高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

上册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

上　　册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华　编

高等教育出版社

本书选择同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》(1965 年修订本) 中一千三百多道题目来解答的，侧重于具有典型性的题和较难的题，还补充了近百道题目及其解答。对初学者来说，我们觉得首先应该自己独立思考，寻求合适的解题方法，得出答案；遇有困难时，再求助于题解。这样有助于独立思想能力的培养和解题技能技巧的掌握。

本书分上、下册出版，上册选解的内容包括解析几何学、函数、极限、一元函数的微分学和不定积分。

本书系供电视、业余、函授等高等院校师生和自学者使用，也可供科技人员参考。

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

上　册

桂子鹏　骆承钦　邱伯驺　张依华　编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 11 6/16　字数 274,000

1980 年 4 月第 1 版　1985 年 3 月第 10 次印刷

印数 935,001—1,035,000

书号 13010·0461　　定价 1.65 元

前　言

在学习高等数学时，做习题是必不可少的．鉴于有许多读者选用同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》(1965 年修订本)，我们选编了这本《习题选解》，供读者参考．

我们在选题时侧重于选具有典型性的题和较难的题，共选解了一千三百余题，另外，又补充近百道题目．有些题目我们做了详细解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时则写得比较扼要．

为了配合《高等数学习题集》，本书中题目的编号完全与它一致．补充的题目按内容分别列在各章之末．

《习题选解》是由桂子鹏负责，与骆承钦、邱伯驺和张依华一起编写的．王福楹、徐礼存、谈祝多三位老师审阅了全部稿子，并提出了宝贵的修改意见．在此，谨向三位老师表示衷心感谢．

由于编者的学识水平不高，教学经验也不足，对于《习题选解》中的错误和不妥之处，希望读者多多提出批评意见．

编　者

1980．2 于同济大学

目　　录

第二编　数 学 分 析

第一编　解 析 几 何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.9. 证明点 $A_1(a, b)$ 关于第 I 和第 III 象限角的平分线的对称点 A_2 必有坐标 (b, a)。

证法一　用线段连结点 (a, b) 和点 (b, a)，中点的坐标 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 在直线 $y=x$ 上，其斜率为 $\frac{a-b}{b-a}=-1$，故垂直于 $y=x$，所以点 (a, b) 和点 (b, a) 对称于直线 $y=x$。

证法二　欲证点 (a, b) 与点 (b, a) 对称于 $y=x$，只需证将点 (a, b)、(b, a) 分别绕 O 点旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后所得到的点对称于 y 轴即可(因旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后，直线 $y=x$ 成为 y 轴)．点 (a, b)、(b, a) 绕 O 点旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后，其坐标分别为

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b),\quad y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

及

$$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a),\quad y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(b+a).$$

由 $x_1=-x_2$, $y_1=y_2$ 知，点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 对称于 y 轴，故得证.

1.12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为 $(12, -7)$ 和 $(0, 15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么?

解　设两坐标系为 xOy 与 $x'O'y'$，某点的坐标相应地为 (x, y)

$=(12, -7)$, $(x', y')=(0, 15)$, O' 在 xOy 系下的坐标为 (a, b), O 在 $x'O'y'$ 系下的坐标为 (a', b'), 则

$$\begin{cases} x=x'+a, \\ y=y'+b, \end{cases} \quad \begin{cases} a=x-x'=12-0=12, \\ b=y-y'=-7-15=-22. \end{cases}$$

显然 $\qquad a'=-a=-12, \quad b'=-b=22.$

1.13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转 $60°$, 点 $M(1, \sqrt{3})$ 在新坐标系下的坐标等于什么?

解 设点 M 在新、旧坐标系下的坐标分别为 (x', y')、(x, y), 则

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases}$$

现在 $x=1$, $y=\sqrt{3}$, $\alpha=60°$, 故

$$\begin{cases} x'=1\cdot\cos 60°+\sqrt{3}\cdot\sin 60°=2, \\ y'=-1\cdot\sin 60°+\sqrt{3}\cdot\cos 60°=0. \end{cases}$$

即 M 的新坐标为 $(2, 0)$.

1.15. 坐标轴应该旋转多少角度, 方能使点 $M(2, 0)$ 在新系下的横标和纵标变成相等? (我们把角度限制在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间.)

解 设点 $M(2, 0)$ 在新系下的坐标为 (a, a), 则

$$\begin{cases} a=2\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=2\cos\alpha, \\ a=-2\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha=-2\sin\alpha. \end{cases}$$

所以 $\qquad \operatorname{tg}\alpha=-1, \quad \alpha=-\frac{\pi}{4}.$

即坐标轴应依顺时针方向旋转 $45°$.

两点间的距离, 线段的定比分点

1.20. 证明点 $(7, 2)$ 和点 $(1, -6)$ 在以点 $(4, -2)$ 为圆心的圆周上, 并求这个圆的半径.

证 因为点 $(7, 2)$ 到点 $(4, -2)$ 的距离为

$$d_1=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

点(1, −6)到点(4, −2)的距离为

$$d_2=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

故$d_1=d_2$，因此点(7, 2)和点(1, −6)在以点(4, −2)为圆心、半径$R=5$的圆周上.

1.24. 已知点M到两坐标轴和点(3, 6)都有相等的距离，求点M的坐标.

解　设点M的坐标为(x, y)，则按题意有

$$|x|=|y|=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}.$$

若$x=y$，则$x^2=(x-3)^2+(x-6)^2$，即$x^2-18x+45=0$，得$x_1=3$，$x_2=15$，从而$y_1=3$，$y_2=15$.

若$x=-y$，则$x^2=(x-3)^2+(x+6)^2$，即$x^2+6x+45=0$，无解. 故点M为(3, 3)或(15, 15).

1.26. 试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

证　设三角形的三顶点为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则$\overline{AB}$之中点D为$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，$\overline{AC}$之中点$E$为$\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，所以

$$|DE|=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}=\frac{1}{2}|BC|.$$

1.27. 设点$M_1(1, 1)$，$M_2(2, 2)$，$M_3(3, -1)$是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点.

解　设平行四边形的四个顶点依次为(x_A, y_A)，(x_B, y_B)，(x_C, y_C)及(x_D, y_D)，由于平行四边形的对角线互相平分，故它们满

足:

$$x_A+x_C=x_B+x_D,\quad y_A+y_C=y_B+y_D.$$

若设第四个顶点为 $M_4(x, y)$,则按 M_1, M_2, M_3, M_4 的各种可能次序,可得

1° $1+3=2+x$, $1+(-1)=2+y$, 从而 $x=2$, $y=-2$;

2° $1+2=3+x$, $1+2=-1+y$, 从而 $x=0$, $y=4$;

3° $2+3=1+x$, $2+(-1)=1+y$, 从而 $x=4$, $y=0$.

因此本题有三解: $(2, -2)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$.

1.28. 设正方形相邻两顶点是 $A(2, 3)$ 和 $B(6, 6)$,求其余的顶点.

解 设第三个顶点为 $C(x_C, y_C)$.

因为 $$|AC|^2=2|AB|^2,$$

即 $$(x_C-2)^2+(y_C-3)^2=2(4^2+3^2)=50,$$

$$|AB|^2=|BC|^2,\quad 即\quad (x_C-6)^2+(y_C-6)^2=25.$$

解得 $$x_C=3,\ 9,\quad y_C=10,\ 2.$$

于是得 $C_1(3, 10)$ 或 $C_2(9, 2)$.

设第四个顶点为 $D(x_D, y_D)$.

由 $$\begin{cases} x_D+x_B=x_A+x_C, \\ y_D+y_B=y_A+y_C, \end{cases}\quad 即\quad \begin{cases} x_D=x_A-x_B+x_C, \\ y_D=y_A-y_B+y_C, \end{cases}$$

得 $D_1(-1, 7)$ 或 $D_2(5, -1)$.

因此正方形的其余两个顶点为 $(3, 10)$, $(-1, 7)$ 或 $(9, 2)$, $(5, -1)$.

1.33. 已知两点 $A(2, 1)$, $B(3, 9)$. 求(a)分线段 $\overline{AB}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标; (b)分线段 $\overline{BA}$ 得比值 4:1 的点 M 的坐标.

解 (a) $x=\dfrac{2+4\cdot 3}{1+4}=\dfrac{14}{5}$, $y=\dfrac{1+4\cdot 9}{1+4}=\dfrac{37}{5}$,

即 M 为 $\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{37}{5}\right)$.

(b) $x=\dfrac{3+4\cdot 2}{1+4}=\dfrac{11}{5}$, $y=\dfrac{9+4\cdot 1}{1+4}=\dfrac{13}{5}$,

即 M 为 $\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$.

1.36. 线段 $\overline{AB}$ 被点 $M_1(1, 2)$ 和 $M_2(3, 4)$ 分成相等的三部分. 求点 A 和 B 的坐标.

解 设 A 的坐标为 (x_1, y_1), B 的坐标为 (x_2, y_2). 按题意,

$$\lambda_1=\frac{M_1A}{AM_2}=-\frac{1}{2}, \quad \lambda_2=\frac{M_1B}{BM_2}=-2.$$

所以 $$x_1=\frac{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 3}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-1, \quad y_1=\frac{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 4}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=0.$$

$$x_2=\frac{1+(-2)\cdot 3}{1+(-2)}=5, \quad y_2=\frac{2+(-2)\cdot 4}{1+(-2)}=6.$$

故 A 的坐标为 $(-1, 0)$, B 的坐标为 $(5, 6)$.

1.40. 已知三角形的顶点: $A(1, 4)$, $B(-5, 0)$ 及 $C(-2, -1)$. 求它的中线的交点.

解 设三角形三顶点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $\overline{BC}$ 之中点为 $M\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$, 又设中线的交点为 $H(x, y)$, 则 $\lambda=\dfrac{AH}{HM}=2$, 故

$$x=\frac{x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

将本题中 A、B、C 三点的坐标代入上式，即得中线的交点为$(-2, 1)$。

1.41. 已知平行四边形的相邻两顶点为 $A\left(-4\frac{1}{2}, -7\right)$ 和 $B(2, 6)$ 及对角线的交点 $M\left(3, 1\frac{1}{2}\right)$. 求它的其余两个顶点.

解 设其余两个顶点为 $C(x_1, y_1)$，$D(x_2, y_2)$. 因 M 是 $\overline{AC}$ 的中点，故

$$x_1=2\cdot3-\left(-\frac{9}{2}\right)=10\frac{1}{2},\quad y_1=2\cdot\frac{3}{2}-(-7)=10;$$

同样 M 是 $\overline{BD}$ 的中点，故

$$x_2=2\cdot3-2=4,\quad y_2=2\cdot\frac{3}{2}-6=-3.$$

即另两顶点为 $\left(10\frac{1}{2}, 10\right)$、$(4, -3)$。

1.42. 点 $A(1, 1)$ 到点 B 的长为 5 单位，线段 $\overline{AB}$ 中点的横标为 3 单位，求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为(x, y)，则按题意有

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=5^2,\\ \dfrac{x+1}{2}=3.\end{cases}$$

解得 $x=5$, $y=4$, -2. 因此点 B 的坐标为$(5, 4)$或$(5, -2)$.

1.43. 已知三角形各边的中点为 $P(3, -2)$，$Q(1, 6)$ 和 $R(-4, 2)$. 求三角形的顶点.

解 设三角形的顶点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则按题意有

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=-2,$$

$$\frac{x_2+x_3}{2}=1,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=6,$$

$$\frac{x_1+x_3}{2}=-4, \quad \frac{y_1+y_3}{2}=2.$$

解得　$x_1=-2,\ x_2=8,\ x_3=-6,\ y_1=-6,\ y_2=2,\ y_3=10.$

因此，三角形的顶点为$(-2,\ -6)$，$(8,\ 2)$，$(-6,\ 10)$.

曲线及其方程

1.47. 一动点，它到 y 轴的距离等于它到点 $C(2,\ 0)$ 的距离. 建立它的轨迹方程.

解　设动点的坐标为 $M(x,\ y)$，则按题意有

$$|x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}, \quad 即 \quad x^2=x^2-4x+y^2+4,$$

故

$$y^2=4(x-1).$$

1.50. 在两坐标轴间有定长线段 AB，在 AB 上有某一点 P，当点 A 永远在横轴上，同时点 B 永远在纵轴上移动时，试求点 P 的轨迹.

解　设点 P 的坐标为$(x,\ y)$，A 的坐标为$(x',\ 0)$，B 的坐标为 $(0,\ y')$ 且 $|AB|=l$，$\lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$，则按题意有

$$x'^2+y'^2=l^2, \tag{1}$$

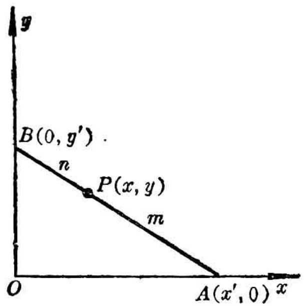
$$x=\frac{x'}{1+\frac{m}{n}}, \quad 即 \quad x'=\frac{m+n}{n}x, \tag{2}$$

$$y=\frac{\frac{m}{n}y'}{1+\frac{m}{n}}, \quad 即 \quad y'=\frac{m+n}{m}y, \tag{3}$$

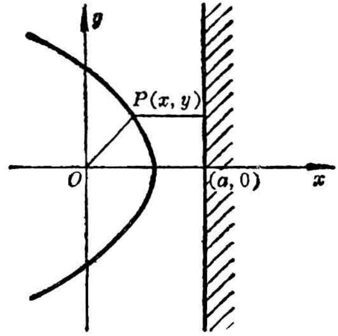
将(2)、(3)代入(1)，得

$$\frac{(m+n)^2}{n^2}x^2+\frac{(m+n)^2}{m^2}y^2=l^2.$$

不妨设 $m+n=l$，从而得



1.50 图



1.52 图

$$\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{m^2}=1.$$

1.52. 一渔轮在进行拖网时，测得它到一小岛的距离与到一直线海岸的距离之比保持为一定数 e. 试建立渔轮航行的轨迹方程(圆锥曲线).

解 设以小岛为原点，y 轴平行于海岸，且小岛在海岸左方，a 为小岛到海岸距离. 又渔轮的位置为 $P(x,y)$. 则按题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|a-x|}=e,$$

即
$$x^2+y^2=e^2(x^2-2ax+a^2),$$

故
$$x^2(1-e^2)+y^2+2ae^2x-a^2e^2=0.$$

1.53. 一枢轴 RQ 绕定点 P 旋转，并推动直角三角形 ACB 使沿直线 KL 滑动，求枢轴 RQ 与斜边 AB 的延长线的交点 M 的轨迹方程.

解 设 RQ 的方程为

$$Y=kX+d, \tag{1}$$

故 C 的坐标为 $\left(-\frac{d}{k},\ 0\right)$, B 的坐标为 $\left(a-\frac{d}{k},\ 0\right)$, A 的坐标为 $\left(-\frac{d}{k},\ b\right)$, 从而 AB 的方程为

$$Y=-\frac{b}{a}\left(X+\frac{d}{k}\right)+b. \tag{2}$$

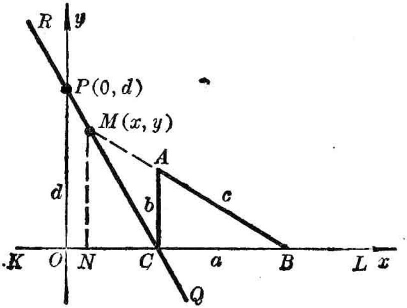
解联立方程 (1)、(2)，即得交点 M 的坐标为

$$x=\frac{ab}{ak+b}-\frac{d}{k},$$

$$y=\frac{abk}{ak+b},$$

这是以 k 为参数的曲线方程；或者消去参数 k，得

$$y=-\frac{b}{a}\left(x+\frac{xd}{y-d}\right)+b,$$



1.53 图

化简即得交点 M 的直角坐标方程：

$$ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0.$$

1.56. 求曲线 $4x^2+y^2=32$ 和 $y^2=8x$ 的交点.

解 交点坐标由下面方程组的解来决定：

$$\begin{cases}4x^2+y^2=32, & (1)\\ y^2=8x. & (2)\end{cases}$$

把(2)代入(1)，得

$$4x^2+8x-32=0, \quad 即 \quad x^2+2x-8=0,$$

解得 $x_1=-4$, $x_2=2$.

$x_1=-4$ 代入(2)，y 无解.

$x_2=2$ 代入(2)，得 $y_1=-4$, $y_2=4$. 故交点为(2, −4)及(2, 4).

1.58. 下列各曲线方程，如平移坐标轴至其后所示的新原点，应变为何种形式？

(a) $3x-4y=6$, (2, 0)；

(b) $5x-y+2=0$, (3, −2)；

(c) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2, 1)$;

(d) $y^2-4x+8=0$, $(2, 0)$;

(e) $y^2=x^3$, $(-2, -3)$.

解 (a) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'$, 则

$$3(x'+2)-4y'=6, \quad \text{即} \quad y'=\frac{3}{4}x'.$$

(b) 作平移 $x=x'+3$, $y=y'-2$, 则

$$5(x'+3)-(y'-2)+2=0, \quad \text{即} \quad 5x'-y'+19=0.$$

(c) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'+1$, 则

$$(x'+2)^2+(y'+1)^2-4(x'+2)-2(y'+1)=0,$$

即

$$x'^2+y'^2=5.$$

(d) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'$, 则

$$y'^2-4(x'+2)+8=0, \quad \text{即} \quad y'^2-4x'=0.$$

(e) 作平移 $x=x'-2$, $y=y'-3$, 则

$$(y'-3)^2=(x'-2)^3,$$

即

$$y'^2-6y'-x'^3+6x'^2-12x'+17=0.$$

1.59. 下列各曲线方程，如依其后所注角度将坐标轴依逆时针方向旋转，应变为如何？

(a) $x+y=0$, $\frac{\pi}{4}$;　　(b) $x+2y=1$, $\frac{\pi}{3}$;

(c) $x^2+4xy+y^2=16$, $\frac{\pi}{4}$.

解 (a) 作旋转 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, 则

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')+\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=0, \quad \text{即} \quad x'=0.$$

(b) 作旋转 $x=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')$, 则