师范专科学校试用教材

空间解析几何

东北地区师专数学教材协编组

《空间解析几何》编写组

延边教育出版社

师范专科学校试用教材

空间解析几何

东北地区师专数学教材协编组
《空间解析几何》编写组

延边教育出版社

内 容 提 要

本书是编者根据原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专业教学大纲编写而成的。本书结合师专教学的实际，侧重基础理论的论述。叙述简明扼要，由浅入深，通俗易懂，范例较多，便于教学和阅读，可作为二、三年制师专数学专业试用教材，也可作高师数学专业函授教材及中学数学教师进修和各高校、成人高校有关专业学生学习的参考用书。

本书的内容有：向量与坐标，平面与直线，柱面，锥面，旋转曲面与二次曲面，二次曲面的一般理论。

责任编辑：徐贞淑　刘德录
插　　图：赵福顺

师范专科学校试用教材
空间解析几何
东北地区师专数学教材协编组
《空间解析几何》编写组
延边教育出版社出版、发行
延边新华印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　8.5印张　172千字
1987年7月第1版　1987年第1次印刷
ISBN　7—80509—067—×/O·4
书号：13092·7　印数：1——5,140册
定价：1.50元

前　　言

多年来，高等师范专科学校一直沿用本科院校的教材，许多在师专工作的教育工作者无不感到这种办法的诸多不便，因此编写一套适合师专特点的，通俗易懂，深入浅出，便于讲授和自学的师专专用教材，一直是师专广大师生的愿望。

今天，在延边教育出版社的大力支持下，由延边师专数学系发起，在东北三省部分师专的数学工作者的共同努力下，这套师专使用的数学教材终于和广大读者见面了。在付印之时，我们感到莫大的宽慰。

这本《空间解析几何》是以教育部一九八二年十月在昆明召开的师专数学专业教学大纲审订会审订的《解析几何》教学大纲为准绳编写的。关于教材的内容有以下两点说明：

（一）由于在教学实践中，同学们感到绘制空间图形是一个难点，因此，我们在第四章编写了“空间曲面图形的画法”一节。一方面为了丰富同学们的空间想象能力和空间解析几何本身的需要；另一方面为了使同学们在学习重积分时较为准确地画出积分的区域图。尽管讲的都是一些简单图形的画法，不过，只要读者举一反三，多实践，多摸索，我们相信，在此基础上是不难画出更复杂的空间图形的。

（二）关于二次曲面的一般理论，在许多通行的教材中，都是采用引进许多关于二次曲面的几何概念，并从几何的角度出

发进行论述，因此使这部分知识显得篇幅过长和内容繁琐。本书为了删繁就简，突出二次曲面方程的化简这一重点，也是为了加强与代数知识的联系，大胆地对二次曲面的主要方面采用代数的定义方法，从而使二次曲面理论的论述过程大为简化。这样做难免使我们的论述带有较多的代数色彩，但相信读者，只要掌握了书中关于矩阵和线性方程组理论等知识，这一章还是不难学好的。

参加本书编写的人员有：辽宁省朝阳师专的杜志祯同志、辽宁省阜新师专的刘继先同志、黑龙江省大庆师专的王炜仁同志、吉林省通化师院的胥凤霞同志、吉林省延边师专的张邦基同志。全书由刘继先同志统稿、负责全书的整理、修改、定稿和校订。

在编写过程中，得到了兄弟院校的有关同志的大力支持和热情帮助，同时，也参考了兄弟院校的教材和参考书。协编组的全体同志谨此一并表示感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，错漏之处在所难免，诚恳地希望广大读者和数学教育工作者批评指正，有待再版时修改。

东北地区师专数学教材

《空间解析几何》协编组

一九八六年十月

目　　录

第一章　向量代数

§1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

在平面解析几何里，我们对平面直角坐标系已经很熟悉了。在这里，我们将用类似地方法建立空间直角坐标系。

在空间任取一定点O(图1-1)，作坐标原点。再取三条过O点，且两两互相垂直并规定了正方向的直线作轴。习惯上，一条是前后轴，它的方向是由后到前(指向读者)，记作Ox；一条是左右轴，它的方向是由左到右，记作Oy；另一条是上下轴，它的方向是由下到上，记作Oz。最后取一定长线段作为三个轴的公共长度单位(通常情况下，它们的长度单位是相同的。)。这样，就构成了空间直角坐标系，记作$O\text{-}xyz$。O点叫

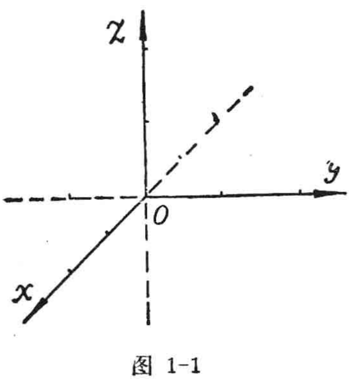

图 1-1

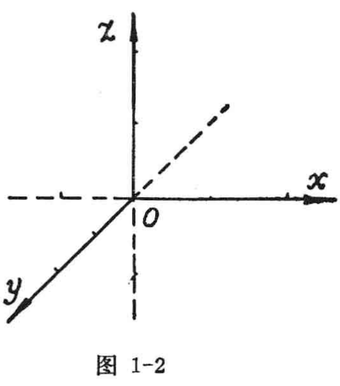

图 1-2

做坐标原点，Ox、Oy、Oz、分别叫做横轴（或x轴）、纵轴（或y轴）、竖轴（或z轴），它们统称为坐标轴。

三个坐标轴中的每两个坐标轴确定一个平面，这个平面叫做坐标平面。简称坐标面。这样，共有三个坐标面。它们两两互相垂直。由x轴和y轴所确定的坐标面叫做xOy坐标面，由y轴和z轴所确定的坐标面叫做yOz坐标面，由x轴和z轴所确定的坐标面叫做xOz坐标面。

这样建立的空间直角坐标系称为右手直角坐标系。因为，如果将右手的大拇指、食指、中指伸开，使其两两互相垂直，若大拇指和食指分别指向x轴和y轴的正方向，则中指指的方向恰好和z轴的正方向相同。否则，如果三个坐标轴的顺序关系符合左手系，即：将左手的大拇指、食指、中指伸开，使其两两互相垂直，若大拇指和食指分别指向x轴和y轴的正方向，则中指指的方向恰好和z轴的正方向相同，那么，这样的空间直角坐标系称为左手直角坐标系（图1—2）。本书使用的空间直角坐标系，除了特殊说明外，指的都是右手直角坐标系。

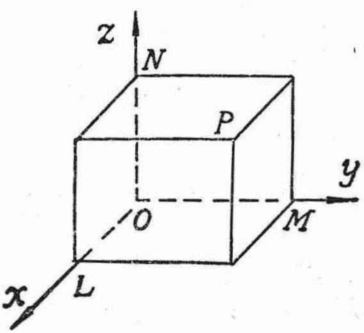

图 1-3

建立了空间直角坐标系后，我们就可以确定空间点的直角坐标了。

设P为空间的任意一点（图1—3），分别作出P点在三个坐标轴上的射影L，M，N（所谓点在坐标轴上的射影，就是过该点

且垂直于作标轴的平面与坐标轴的交点)，则$OL=x$，$OM=y$，$ON=z$就被P点唯一地确定了。于是，空间的任意一点，对应着唯一的有序的三个实数组成的数组(x，y，z)。反之，若x，y，z依次在三个坐标轴上确定L，M，N三点，以OL，OM，ON为棱作长方体，则长方体上和O点相对的顶点就是P点，并且P点是唯一的。所以空间的点与有序的三个实数组成的数组(x，y，z)是一一对应的，我们就把这有序的三实数组(x，y，z)叫做P点的直角坐标，记作P(x，y，z)，其中x叫做横坐标，y叫做纵坐标，z叫做竖坐标。

若P点在某一坐标面上，则其三个坐标中有一个坐标为零。如P点在xOy坐标面上，它的竖坐标z为零；若P点在某一个坐标轴上，则其三个坐标中有两个坐标为零；若P点重合于坐标原点，则其三个坐标都为零。

2. 坐标系的画法

在平面上，画空间直角坐标系，以及在一个P点的坐标x，y，z确定之后，怎样把P点在空直间角坐标系里画出来，使其获得较好的立体感和直观的效果，常采用下面的方法：

假定使用的是一张方格纸，上面印着一族纵的和一族横的平行线，平行线间的距离都相等。取任意一纵线和一横线的交点为坐标原点O，从O点起向右的半线为正y轴，向上的半线为正z轴，向左下方的对角线为正x轴。在纸上，令y轴和z轴的长度单位相等，而x轴的长度单位等于y轴(或z轴)的长度单位的$\frac{\sqrt{2}}{2}$，换句话说，若以y轴(或z轴)的长度单位为边作正方形，

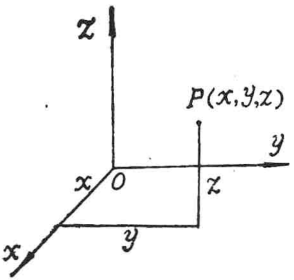

图 1-4

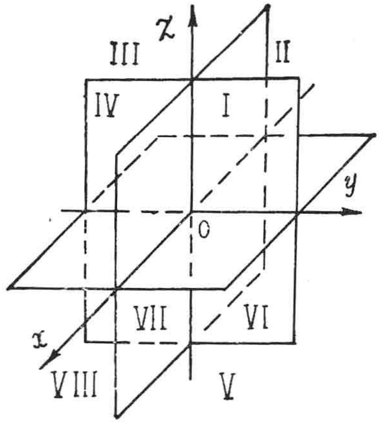

图 1-5

则令 x 轴的长度单位等于该正方形的对角线的一半。这样，直观上就会觉得这三个坐标轴的长度单位大体上是相等的。当P点的坐标确定之后，就可以象图1—3那样画长方体确定P点。也可以用一条坐标折线来确定P点(图1—4)。

三个坐标面把整个空间分为八个部分(图1—5)，每一部分叫做一个卦限，共有八个卦限。显然，坐标面上的点不属于任何卦限。为了研究问题方便，我们把这八个卦限编上号，同时在前、右、上三个半空间的部分叫做第Ⅰ卦限；同时在后、右、上三个半空间的部分叫做第Ⅱ卦限；同时在后、左、上三个半空间的部分叫做第Ⅲ卦限；同时在前、左、上三个半空间的部分叫做第Ⅳ卦限。在下半空间而位于这四个卦限下面的四个卦限分别叫做第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

在第Ⅰ卦限内的点的坐标全是正的，记作(＋，＋，＋)，在

第Ⅱ卦限内的点的坐标则为(－，＋，＋)，其它各卦限内的点的坐标，完全可以类似地推出。现归纳列表如下：

坐标 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	＋	－	－	＋	＋	－	－	＋
y	＋	＋	－	－	＋	＋	－	－
z	＋	＋	＋	＋	－	－	－	－

图 1-6

这样，不在坐标面上的点，只要根据它们坐标的符号就可以确定它们所在的卦限。

例 已知空间一点P的坐标为(3，4，3)，试在直角坐标系O-xyz里描出它的位置。

解 在x轴上沿正方向取$|OL|=3$个长度单位（图1—7），从L点出发，沿着y轴的正方向取$|LP'|=4$个长度单位，再从P′点出发，沿着z轴的正方向取$|P'P|=3$个长度单位，则P点就是所要求描出的位置。

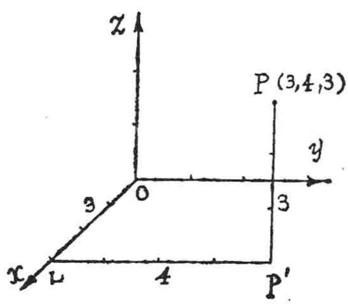

图 1-7

习　题

1. 在空间直角坐标系里，描出下列各点的位置。

A(0, 1, -1), B(0, 0, 5), C(0, -3, 0), D(-2, -3, 1), E(1, 1, -1), F(2, -2, -3)。

2. 在空间直角坐标系里，指出下列各点所在的特殊位置。

A(-2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, -5), D(0, 1, -2), E(3, 0, 1), F(2, -1, 0)。

3. 在空间直角坐标系里，试求下列各点关于坐标原点、各坐标轴、各坐标面的对称点的坐标。

P(2, -5, 7), Q(-3, 6, 0), R(2, 3, 5)。

§2　向量的概念

我们知道，在客观世界中有很多量是由数值的大小来决定的。例如：长度是由它所含长度单位的数值决定的；温度是由度数的数值决定的，等等。这类量叫做数量(或叫做标量)。还有很多量，除了知道它们的数值外，还必须知道它们在空间里的方向。例如：位移、力、速度等等，这类量叫做向量。

定义　既有大小又有方向的量叫做向量。

我们用有向线段来表示向量。有向线段的始点和终点分别称为向量的始点和终点，有向线段的方向，即由始点至终点的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小。向量的大小叫做向量的模。始点为A终点为B的向量记作$\overrightarrow{AB}$。有时也用一个小写字母$\boldsymbol{a}$表示向量。向量$\overrightarrow{AB}$和$\boldsymbol{a}$的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$和$|\boldsymbol{a}|$。

始点和终点重合的向量叫做零向量，记作0。显然，零向

量的模等于零。零向量的方向不定。不是零向量的向量叫做非零向量。

模等于1的向量叫做单位向量。与已知向量$\boldsymbol{a}$具有同方向的单位向量叫做向量$\boldsymbol{a}$的单位向量。向量$\boldsymbol{a}$的单位向量通常用$\boldsymbol{a}^0$表示，而且有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 及 \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

如果向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的模相等，而且方向相同，那么称向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是相等的向量。记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。显然，所有的零向量都是相等的向量。

两个向量是否相等与它们的始点无关，只是由它们的模和方向决定的。以后运用的正是这种始点可以任意选取，而由模和方向决定的向量，这样的向量叫做自由向量。也就是说，自由向量是可以在空间任意平行移动的，平行移动之后，仍然表示和原来的向量是同一个向量。以后所说的向量，除特殊说明外，指的都是自由向量。

如果向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的模相等，而方向相反，那么称向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是互为反向量。记作$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$。显然，向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$是一对互为反向量，即$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。

方向相同或方向相反的向量叫做平行向量。若向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是平行向量，则记作$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$。如果把彼此平行的一组向量归结到共同的始点，那么这组向量一定在同一条直线上，因此把平行于同一条直线的一组向量叫做共线向量。显然，零向量和任何向量都是共线向量。同样，如果把平行于同一个平面的

一组向量归结到共同的始点，那么这组向量一定在同一个平面上，因此把三个或三个以上平行于同一个平面的一组向量叫做共面向量。显然，零向量和任何向量都是共面向量。

以坐标原点为始点，以空间任意一点P为终点的向量叫做点P的径向量。简称向径，记作$\boldsymbol{r}$，即$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$。

习　题

1. 下列情形中向量的终点各构成什么图形？

1）　把空间中的一切单位向量归结到共同的终点。

2）　把平行于某一个平面的一切单位向量归结到共同的始点。

3）　把平行于某一条直线的一切单位向量归结到共同的始点。

4）　把平行于某一条直线的一切向量归结到共同的始点。

2. 在一个平行四边形的边上，可以作哪些相等的向量？在一个平面上的正六边形的边上可以作哪些相等的向量？在一个等边三角形的边上呢？

§3　向量的加法

我们知道，在物理学中，力是向量，如果两个力F_1和F_2同时作用于一原点P，那么它们的合力，就是从P点出发以F_1和F_2为邻边的平行四边形的对角线所表示的向量。这种合成法则叫做平行四边形法则。这种平行四边形法则，对于一般向量

的加法也是有意义的。

定义 设已知两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，将它们移到共同的始点O（图1—8），使$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形OBCA，则其对角线所表示的向量$\boldsymbol{c}$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

由两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，求它们的和的运算叫做向量的加法。上述求向量和的作图法叫做平行四边形法则。

求向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，还有另一种方法：

从空间一点O，引向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$（图1—9），再从A点出发，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$就是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这种求向量和的作图法叫做三角法则。

由三角形法则，可以推出：

$$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$$

向量加法满足下列的运算定律：

1） 交换律，即对于任何两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

如果向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共线，那么此等式显然成立。如果向量$\boldsymbol{a}$和

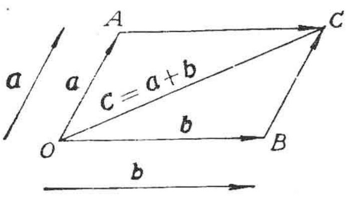

图 1-8

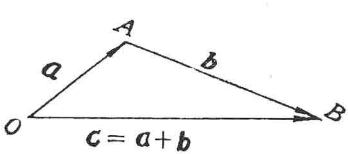

图 1-9

$\boldsymbol{b}$不共线，那么把向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$归结到共同的始点O(图1—10)，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连结BC，根据平行四边形的性质可知，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$。则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

而
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

所以对于任意两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

2) 结合律，即对于任何三个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，和$\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

如果向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中，至少有两个向量是共线的，那么此等式显然成立。如果向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$彼此都不共线，那么从空间一点O，引向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$(图1—11)，再作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，

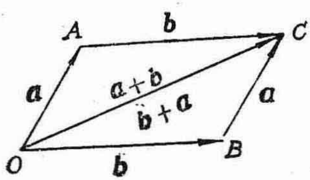

图 1-10

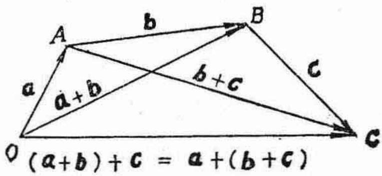

图 1-11

连结OB，OC和AC，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$