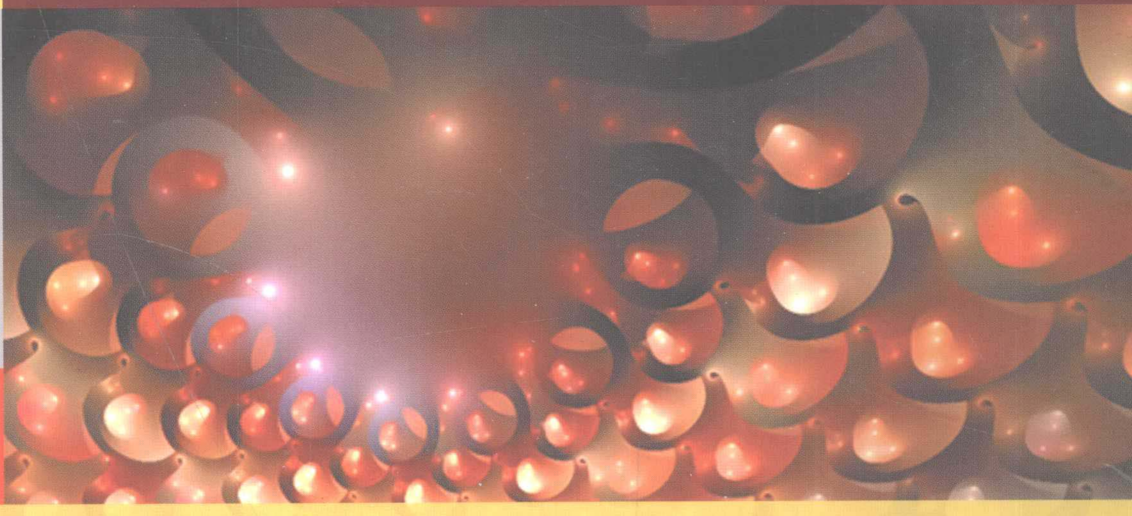

量子力学

习题与解答

陈鄂生　编著

科学出版社

量子力学习题与解答

陈鄂生　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书汇集量子力学习题约 300 道，并给出详细解答. 习题按内容分成八章：薛定谔方程与一维定态问题、力学量算符、表象、三维定态问题、近似方法、自旋、全同粒子体系和散射. 每章开始部分先列出学习要点，这是在做题前必须掌握的基本知识. 习题大部分取自近 20 年中国科学院、北京大学、南京大学、复旦大学等高校硕士研究生入学考试量子力学试题，并在附录中给出这些院校的量子力学试卷约 70 份，其中除简单题外均给出解答.

本书可作为大学本科物理专业"量子力学"课程的参考书，并供报考物理相关专业的硕士研究生入学考试备考者在考前学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

量子力学习题与解答 / 陈鄂生编著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-032773-4

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①量子力学-高等学校-题解 Ⅳ. ①O413.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第231663号

责任编辑：胡 凯 杨 锐 / 责任校对：刘小梅
责任印制：赵 博 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 1 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2012 年 1 月第一次印刷 印张：28
字数：554 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

我曾在山东大学讲授“量子力学”课程多年. 在这期间，常有学生带着近期各院校量子力学考研试题来探讨试题的求解方法. 时间久了，我就积累了大量这方面的材料. 2003 年，我将这些材料整理成一份讲义“量子力学习题与解答”，作为量子力学的课堂辅助教材和考研辅导教材给学生使用. 2005 年，我转到山东大学威海分校继续讲授量子力学，在这期间又积累了一些新的材料，并将它们补充到讲义中，这就形成了本书. 我希望本书对讲授量子力学的教师和学习量子力学的学生能有一点帮助.

我要特别感谢鲁东大学的柳盛典教授、科学出版社的胡凯和杨锐两位编辑，正是在他们的大力支持和帮助下，本书才得以正式出版. 我还要感谢我的历届学生，他们为本书提供了大量素材，并参与了部分习题的讨论. 例如书中习题7.15 的解答方法 1 就由李静同学提出，她所提出的方法 1 比我采用的方法 2 要简单得多.

由于水平有限，书中错误在所难免，真诚期待读者的批评和指正.

陈鄂生

2011 年 7 月

基本物理常数

普朗克常数	$h=6.62608\times10^{-34}$ 焦耳·秒 $=6.62608\times10^{-27}$ 尔格·秒 $\hbar=h/2\pi=1.05459\times10^{-34}$ 焦耳·秒 $=1.05459\times10^{-27}$ 尔格·秒
光速	$c=2.99792\times10^{8}$ 米/秒 $=2.99792\times10^{10}$ 厘米/秒
电子电荷绝对值	$e=1.60219\times10^{-19}$ 库仑 $=4.80324\times10^{-10}$ 静电单位[(尔格·厘米)$^{1/2}$]
精细结构常数	$\alpha=e^2/\hbar c=1/137.036=7.29735\times10^{-3}$
阿伏伽德罗常数	$N_A=6.02205\times10^{23}$ /摩尔
玻尔兹曼常数	$k=1.38066\times10^{-23}$ 焦耳/开 $=1.38066\times10^{-16}$ 尔格/开
气体常数	$R=N_A k=8.31441$ 焦耳/(开·摩尔) $=8.31441\times10^{7}$ 尔格/(开·摩尔)
电子质量	$m_e=9.10953\times10^{-31}$ 千克 $=0.511003\mathrm{MeV}/c^2$
质子质量	$m_p=1.67265\times10^{-27}$ 千克 $=938.280\mathrm{MeV}/c^2$
中子质量	$m_n=1.67492\times10^{-27}$ 千克 $=939.555\mathrm{MeV}/c^2$
玻尔半径	$a=\hbar^2/m_e e^2=5.29177\times10^{-11}$ 米
电子经典半径	$r_e=e^2/m_e c^2=2.81794\times10^{-15}$ 米
玻尔磁子	$\mu_B=e\hbar/2m_e c=9.27408\times10^{-24}$ 焦耳/特斯拉 $=9.27408\times10^{-21}$ 尔格/高斯
核磁子	$\mu_N=e\hbar/2m_p c=5.05082\times10^{-27}$ 焦耳/特斯拉 $=5.05082\times10^{-24}$ 尔格/高斯

1 焦耳$=10^{7}$ 尔格

1 Å$=10^{-10}$ 米$=10^{-8}$ 厘米$=10^{5}$ 飞米

1 a.m.u $=1.66057\times10^{-27}$ 千克 $=931.502\mathrm{MeV}/c^2$

1 eV $=1.60219\times10^{-19}$ 焦耳 $=1.60219\times10^{-12}$ 尔格

1 特斯拉$=10^{4}$ 高斯

1 尔格(克·厘米^2/秒^2)$=10^{-7}$ 焦耳(千克·米^2/秒^2)

目　　录

前言
第一章　薛定谔方程与一维定态问题……1
第二章　力学量算符……55
第三章　表象……109
第四章　三维定态问题……132
第五章　近似方法……171
第六章　自旋……243
第七章　全同粒子体系……313
第八章　散射……352
附录　硕士研究生入学考试量子力学试题……375
　　中国科学院 1990~2010 年……375
　　北京大学 1992, 1994~2008 年……386
　　南京大学 1992~2010 年……411
　　复旦大学 1994~2006 年……431

第一章　薛定谔方程与一维定态问题

学 习 要 点

1. 在坐标表象中，无自旋的粒子或虽有自旋但不考虑自旋运动的粒子的态，用波函数$\psi(\boldsymbol{r},t)$表示. $|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2\,\mathrm{d}\tau$表示$t$时刻、粒子处于空间$\boldsymbol{r}$处$\mathrm{d}\tau$体积元内的概率，$|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2$表示概率密度. 根据波函数的物理意义，波函数$\psi(\boldsymbol{r},t)$应具有如下性质：(1)任一时刻在全空间找到粒子的概率$\int|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2\,\mathrm{d}\tau$取有限值，即$\psi(\boldsymbol{r},t)$是平方可积的；(2)$|\psi(\boldsymbol{r},t)|$是单值的；(3)$\psi(\boldsymbol{r},t)$与$\nabla\psi(\boldsymbol{r},t)$是$\boldsymbol{r}$的连续函数.

2. 波函数$\psi(\boldsymbol{r},t)$满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=\hat{H}\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1}$$

其中

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2}$$

是粒子的哈密顿算符，它由动能算符$\hat{T}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$与势能算符$V(\boldsymbol{r},t)$组成. 如果势能$V=V(\boldsymbol{r})$不含时间$t$，则

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\,\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1-3}$$

$\psi(\boldsymbol{r})$满足定态方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1-4}$$

或

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1-5}$$

这里的E作为哈密顿算符$\hat{H}$的本征值，代表粒子的能量. 在已知势能$V(\boldsymbol{r})$的条件下，可以求出定态方程(1-4)的解：定态能量E与定态波函数$\psi(\boldsymbol{r})$.对于粒子被束缚在有限空间内运动的态(束缚态)，定态能量取分立值. 假若定态方程(1-4)的解已求出，它们是E_n与$\psi_n(\boldsymbol{r}),n=1,2,\cdots$.选择$\psi_n(\boldsymbol{r})$中的常数因子，使之满足归一化条件

$$\int |\psi_n(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\tau = 1 \tag{1-6}$$

含有时间的定态波函数为

$$\psi_n(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}\ \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{1-7}$$

含时薛定谔方程(1-1)的一般解为

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}\ \psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{1-8}$$

其中 c_n 为任意常数．如果已知 $t=0$ 时的波函数 $\psi(\boldsymbol{r},0)=\varphi(\boldsymbol{r})$，则常数 c_n 不再是任意的，

$$c_n = (\psi_n, \varphi) = \int \psi_n^*(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}\tau \tag{1-9}$$

$|c_n|^2$ 代表粒子能量取值 E_n 的概率.

3. 一维束缚定态有如下性质：(1)能量是非简并的；(2)波函数是实函数；(3)如果势函数 $V(x)$ 满足对称条件：$V(-x)=V(x)$，则波函数 $\psi(x)$ 有确定的宇称，$\psi(x)$ 不是偶函数，就是奇函数．

4. 一维无限深方势阱 $V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a \\ \infty, & x<0, x>a\end{cases}$ 中的定态能量和波函数为

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}, \quad n=1,2,\cdots \tag{1-10}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & 0<x<a \\ 0, & x<0, x>a\end{cases} \tag{1-11}$$

如果坐标原点取在势阱中心，则定态波函数为

$$\psi_n(x) = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left[\dfrac{n\pi}{a}\left(x+\dfrac{a}{2}\right)\right], & |x|<\dfrac{a}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{a}{2}\end{cases} \tag{1-12}$$

$\psi_n(x)$ 具有宇称 $(-1)^{n+1}$.

5. 势能 $V(x)=\dfrac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 的一维谐振子定态能量和波函数为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{1-13}$$

$$\psi_n(x) = N_n \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x) \tag{1-14}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}},\ N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!}},\ n = 0,1,2,\cdots \tag{1-15}$$

$\psi_n(x)$ 具有宇称 $(-1)^n$.

6. 在 δ 函数势场 $V(x) = A\delta(x-a)$ 中，定态波函数 $\psi(x)$ 在 $x = a$ 点连续，它的一阶导数 $\psi'(x)$ 在 $x = a$ 点不连续：

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = \frac{2\mu A}{\hbar^2}\psi(a) \tag{1-16}$$

7. 波函数为 $\psi(x)$ 的一维运动粒子的动量概率分布函数为

$$W(p) = \left|\frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\psi(x)\mathrm{d}x\right|^2 \tag{1-17}$$

概率流密度为

$$j = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}\left[\psi^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) - \psi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi^*(x)\right] \tag{1-18}$$

8. 在量子力学中，通常采用波函数 $|\psi(t)\rangle$ 随时间变化，力学量 $\hat{F}(\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{p}})$ 不随时间变化的描述方式. 这种描述方式叫做薛定谔(S)绘景. 在 S 绘景中，运动方程为薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1-19}$$

另一种描述方式叫做海森伯(H)绘景. 在 H 绘景中，波函数 $|\psi_{\mathrm{H}}\rangle$ 不随时间变化，力学量 $\hat{F}_{\mathrm{H}}(t)$ 随时间变化，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}_{\mathrm{H}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F}_{\mathrm{H}}(t), \hat{H}_{\mathrm{H}}(t)] \tag{1-20}$$

两个绘景中波函数之间的关系，以及力学量之间的关系是

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\psi_{\mathrm{H}}\rangle,\ |\psi(0)\rangle = |\psi_{\mathrm{H}}\rangle \tag{1-21}$$

$$\hat{F}_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar},\ \hat{F}_{\mathrm{H}}(0) = \hat{F} \tag{1-22}$$

由式(1-22)看出，在两个绘景中，哈密顿量是一样的：$\hat{H}_{\mathrm{H}}(t) = \hat{H}$，

$$\frac{\hat{p}_{\mathrm{H}}^2(t)}{2\mu}+V\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{H}}(t)\right)=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(\boldsymbol{r}) \tag{1-23}$$

在两个绘景中，力学量的平均值是一样的：

$$\begin{aligned}\overline{F(t)}&=\langle\psi_{\mathrm{H}}|\hat{F}_{\mathrm{H}}(t)|\psi_{\mathrm{H}}\rangle=\langle\psi(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{F}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle\\&=\langle\psi(t)|\hat{F}|\psi(t)\rangle\end{aligned} \tag{1-24}$$

以上内容是在S绘景中所有力学量，包括哈密顿量，都是同时间无关的假定下给出的. 如果在S绘景中力学量本身 $\hat{F}(t)$ 含时间，则在H绘景中，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}_{\mathrm{H}}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{H}}(t)}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{F}_{\mathrm{H}}(t),\hat{H}_{\mathrm{H}}(t)] \tag{1-25}$$

习题与解答

1.1　一个质量为 μ 的粒子在一维势场 $V(x)=\begin{cases}0, & |x|>a\\ -V_0, & |x|<a\end{cases}$ 中运动，其中 $V_0>0$. 求基态能量 E_0 满足的方程；求存在且仅存在一个束缚态的条件.

解　在此势场中的定态方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=E\psi(x),\qquad |x|>a$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}-V_0\psi(x)=E\psi(x),\quad |x|<a$$

在此势场中要形成束缚态，能量 E 只能在 0 与 $-V_0$ 之间. 令

$$E=-|E|,\ \alpha=\sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}},\ \beta=\sqrt{\frac{2\mu(V_0-|E|)}{\hbar^2}} \tag{1}$$

定态方程变为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=\alpha^2\psi(x),\quad |x|>a\\&\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\beta^2\psi(x),\quad |x|<a\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $V(x)$ 满足对称条件 $V(-x)=V(x)$，一维束缚定态有确定的宇称. 方程(2)的偶宇称解为

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= Ae^{\alpha x}, \qquad x<-a \\ \psi_2(x) &= B\cos\beta x, \ -a<x<a \\ \psi_3(x) &= Ae^{-\alpha x}, \qquad x>a\end{aligned} \tag{3}$$

由ψ与ψ'在$x=a$点的连续条件,得

$$B\cos\beta a = Ae^{-\alpha a} \tag{4}$$

$$B\beta\sin\beta a = A\alpha e^{-\alpha a} \tag{5}$$

以上两式相比,得

$$\beta\tan\beta a = \alpha \tag{6}$$

令

$$\eta=\alpha a,\ \zeta=\beta a \tag{7}$$

式(6)变为

$$\eta = \zeta\tan\zeta \tag{8}$$

由η与ζ的定义式(7)与(1),得

$$\eta^2+\zeta^2=\frac{2\mu V_0a^2}{\hbar^2}\equiv Q^2\ (\text{常数}) \tag{9}$$

$$Q=\sqrt{\frac{2\mu V_0a^2}{\hbar^2}} \tag{10}$$

偶宇称定态能量由方程(8)与(9)通过作图法确定. 如图 1.1 所示, 由曲线$\eta=\zeta\tan\zeta$与半径为Q的圆在(η,ζ)坐标系的第一象限$(\eta>0,\zeta>0)$内的交点得到$\eta_0,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots$, 从而得到偶宇称定态能量

$$E_i=-\frac{\eta_i^2\hbar^2}{2\mu a^2},\ i=0,2,\cdots \tag{11}$$

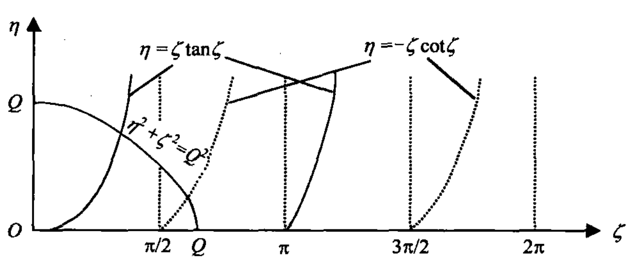

图 1.1

从图1.1看出, 无论势阱参数V_0与a取什么值, 至少存在一个偶宇称束缚态——基

态. 基态能量 E_0 满足的方程为(8)与(9).

类似的推导可得奇宇称态能量由方程

$$\eta = -\zeta \cot \zeta \tag{12}$$

与(9)决定. 由图1.1看出, 只有当 $Q > \pi/2$ 时, 才存在奇宇称束缚态[曲线(12)与(9)才有交点]. 奇宇称态的最低能量 $E_1 > E_0$, 为体系的第一激发态能量. 由此可见, 体系存在且仅存在一个束缚态的条件为

$$Q = \sqrt{\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}} < \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad V_0 a^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \tag{13}$$

1.2 质量为 μ 的粒子在势场 $V(x) = -\alpha\delta(x)$ $(\alpha > 0)$ 中运动, 求束缚态能级和相应的波函数.

解 定态方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \alpha\delta(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

在 δ 函数势阱中要形成束缚态, 能量必定是负的. 令

$$E = -|E|, \ k = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}}$$

方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\delta(x)\psi(x) + k^2\psi(x)$$

在求解含有 $\delta(x)$ 函数势的方程时, 要去掉势能发散点 $x = 0$. 然后在 $x < 0$ 与 $x > 0$ 两个区求出波函数的一般解. 波函数 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 的值将由 $\psi(x)$ 的连续条件来决定. 不考虑 $x = 0$ 时, 方程及其一般解为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = k^2\psi(x)$$

$$\psi_1(x) = A\mathrm{e}^{kx} + B\mathrm{e}^{-kx}, \ x < 0$$

$$\psi_2(x) = C\mathrm{e}^{kx} + D\mathrm{e}^{-kx}, \ x > 0$$

由束缚态条件 $\psi_1(-\infty) = 0$ 与 $\psi_2(\infty) = 0$, 得 $B = C = 0$,

$$\psi_1(x) = A\mathrm{e}^{kx}, \quad x < 0$$

$$\psi_2(x) = D\mathrm{e}^{-kx}, \ x > 0$$

由 $\psi(x)$ 在 $x=0$ 的连续条件 $\psi_1(0)=\psi_2(0)$，得 $A=D$，

$$\psi_1(x)=A\mathrm{e}^{kx},\quad x<0$$
$$\psi_2(x)=A\mathrm{e}^{-kx},\ x>0$$

再由 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 的不连续条件

$$\psi_2'(0)-\psi_1'(0)=-\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\psi_1(0)$$

得 $k=\mu\alpha/\hbar^2$. 根据 k 的定义式

$$k=\frac{\mu\alpha}{\hbar^2}=\sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}}$$

由上式算出束缚态能量

$$E=-\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2}$$

相应的归一化波函数为

$$\psi(x)=\sqrt{k}\mathrm{e}^{-k|x|}=\sqrt{\frac{\mu\alpha}{\hbar^2}}\mathrm{e}^{-\mu\alpha|x|/\hbar^2}$$

1.3　质量为 μ 的粒子处于一维势场

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x\geqslant a\\ 0, & 0<x<a\\ \infty, & x=0\\ 0, & -a<x<0\\ \infty, & x\leqslant -a\end{cases}$$

中，求定态能量 E 与波函数 $\psi(x)$.

解　在 $0<x<a$ 与 $-a<x<0$ 区内，定态方程均为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+k^2\psi(x)=0,\ k=\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

其解为

$$\psi_1(x)=A_1\sin kx+B_1\cos kx,\ -a<x<0$$
$$\psi_2(x)=A_2\sin kx+B_2\cos kx,\ \ 0<x<a$$

因 $V(0)=\infty$，故 $\psi(0)=0$. 由此得，$B_1=B_2=0$. 上式变为

$$\psi(x)=A\sin kx,\ |x|<a$$

由 $\psi(\pm a)=0$，得 $ka=n\pi, n=1,2,\cdots$. 故有

$$k=\frac{n\pi}{a}=\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}},\ E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}A_n\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

由波函数的归一化条件得 $A_n=\sqrt{1/a}$.

1.4 求在半壁无限深方势阱 $V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0<x<a\\ V_0, & x>a\end{cases}$ 中存在束缚态的条件 $(V_0>0)$.

解 显然，$x<0$ 的 $\psi(x)=0$. 在此势阱中束缚态能量 E 在 0 与 V_0 之间. 令

$$k=\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}},\ \alpha=\sqrt{\frac{2\mu(V_0-E)}{\hbar^2}} \tag{1}$$

定态方程为

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0,\ 0<x<a \tag{2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\alpha^2\psi(x)=0,\quad x>a \tag{3}$$

方程(2)与(3)满足条件 $\psi(0)=0$ 与 $\psi(\infty)=0$ 的解为

$$\psi_1(x)=A\sin kx,\ 0<x<a \tag{4}$$

$$\psi_2(x)=Be^{-\alpha x},\quad x>a \tag{5}$$

由连续条件 $\psi_1(a)=\psi_2(a)$ 与 $\psi_1'(a)=\psi_2'(a)$ 得

$$A\sin ka=Be^{-\alpha a} \tag{6}$$

$$Ak\cos ka=-B\alpha e^{-\alpha a} \tag{7}$$

以上两式相比，得

$$\alpha=-k\cot ka \tag{8}$$

令

$$\eta=\alpha a,\ \zeta=ka \tag{9}$$

式(8)变为

$$\eta = -\zeta \cot\zeta \tag{10}$$

由式(9)与(1)得

$$\eta^2 + \zeta^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \equiv Q^2,\ Q = \sqrt{\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}} \tag{11}$$

定态能量 E 由曲线(10)与(11)在 (η,ζ) 坐标系的第一象限 $(\eta > 0, \zeta > 0)$ 内的交点得到. 由图1.2看出, 只有在 $Q \geqslant \pi/2$ 时, 两曲线才有交点, 故存在束缚态的条件是

$$Q = \sqrt{\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}} \geqslant \frac{\pi}{2} \quad 或 \quad V_0 a^2 \geqslant \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu} \tag{12}$$

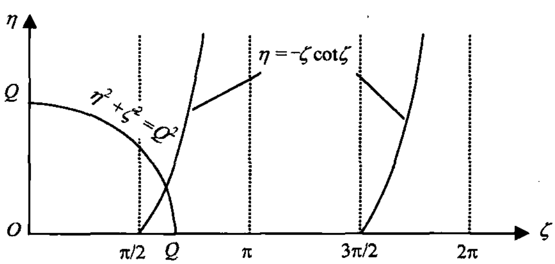

图 1.2

1.5　质量为 μ 的粒子在一维势场

$$V(x) = -\alpha\delta(x) + V'(x),\ V'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$$

中运动, 其中 α 与 V_0 均为正实数. (1)给出存在束缚态的条件, 并给出能量本征值与相应的本征函数; (2)给出粒子处于 $x > 0$ 区中的概率, 它是大于1/2, 还是小于1/2? 为什么?

解　在求解含有 $\delta(x)$ 函数势的方程时, 要去掉势能发散点 $x = 0$. 在去掉 $x = 0$ 点后, 定态方程为

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} &= E\psi(x), & x < 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V_0\psi(x) &= E\psi(x), & x > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

在此势场中要形成束缚态, 能量 $E < 0$. 令

$$E = -|E|,\ \beta = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}},\ \gamma = \sqrt{\frac{2\mu(V_0 + |E|)}{\hbar^2}} \tag{2}$$

方程(1)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \beta^2\psi(x),\ x<0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \gamma^2\psi(x),\ x>0 \tag{4}$$

$\psi(x)$ 满足条件

$$\psi(0^+) = \psi(0^-),\ \psi(\pm\infty) = 0 \tag{5}$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\psi(0) \tag{6}$$

方程(3)与(4)满足条件(5)的解为

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A\mathrm{e}^{\beta x},\quad x<0 \\ \psi_2(x) &= A\mathrm{e}^{-\gamma x},\ x>0 \end{aligned} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),得

$$\gamma + \beta = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}$$

或

$$\sqrt{\frac{2\mu(V_0 + |E|)}{\hbar^2}} = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} - \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} \tag{8}$$

式(8)两边平方,得

$$\sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2} - V_0\right) \tag{9}$$

$|E|$ 有解的条件(β,γ 均为正实数)是

$$\frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2} > V_0 \quad 或 \quad \alpha^2 > \frac{\hbar^2 V_0}{2\mu} \tag{10}$$

这也是存在束缚态的条件. 由式(9)得

$$|E| = \frac{\hbar^2}{8\mu\alpha^2}\left(\frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2} - V_0\right)^2 \tag{11}$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{8\mu\alpha^2}\left(\frac{2\mu\alpha^2}{\hbar^2} - V_0\right)^2 \tag{12}$$

相应的波函数如式(7)所示，其中 β 与 γ 是由式(2)与(11)决定的已知量. 由波函数的归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x = 1$ 确定常数 $A = \sqrt{\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}}$. 粒子处于 $x>0$ 区中的概率为

$$|A|^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\gamma x}\mathrm{d}x = \frac{\beta}{\beta+\gamma} < \frac{1}{2} \tag{13}$$

这是因为 $\beta>0, \gamma>0, \beta<\gamma$.

1.6 一个质量为 μ 的粒子在一维势场

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x<0, x>a \\ \alpha\delta(x-(a/2)), & 0<x<a \end{cases}$$

中运动，其中 α 与 a 是正的常数. 求第一激发态能量，并讨论 $\alpha \to 0$ 时的定态能量.

解 在求解含有 $\delta(x-(a/2))$ 函数势的方程时，要去掉势能发散点 $x=a/2$. 在去掉 $x=a/2$ 点后，$0<x<a$ 区的定态方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\psi(x) \tag{1}$$

在 $x<0, x>a$ 区 $\psi(x)=0$. 上述方程同一维无限深方势阱中的定态方程是一样的，$\psi(x)$ 在 $x=0$, $a/2$, a 的连续条件

$$\psi(0)=0,\ \psi((a/2)^+) = \psi((a/2)^-),\ \psi(a)=0 \tag{2}$$

也是一样的. 不同的是，不含 $\delta(x-(a/2))$ 势的 ψ' 在 $x=a/2$ 是连续的，而含 $\delta(x-(a/2))$ 势的 ψ' 在 $x=a/2$ 是不连续的：

$$\psi'((a/2)^+) - \psi'((a/2)^-) = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}\psi(a/2) \tag{3}$$

除非波函数在 $x=a/2$ 的值 $\psi(a/2)=0$. 假若一维无限深方势阱中的定态波函数

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},\ 0<x<a,\ n=1,2,\cdots$$

满足条件 $\psi_n(x=a/2)=0$，则式(3)成立，$\psi_n(x)$ 也是含有 $\delta(x-(a/2))$ 势的解. 我们来检验 $\psi_n(x)$ 是否满足条件 $\psi_n(x=a/2)=0$. 显然 $n=2,4,\cdots$ 的 $\psi_n(x)$ 满足这个条件. 它们是本题的一部分解：