高等专科学校适用教材

高等数学

主编　刘德有

下册

机械工业出版社

高等专科学校适用教材

高 等 数 学

下 册

主 编 刘德有

副主编 吴学友 姚文起 岳德权

编 者 刘德有 吴学友 姚文起

岳德权 张亚明 李泉林

主 审 李俊杰

机械工业出版社

（京）新登字054号

本书是根据《高等专科高等数学基本要求》编写的.

本书分上、下两册出版. 下册内容为矢量代数与空间解析几何简介；多元函数微分学及其应用；多元函数积分法及其应用；无穷级数；微分方程. 各章末附有部分习题答案.

本书内容简捷，说理浅显，通俗易懂，例题类型较多，便于教学.

本书可作为理工类专科学校、经济类专科学校的教材，也可作为有关电大、业大、函大等院校专科师生的学习用书；还可供有关科技人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 下册/刘德有主编.-北京：机械工业出版社，1995

高等专科学校适用教材

ISBN 7-111-04491-6

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第12958号

出 版 人 马九荣（北京市百万庄南街1号 邮政编码100037）

责任编辑：张一萍 版式设计：李松山 责任校对：罗文莉

封面设计：郭景云 责任印制：侯新民

北京怀柔燕文印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1995年3月第1版·1995年3月第1次印刷

787mm×1092mm 1/32·8 3/8 印张·184千字·

0 001—3 000册

定价 8.50元

前　言

本书是根据国家教委工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写而成的。

全书分上、下册出版。下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程，各章配有复习题和习题答案。

本书的特点是：深入浅出，通俗易懂，层次清楚，叙述详细，例题较多，便于教学，可作为三年制理工类专科、经济类专科的高等数学教材，也可作为电大、业大、函大等院校专科师生的学习用书，还可作为工程技术人员或自学者的参考书。

由于作者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免。切望使用本书的同行和学者不吝指教，以便进一步修改和完善。

编者

1994年8月

目　　录

第七章　矢量代数与空间解析几何简介

空间解析几何是通过空间直角坐标系，把空间的点与由三个有序实数组成的数组构成一一对应关系，把空间的曲面和曲线用三元方程来表示，即把几何图形与解析表达式联系起来，从而可用代数方法研究几何问题。

本章分为两部分，首先建立空间直角坐标系，并引进在工程技术上有广泛应用的矢量（这里主要介绍矢量的加法、减法及乘法等运算），然后以矢量为工具来讨论空间的平面和直线，最后讨论一些常见的简单曲面和曲线的方程及图形。

第一节　空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与一对有序的实数组对应起来，从而确定了平面上点的位置。为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间点与数组之间的联系。具体讨论如下。

一、空间点的直角坐标

从空间某一定点o，作三条互相垂直的直线ox、oy、oz，它们都以o为原点且一般有相同的长度单位。这三条直线分别叫x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称为坐标轴；每两个坐标轴所在的平面xoy、yoz、zox叫做坐标平面，见图7-1。

坐标轴的正方向要符合右手法则，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从x轴正方向以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时，大

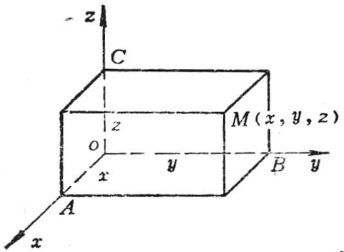

图 7-1

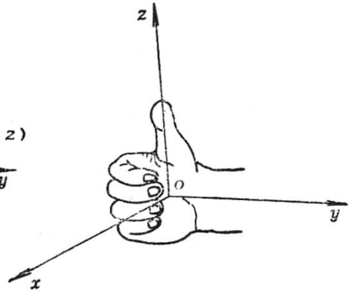

图 7-2

拇指的指向就是z轴的正向，见图7-2。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系。

三个坐标面xoy、yoz、zox把空间分成八个部分，每一部分称为卦限。我们把含有三个坐标轴正向的那个卦限称为第Ⅰ卦限。在xoy平面的上部按逆时针方向旋转，又依次得第Ⅱ、第Ⅲ和第Ⅳ卦限，在xoy平面下部与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的分别为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立空间点与有序数组之间的对应关系。

设M为空间中的一点，过M点作三个平面分别垂直三条坐标轴，它们与ox轴、oy轴、oz轴的交点依次为P、Q、R。设P、Q、R三点在三个坐标轴上的坐标依次为x、y、z，这样空间的点M就唯一地确定了一组有序数组x、y、z，这个数组称为M点的坐标，记为(x, y, z)。x、y、z分别称为横坐标、纵坐标和竖坐标，见图7-3。

二、两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M(x, y, z)$为空间两个已知点，

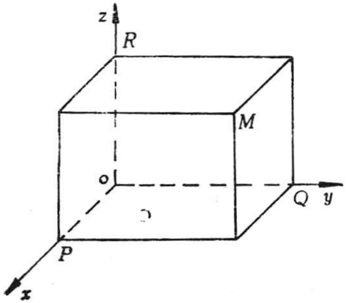

图 7-3

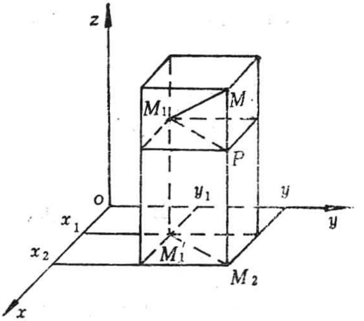

图 7-4

为了用两点的坐标来表达它们之间的距离d，我们过M_1、M各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，形成一个长方体，见图7-4。

其中M_1M为长方体的一个对角线，由勾股定理知

$$d^2=|M_1M|^2=|M_1P|^2+|PM|^2$$
$$=|M_1'M_2|^2+|PM|^2$$

由于
$$|M_1'M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$|PM|^2=(z_2-z_1)^2$$

所以
$$d=|M_1M|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间两点间距离公式。

特殊地，点$M(x, y, z)$与原点$O(0, 0, 0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

习题7-1

1．在空间直角坐标系中描出下列各点：

$A(1, 2, 3)$、$B(-2, 3, 4)$，$C(2, -3, -4)$

$D(3, 4, 0)$、$E(0, 4, 3)$、$F(3, 0, 0)$

2．求下列各对点之间的距离：

（1）(0, 0, 0)、(2, 3, 4)

（2）(0, 0, 0)、(2, −3、−4)

（3）(−2, 3, −4)、(1, 0, 3)

（4）(4, −2, 3)、(−2、1、3)

第二节　矢量及其坐标表示法

一、矢量概念

在工程技术中经常遇到一些物理量，如位移、速度、加速度、力、力矩等，它们不但有大小，而且有方向。这种既有大小又有方向的量叫矢量，也叫向量。

矢量常用黑体字母来表示，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{F}$，或用一个上面加箭头的字母来表示，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{V}$、$\vec{F}$，等等。

在数学上，往往可用一个有方向的线段来表示矢量，见图7-5。有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向。起点为 A、终点为 B 的矢量记为$\overrightarrow{AB}$。

图 7-5

矢量的大小叫矢量的模，如矢量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$的模分别记为$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$。模等于1的矢量叫做单位矢量。模等于零的矢量叫做零矢量，记为$\boldsymbol{O}$ 或$\vec{O}$，其方向是任意的。

两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，如果它们的模相等，且方向相同（两矢量平行且有相同的指向），则称这两个矢量是相等的，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

二、矢量的加减法及数量与矢量的乘法

在物理学中，速度、力等矢量可以按一定规则进行加、减及与数量相乘。仿此，我们对一般矢量也规定加、减及与数量相乘等运算。

（一）矢量的加法

平行四边形法，见图7-6。

矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$有相同的起点，以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，其对角线即为矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之和。

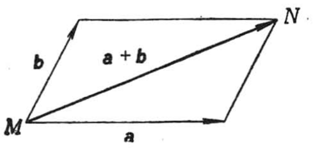

图 7-6

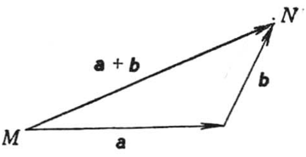

图 7-7

三角形法，见图7-7。

把矢量$\boldsymbol{b}$平移，使它的起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合，连结$\boldsymbol{a}$的起点与$\boldsymbol{b}$的终点得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

（二）矢量的减法

记$\boldsymbol{a}$为一矢量，与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的矢量称为$\boldsymbol{a}$的负矢量，记为$-\boldsymbol{a}$。从而我们可以定义两个矢量的减法

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

特别地
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$$

（三）数量与矢量的乘积

设λ是一个实数，矢量$\boldsymbol{a}$与λ的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$定义为：

当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$表示一个矢量，它的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相同，它的模等于$|\boldsymbol{a}|$的λ倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$$

当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$是零向量，即$\lambda\boldsymbol{a}=0$。

当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$表示一个矢量，它的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反，它的模等于$|\boldsymbol{a}|$的$|\lambda|$倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

矢量的加减法与数量的乘法满足：

交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

由矢量与数量之积的定义知：若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行。反之，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则存在数量$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

例1 设$\boldsymbol{a}^0$为与$\boldsymbol{a}$同方向的单位矢量，验证

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

证 由数量与矢量相乘的定义知：因为$|\boldsymbol{a}|>0$，所以$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}^0$的方向相同，即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；又因$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$的模是$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{a}|\times1=|\boldsymbol{a}|$，即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}$的模也相同。因此，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$。由$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$得：

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

此式说明：一个非零矢量除以它的模是一个单位矢量。

三、矢量的坐标表示法

设在空间直角坐标系中有一矢量$\boldsymbol{a}$。我们把$\boldsymbol{a}$平行移动，使它的起点在坐标原点o，它的终点为$M(x, y, z)$，见图7-8，过点M作三个平面分别垂直于三个坐标轴，由矢量加法定义知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oP}+\overrightarrow{PM}$$

由于 $\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{oB}$

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{oC}$

从而 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{oB}+\overrightarrow{oC}$

其中$\overrightarrow{oA}$、$\overrightarrow{oB}$、$\overrightarrow{oC}$分别叫做矢量$\overrightarrow{oM}$在三个坐标轴上的分量。

设$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别为ox轴、oy轴、oz轴正向的单位矢量，由于点A在ox轴上的坐标为x，所以

$$\overrightarrow{oA}=x\boldsymbol{i}$$

x是$\overrightarrow{OM}$在ox轴上的投影。由三垂线定理知：

$$a_x=x$$

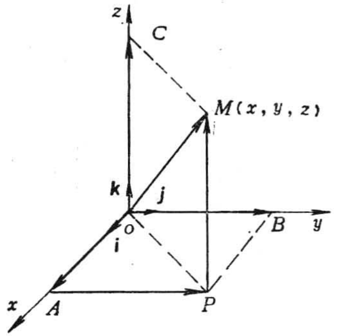

图 7-8

同理可得

$$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{i}$$
$$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$$

所以有　　$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

或　$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 为$\boldsymbol{a}$的坐标表示式。

例2　设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

用坐标表示（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；（3）$-3\boldsymbol{a}$

解　（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})+(-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$=(3-2)\boldsymbol{i}+(-1-2)\boldsymbol{j}+(2+1)\boldsymbol{k}$

$=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-(-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$=[3-(-2)]\boldsymbol{i}+[-1-(-2)]\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k}$

$=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

（3）$-3\boldsymbol{a}=-3(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

$=-9\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$

四、矢量的模与方向余弦

若矢量$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$。

为了表示矢量的方向，把矢量$\boldsymbol{a}$的正方向与ox、oy、oz轴的正方向间的夹角分别记为α、β、γ，称之为矢量$\boldsymbol{a}$的方向角。方向角确定了矢量的方向。此处 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$。并把$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫作矢量$\boldsymbol{a}$的方向余弦。

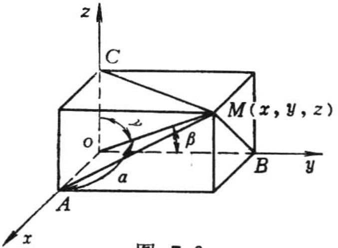

图 7-9

见图7-9。在直角三角形OAM、OBM、OCM中可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

知道了方向余弦，就可求得矢量的方向角了。

例3 已知三个力$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$作用于一质点，求合力$\boldsymbol{F}$的模和方向余弦。

解 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3\\&=(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以
$$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{22}$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{22}},\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{22}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}}$$

五、两个矢量的数量积

设物体在一固定不变的力$\boldsymbol{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，用$\boldsymbol{r}$表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$，故知力$\boldsymbol{F}$所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta,$$

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{r}$的夹角，如图7-10所示。

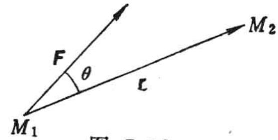

图 7-10

由此，我们看到两个矢量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{r}$确定了一数量$|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$，为此我们引入如下定义：

定义 矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积（点积或内积）记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。且

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant\pi$为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$之夹角。

由数量积的定义可推得

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

这是因为它们的夹角$\theta=0$。

（2）当$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$为0时，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

（3）对于不为零的两个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则有$\cos\theta=0$，从而知：$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即两个矢量互相垂直。

当$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$时，由数量积的性质容易推得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=x_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}$$

所以当两个矢量都不为零时，由$\boldsymbol{a}\cdot b=|\boldsymbol{a}||b|\cos\theta$得

即
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

为两个矢量夹角余弦的坐标表达式。

例4 求矢量$\boldsymbol{a}=\{1,\ 1,\ -4\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,\ -2,\ 1\}$的夹角。

解 因为 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$

$$=\frac{1\times2+1\times(-2)+(-4)\times1}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\times\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

所以，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角为

$$\theta=\arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$$

数量积显然满足交换律、结合律、分配律。

六、两个矢量的矢量积

设O为一根杠杆L的支点，力$\boldsymbol{F}$对支点O的力矩是一个矢量$\boldsymbol{M}$，它的大小等于力的大小$|\boldsymbol{F}|$与力臂$|\overrightarrow{OQ}|$的乘积，即它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP}|\,|\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

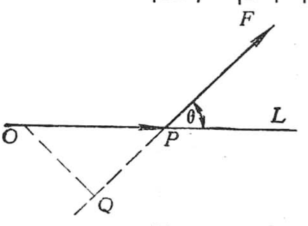

图 7-11

其中θ为$\boldsymbol{F}$与$\overrightarrow{OP}$的夹角，如图7-11所示。

$\boldsymbol{M}$的方向垂直于$\boldsymbol{F}$与$\overrightarrow{OP}$所确定的平面。它的正向按右手规则确定。即当右手的四个手指从$\overrightarrow{OP}$以不超过π的角转向$\boldsymbol{F}$握拳时，大拇指的指向就是$\boldsymbol{M}$的指向，见图7-12。