k 为偶数,a,b 为整数,所以 $2aS_k-bS_{k-1}$ 也是偶

数。即当 $n = k + 1$ 时，$S_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ 是偶数。

根据(1)和(2)可知，对任何自然数 n，两根的 n 次方的和 S_n 必为偶数。

四　集合初步

为了研究事物的性质，我们把具有某种共同特性的事物的全体称为集合。属于集合的每个个体叫做集合的元素。

集合通常用大写英文字母如：$A,B,C,X,Y,Z\cdots\cdots$ 来表示。元素通常用小写字母如：$a,b,c,x,y,z\cdots\cdots$ 来表示。

若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；

反之 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$(或 $a \overline{\in} A$).

我们通常用 N 表示全体自然数的集合，Z 表示全体整数的集合，Q 表示全体有理数的集合，R 表示全体实数的集合。(R^+，R^- 分别表示正，负实数集合。)

1. 集合表示法

集合通常有两种表示法：

(1) **列举法**：把集合中的元素写在大括号内一一列举出来表示集合。如：

$$A = \{1,3,5,7\}.$$

(2) **描述法**：把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合。如：

$$A = \{x | x - 3 > 2\}$$

其中 x 为元素的代表符号，用记号 | 隔开，后面为元素所具有的性质。

有时我们也用图象法来表示集合，即在同一平面内，用一条封闭曲线所围成的图形表示集合。如图 0—1(1)，(2)，此图