· 高等师范专科学校教育学院协编教材



主编 王坚定 主审 赵宏量 副主编 王叙贵

# 解析几何与线性代数

（物理专业用）

JIAO CAI

SH

西南师範大學出版社

高等师范专科学校教育学院协编教材

# 解析几何与线性代数

（物理专业用）


主　编　王坚定

主　审　赵宏量

副主编　王叙贵

编　委　张成仪　谭东北　陈金康　王家炳

刘怀宣　汪济国　熊德康



西南师范大学出版社

1990年

高等师范专科学校教育学院协编教材
解析几何与线性代数
主编　王坚定　主审　赵宏量

西 南 师 范 大 学 出 版 社 出 版
（重庆　北碚）
新 华 书 店 重 庆 发 行 所 经 销
达 县 新 华 印 刷 厂 印 刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：7.5　字数：162 千
1990年6月第一版　1990年6月第一次印刷
印数：1—3400

ISBN 7-5621-0272-4/O·22

定价：1.55元

# 前　言

本书是国家教委委托西南师范大学出版社组织编写的师专、教院物理专业解析几何与线性代数教材。内容根据国家教委1988年新编两年制师专物理专业《解析几何与线性代数教学大纲》编写，并兼顾三年制师专要求。

全书共六章，包括矢量代数初步、平面与空间直线、几种常见的二次曲面、行列式与矩阵、$n$维矢量与线性方程组、二次型与对称方阵。除有*号部分外，可按国家教委1988年公布的教学计划48学时讲完。有*号部分，各校根据具体情况和要求取舍。

在材料的组织和例题、习题的配备上，考虑到师专、教院物理专业教学需要和学生特点，各章节尽量由具体例子引入，由具体而抽象。既注意数学本身的科学性和逻辑性，又着重注意培养学生的计算能力和解决问题的能力，并注意加强与物理问题的联系。各节后有练习题，供学生课内外练习用。各章后有小结，并附有习题，供学生复习巩固之用。书末附有习题答案，供参考。

本书初稿由贵阳师专张成仪编写一、二、三章，昆明师专王叙贵编写四、五、六章。初稿写出后经副主编王叙贵修改，并经编写组认真讨论，然后由主编黔南师专王坚定改写一章及四章部分，并对其它章节修改后定稿。参加编写工作的还有六盘水师专谭东北、重庆师专陈金康、曲靖师专王家

炳、成都师专熊德康、黔南师专刘怀宣、西昌师专汪济国。

本书由西南师范大学教授、西南师大出版社总编赵宏量主审，赵先生认真审阅了全稿，给予许多具体的指导和教诲，使本书增色不少。先后参加审稿的同志有：昆明师专陈仁远、大理师专沈友祥、贵阳师专陈光燊、遵义师专周鼎芳、安顺师专陈大忠、黔南教院袁希柳、铜仁教院翁维云、毕节师专刘琰、西昌师专但冰如、张文忠、成都师专叶占银、内江师专曾庆善、万县师专王善勤。在此，特向各位先生和同志们表示衷心的感谢！

在编写过程中，一直得到云、贵、川三省教委的热忱关怀，得到三省有关师专、教院领导及老师们的积极支持，得到西南师范大学出版社领导的认真指导和帮助。在本书出版之际，一并致以深切的谢意。

由于编者水平有限，编写时间仓促，谬误之处在所难免，除编者在教学实践中逐步修改补充外，恳请读者随时给予批评指教。希望本书在广大读者的关怀下，日臻完善，使之成为适宜师专、教院教学、符合物理专业需要的教材。

编　者

1989年4月

# 目　录


第一章　矢量代数初步……（1）

§1·1　空间直角坐标系……（1）

1　空间直角坐标系　2　空间点的坐标

练习1·1……（4）

§1·2　矢量的概念及矢量的线性运算……（4）

1　矢量的概念　2　矢量的线性运算

练习1·2……（9）

§1·3　矢量的乘法运算……（9）

1　矢量的坐标　2　矢量模的坐标表达式和方向余弦

3　两矢量的数量积　4　两矢量的矢量积

*5　矢量的混合积　*6　二重矢积

练习1·3……（24）

小结……（25）

习题一……（27）

第二章　平面与空间直线……（28）

§2·1　平面的方程……（28）

1　平面的点法式方程　2　平面的一般式方程

3　平面的截距式方程

4　点到平面的距离　5　两平面的夹角

练习2·1……（39）

§2·2　空间直线……（39）

1　直线的参数方程和标准方程　2　直线的两点式方程

3　直线的一般方程　　4　两直线的夹角
练习2·2 …………………………………………（49）
小结 …………………………………………（50）
习题二 …………………………………………（53）
第三章　几种常见的二次曲面 …………………………（55）
§3·1　几种常见的二次曲面 ……………………（55）
1　曲面和空间曲线的一般方程　　2　常见的二次曲面
练习3·1 …………………………………………（62）
§3·2　空间曲线的参数方程及其在坐标面上的投影 ………（62）
1　空间曲线的参数方程　　*2　空间曲线在坐标面上的投影
练习3·2 …………………………………………（68）
§3·3　二次曲面的作图 ……………………………（68）
1　关于在坐标面上对称轴为坐标轴的二次曲线的作图
2　关于在平行于坐标面的平面上且对称轴平行于坐标轴的二次曲线的作图　　3　二次曲面的作图
4　空间区域简图
小结 …………………………………………（76）
习题三 …………………………………………（77）
第四章　行列式和矩阵 …………………………………（79）
§4·1　$n$阶行列式 ……………………………………（79）
1　$n$阶行列式的定义　　2　行列式的性质　　3　行列式的计算
练习4·1 …………………………………………（93）
§4·2　克莱姆（Gramer）法则 ……………………（95）
练习4·2 …………………………………………（99）
§4·3　矩阵及其代数运算 …………………………（100）
1　矩阵的概念　　2　矩阵的线性运算　　3　矩阵的乘法

练习4·3 ……………………………………………………(109)
§4·4 逆矩阵……………………………………………………(110)
1 逆矩阵的定义和性质 2 方阵可逆的条件
练习4·4 ……………………………………………………(114)
§4·5 矩阵的秩及矩阵的初等变换 ……………………………(115)
1 矩阵的秩 2 矩阵的初等变换 3 初等矩阵
及其性质 4 用初等变换求矩阵的逆
练习4·5 ……………………………………………………(126)
*§4·6 矩阵在物理学中的应用举例……………………………(127)
小结 ……………………………………………………(132)
习题四 ……………………………………………………(133)
第五章 $n$维矢量和线性方程组……………………………(135)
§5·1 $n$维矢量 ……………………………………………(135)
1 $n$维矢量及其线性运算 2 线性组合和线性相关
的概念 3 矢量组的秩
练习5·1 ……………………………………………………(144)
§5·2 线性方程组的基本问题 …………………………………(145)
练习5·2 ……………………………………………………(148)
5·3 齐次线性方程组解的结构 ………………………………(148)
1 基础解系 2 解的结构定理
练习5·3 ……………………………………………………(156)
§5·4 非齐次线性方程组 ………………………………………(157)
1 解的存在定理 2 解的结构定理 3 非齐次
线性方程组的解法
练习5·4 ……………………………………………………(171)
*§5·5 线性空间简介…………………………………………(172)
1 $n$维矢量空间的概念 2 线性空间
小结 ……………………………………………………(175)
习题五 ……………………………………………………(176)

第六章 二次型与对称方阵……………………………………（179）
§6·1 二次型和它的标准型……………………………………（179）
1 二次型与对称矩阵的关系 2 用配方法求标准型
*3 矩阵的合同及其性质 *4 把一个二次型化为规范型的合同变换法
练习6·1……………………………………………………（190）
§6·2 矩阵的特征值和特征矢量……………………………（191）
练习6·2……………………………………………………（196）
§6·3 对称矩阵与正交矩阵的性质…………………………（197）
1 矢量的内积 2 实对称矩阵的性质 3 正交矩阵和正交变换的性质
练习6·3……………………………………………………（204）
§6·4 用正交变换化二次型为标准形………………………（204）
练习6·4……………………………………………………（215）
小结…………………………………………………………（216）
习题六………………………………………………………（217）
练习及习题答案……………………………………………（218）

# 第一章　矢量代数初步

空间解析几何，就是用代数方法来研究空间几何图形性质的一门课程。与平面解析几何一样，空间坐标系是研究空间解析几何的基础。所以，本章首先建立最常用的空间直角坐标系，然后介绍有着广泛应用的矢量代数的初步知识。

## §1·1　空间直角坐标系

### 1　空间直角坐标系

在空间选定一点$O$，过点$O$作三条两两互相垂直的数轴$Ox$、$Oy$、$Oz$，它们都以$O$为原点，且具有相同的长度单位。这三条轴分别称为$x$轴（或横轴）、$y$轴（或纵轴）、$z$轴（或竖轴），统称**坐标轴**。这就建立了一个空间**直角坐标系**，记为$O—xyz$。点$O$称为坐标系的**原点**（如图1—1）。

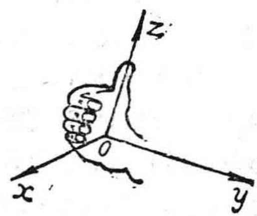


图1-1

空间直角坐标系分为右手系和左手系，我们通常采用右手系。即当$x$轴正向按右手握拳方向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向$y$轴正向时，拇指的指向就是$z$轴的正向（图1—1）。

由每两条坐标轴所确定的三个平面，统称为**坐标平面**，

简称**坐标面**。根据确定坐标面的坐标轴，又将三个坐标面分别称为$xOy$**坐标面**、$zOy$**坐标面**和$zOx$**坐标面**。三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**。例如$x \geqslant 0$、$y \geqslant 0$、$z \geqslant 0$的部分称为**第一卦限**。

## 2　空间点的坐标

在取定的空间直角坐标系中，可以建立起空间的点与有序实数组（$x$，$y$，$z$）之间的一一对应关系。

设$M$为空间一点，过点$M$作三个分别垂直于$x$轴、$y$轴、$z$轴的的平面，它们与三个坐标轴的交点$P$、$Q$、$R$对应的三个实数依次为$x$，$y$，$z$，于是点$M$确定了一个有序实数组($x$，$y$，$z$)。（如图1—2）。反之，如果给定了一

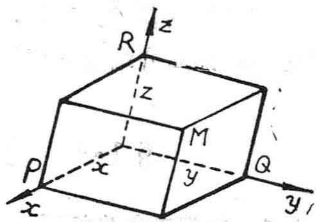

图1-2

有序实数组($x$,$y$,$z$)，我们依次在$x$轴、$y$轴、$z$轴上取与$x$、$y$、$z$相应的点$P$、$Q$、$R$，然后过这三点作三个平面分别垂直于$x$轴、$y$轴、$z$轴，这三个平面交于空间中一点$M$。于是，实数组（$x$，$y$，$z$）确定了空间中的一点$M$。因此，实数组（$x$，$y$，$z$）与空间的点建立了一一对应关系。（$x$，$y$，$z$）就叫点$M$的**直角坐标**。其中$x$，$y$，$z$分别称为点$M$的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，并简记为$M$（$x$，$y$，$z$）。

由空间中点的坐标的意义，我们立即可以得到，原点的坐标为$O$（0，0，0)，$x$轴、$y$轴、$z$轴上的点的坐标分别是($x$，0，0）、（0，$y$，0）、（0，0，$z$）。$xOy$、$yOz$、$zOx$三个坐标面上的点的坐标分别是($x$，$y$，0)、(0，$y$，$z$)、($x$，0，$z$)。

在空间直角坐标系下，各卦限内点的坐标的符号如下表。

| 卦限<br>坐标 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

这样，不在坐标面上的点，只要根据它们坐标的符号，就可以确定它们所在的卦限。例如点$P(-3,-2,1)$在Ⅲ卦限，而点$Q(-1,-1,-1)$在Ⅶ卦限。

要在空间直角坐标系下，描出已知点 可先确定已知点所在的卦限，然后在按一定的步骤进行。例如要在空间直角坐标系下，描出点$A(2,3,2)$的位置。可以确定点$A$在第一卦限，然后在$xOy$坐标面上作出横标为2、纵标为3的点$A'$，再过$A'$向上作$xOy$坐标面的垂线，并截取$A'A=2$，这样就作出了点$A$（如图1—3）。也就是说，要作出点$A(x,y,z)$，确定点$A$的卦限后，作折线$OPAA'$，其中$OP$与$x$轴重合，且$OP=x$；$PA'\parallel Oy$，且$PA'=y$；$A'A\parallel Oz$，且$A'A=z$。折线的终点$A$就是所求的点。

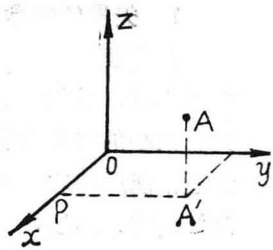

图1-3

## 练 习 1·1

1．先作出一个空间直角坐标系，然后描出下列各点：

$A(2, -1, 3)$，$B(1, 2, 1)$，$C(-1, 3, 2)$，$D(2, -2, -3)$．

2．指出下列各点所在的坐标轴或坐标面：

$A(4, 0, 0)$，$B(0, -7, 0)$，$C(0, -7, 2)$，$D(2, 0, 3)$．

3．求点$M(2, -3, 1)$关于1）各坐标轴；2）各坐标面；3）原点的对称点的坐标．

# §1·2 矢量的概念及矢量的线性运算

### 1 矢量的概念

在物理学的研究中，经常遇到的量有两类，一类完全由数值所决定，例如距离、体积、质量、温度、时间等，这种只具有大小的量称为**数量**（或**标量**）．另一类量，仅用一个数值还不能反映它们的全貌，还必须同时指出它们的方向，如位移、力、速度、力矩等，这种既有大小，又有方向，并遵循一定运算法则的量称为**矢量**（或**向量**）．

矢量可以用有向线段来表示，例如"矢量$AB$"表示为$\overrightarrow{AB}$，其中$A$叫矢量的**始点**，$B$叫矢量的**终点**．为方便起见，也常用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$或粗黑体字$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$等来表示矢量．有向线段的长度表示矢量的大小，矢量的大小称为矢量的**模**．$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$，$\vec{a}$的模记为$|\vec{a}|$，$\mathbf{a}$的模记为$|\mathbf{a}|$．模为1的矢量称为**单位矢量**，若$\vec{a}$或$\mathbf{a}$为单位矢量，则记为$\vec{a}^0$或$\mathbf{a}^0$．模为零的矢

量称为**零矢量**，记为$\vec{0}$或$\mathbf{0}$。因为零矢量的始点与终点重合，所以零矢量的方向是任意的。在空间直角坐标系中，对于任一点$M$，以坐标原点$O$为始点的矢量$\overrightarrow{OM}$，称为$M$点对于原点$O$的**径矢**，记为$M(\vec{r})$或$\mathbf{r}$。

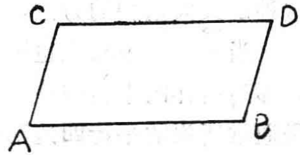


图1-4

模相等且方向相同的矢量称为**相等矢量**。在此意义下，一个矢量和它经过平移以后所得的矢量是相等的。如图1—4中，$ABDC$是平行四边形，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，但$\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{DB}$。如果两个矢量的模相等而方向相反，则称其中一个矢量为另一个矢量的**相反矢量**或**逆矢量**。在图1—4中，$\overrightarrow{CD}$即为$\overrightarrow{BA}$的相反矢量。$\vec{a}$的相反矢量记为$-\vec{a}$，不难看出$-(-\vec{a})=\vec{a}$。

物理学中遇到的矢量分为自由矢量、滑移矢量和固定矢量三种。自由矢量的始点的位置可在空间中任取，在讨论质点动力学时，所遇到的就是这种矢量。滑移矢量的作用点可以沿矢量的作用线任意移动，作用于刚体上的力即为这种矢量，因为力的作用点可位于固定直线上任意一点处。固定矢量的作用点是固定的，例如在讨论流体的运动时，作用于流体某一质点上的力的作用点，就取在该质点所在的位置。由于滑移矢量和固定矢量的研究都可归结为自由矢量的研究，因此，我们仅限于讨论自由矢量。

## 2 矢量的线性运算

矢量的线性运算是指矢量的加法、减法和数与矢量的乘法三种运算。

1） 矢量的加法

给定两个矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，作矢量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，即矢量 $\vec{b}$ 的始点在矢量 $\vec{a}$ 的终点。那么，$\vec{a}$ 的始点到 $\vec{b}$ 的终点的矢量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**和**，记为 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$（如图1—5）。这种定义矢量和的方法，称为**三角形法则**。

当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线也不平行时，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和可用矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边所作的平行四边形的对角线表示（图1—6），这就是通常所说的**平行四边形法则**。显然上述两种定义矢量和的方法是等价的。

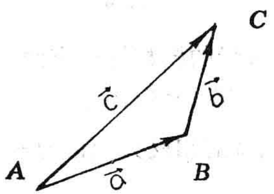

图1—5

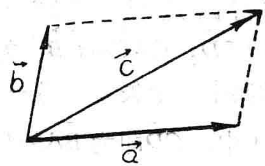

图1—6

三角形法则还可以推广到求任意有限个矢量的和。例如，求矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 的和时，只要依次把后一矢量的始点放在前一矢量的终点上，然后从 $\vec{a}$ 的始点向 $\vec{d}$ 的终点所引的矢量，如图1—7中的 $\overrightarrow{OD}$ 就是 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$。

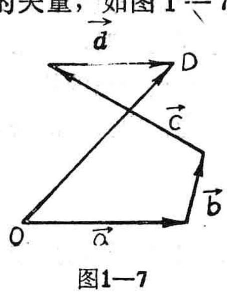

图1—7

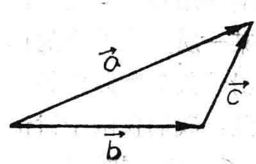

图1—8

根据矢量加法的意义，可以证明矢量加法满足下列运算规律：

i）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

ii）结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；

iii）$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$；

iv）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$。

2） 矢量的减法

如图1—8，若$\vec{b}$加$\vec{c}$等于$\vec{a}$，则称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记为$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$。

$\vec{a}$和$\vec{b}$的加法与减法的区别在于，加法是$\vec{a}$与$\vec{b}$首尾相接，即$\vec{a}+\vec{b}$所得的矢量是从$\vec{a}$的始点到$\vec{b}$的终点；减法是尾尾相接，即$\vec{a}-\vec{b}$所得的矢量是从$\vec{b}$的终点到$\vec{a}$的终点。因此，我们可以说，减去一个矢量，就等对加上它的相反矢量。

**例1** 设平行四边形$ABCD$的对角线交点为$M$，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$和$\vec{b}$将矢量$MA$、$MB$、$MC$和$MD$表示出来（如图1－9）。

**解** 由平面几何知识及相反矢量的意义，知

$$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MD}.$$

而

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b},$$

所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

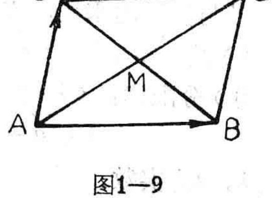

图1—9

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),\qquad \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$$

3） 数与矢量的乘法

由例1我们看到，在实际运算中需要引入数与矢量相乘的概念。实数$\lambda$与矢量$\vec{a}$的乘积记为$\lambda\vec{a}$，它是一个矢量，它的模是

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\,|\vec{a}|,$$

它的方向，当$\lambda>0$时与$\vec{a}$同向，当$\lambda<0$时与$\vec{a}$反向，当$\lambda=0$时方向不定。

特别地，当$\lambda=-1$时，$-1\vec{a}=-\vec{a}$，即为$\vec{a}$的相反矢量。

根据数与矢量乘积的意义，可得如下结论：

i）如果 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$（$\lambda$为实数），则 $\vec{a}$与$\vec{b}$平行；反之，如果$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，则可推出$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。即是说，两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的充要条件为$\vec{a}=\lambda\vec{b}$；

ii）设$\vec{a^0}$是非零矢量$\vec{a}$的同方向单位矢量，由于$|\vec{a}|>0$，所以$|\vec{a}|\vec{a^0}$与$\vec{a^0}$同向，由此，$\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a^0}$，即得

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a^0}.$$

数与矢量的乘法，满足下列运算规律：

i）结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$；

ii）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

其中$\lambda$、$\mu$为实数。