# 大学数学

李炳照　王宏洲　编著

清华大学出版社

# 大学数学

李炳照　王宏洲　编著

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是一本通俗易懂的大学数学教材，尤其适合文科及设计艺术类学生使用. 内容包括了高等数学、线性代数及概率统计等大学生所需要掌握的基础知识. 在本书的编排过程中，特别注重了学生形象思维的培养，对某些较难理解的概念、原理，尽量用图形、图表的形式给出. 同时，本书也兼顾了文科类、设计艺术类学生中学知识与大学知识的衔接. 本书语言流畅、通俗易懂，内容生动、方法简洁，便于应用.

本书适用于普通高等院校文科类、设计艺术类以及其他相关专业学生，也可供从事大学数学教学及科研的人员参考使用.



**图书在版编目（CIP）数据**

大学数学/李炳照，王宏洲编著. —北京：清华大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-302-26394-4

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①李…　②王…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 158267 号

**责任编辑**：石　磊　赵从棉
**责任校对**：王淑云
**责任印制**：王秀菊

**出版发行**：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
**社　总　机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质　量　反　馈**：010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：北京密云胶印厂
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185×230　**印　张**：21　**彩　插**：1　**字　　数**：458 千字
**版　　次**：2011 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2011 年 8 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～3000
**定　　价**：36.00 元

产品编号：040944-01

# FOREWORD

# 前言

本书是在对大学数学基本知识、教学内容与教学体系进行了长时间研究和实践摸索的基础上，结合任课教师及各方面的实际经验、建议最终编写而成，其初稿在北京理工大学人文社科、外语、设计艺术类专业已使用了三年，效果良好.

随着信息社会的发展，数学在社会各个层面产生了巨大的影响. 对于文科学生而言，数学既是一个重要的工具，又是一种认识客观世界的重要的基本思维方式. 面向文科学生的数学思维教育近年来得到了广大学者的普遍重视和认同，随着数学思想在文科领域的渗透，数学的思想与方法在设计艺术类专业（工业设计、艺术设计等专业）学生中的培养和教育也逐步引起了大家重视. 北京理工大学是国内第一所要求所有设计艺术类学生都必修大学数学课程的高校，然而在我们选择适合他们的教材时，发现现有文科大学数学教材大都面向经济、管理类专业，针对人文社科类、设计艺术类的大学数学教材极为少见.

在我国现行的高等教育体系下，如何编写一本真正适合设计艺术类与文科学生的大学数学教材，是一个长期探索的过程. 本书作者从 2001 年以来，一直从事文科、设计艺术类专业大学数学课程的讲授工作，根据这些年来积累的经验，我们越来越觉得文科大学数学除了介绍基本数学知识外，还应该高度重视数学思想的传播，培养学生用数学方法和思维方式看待现实世界，并让学生了解一些社会科学中十分重要的数学原理，这必将为学生今后的发展奠定坚实的基础. 所以，编著一本符合上述要求的大学数学教材具有重要的意义，这不但能促进高等院校大学数学课程教学体系的改革，对于设计艺术类专业大学数学的课程设计、教学体系的研究也具有重要的价值.

本书的特色和价值主要体现在以下几点：

(1) 重视文科学生的特点，对比较重要的概念给出了较详细的图形描述；

(2) 重视文科学生中学知识与大学数学知识的衔接；

(3) 每章都有详细的知识结构图，便于学生从整体上来理解和学习.

我们曾用两个学期，每个学期 48 学时来讲授本教材，在学时较少时可以将打“*”号的内容略过不讲. 在使用本教材进行教学时，任课教师也可根据学时数和学生的基础，增加或者删减一些内容，使教学活动更加有效.

本书入选北京理工大学“十二五”规划教材．本书前6章由李炳照编写，后7章由王宏洲编写，在本书的撰写过程中，北京理工大学数学实验中心研究生李翠萍、邱伟、朱曼等同学对本书全部内容进行了详细的检查和核对，在此表示感谢．由于学识与水平所限，本讲义的缺点和错误在所难免，敬请专家和读者批评指正．

编　者

2011年3月

CONTENTS

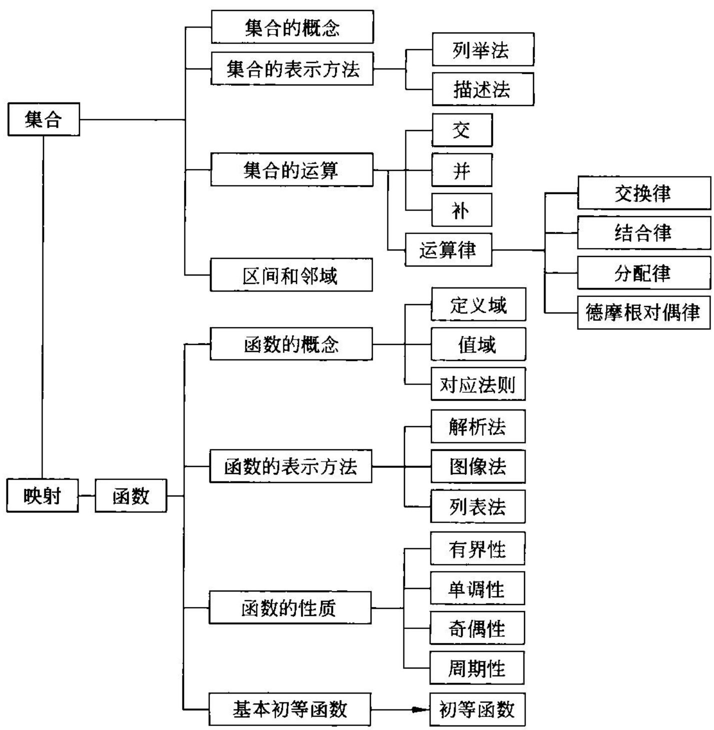
# 目录

# 第 1 章

# 集合与函数

微积分是研究变量的数学.客观世界中有许许多多的变量,它们之间不是独立的,而是相互联系着的.函数就是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种数学抽象,它是现代数学的基本概念之一,是高等数学的主要研究对象.在工程科学、自然科学、经济学、人文科学、管理科学以及其他的一些学科研究中,经常会遇到函数.本章将首先引入集合的概念,然后再着重介绍函数关系.

## 本章知识框图



## 1.1 集合

### 1.1.1 集合的概念

我们把具有某种属性的事物的全体，叫做集合，这些事物则称为集合的元素. 下面是几个集合的例子：

(1) 某工厂生产的所有产品.

(2) 某校某年级的全体学生.

(3) 全体整数.

(4) 方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

习惯上用大写字母 $A,B,C$ 等表示集合，用小写字母 $a,b,c$ 等表示集合里的元素. 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，则记作 $a\in A$，读作"$a$ 属于 $A$"；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，则记为 $a\notin A$，读作"$a$ 不属于 $A$". 实际应用中，我们常用 $\mathbb{Z}$ 表示全体整数组成的集合，$\mathbb{R}$ 表示全体实数所组成的集合，$\mathbb{N}$ 表示全体自然数所组成的集合，$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数所组成的集合，$\mathbb{C}$ 表示全体复数所组成的集合. 不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

当集合 $A$ 中的元素都是集合 $B$ 的元素时，称集合 $A$ 是集合 $B$ 的**子集**，记作 $A\subset B$. 例如 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. 显然，空集 $\varnothing$ 是任何一个集合的子集，任何一个集合是其本身的子集. 例如，集合 $A=\{0,1\}$ 的全部子集可以表示为 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$ 和 $\{0,1\}$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$. 当集合 $A$ 中元素的个数有限时，$A$ 称为有限集合，通常用 $|A|$ 表示 $A$ 中元素的个数；元素个数无限的集合称为无限集合.

### 1.1.2 集合的表示方法

集合通常可用以下两种方法来表示.

**1. 列举法**

将集合中的所有元素，不论顺序一一列举出来，并加上大括号来表示集合的方法称为列举法. 例如，设 $A$ 是小于 6 的非负整数的集合，则集合 $A$ 可表示为

$$A=\{0,1,2,3,4,5\}.$$

设 $B$ 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根所组成的集合，则集合 $B$ 可表示为

$$B=\{2,3\}.$$

**2. 描述法**

将集合中元素所满足的条件写在元素符号的后面，并用竖线隔开，外面再加上大括号，这种表示集合的方法称为描述法. 例如，上述集合 $A$ 可表示为

$$A=\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 5,a\in\mathbb{Z}\}.$$

集合 $B$ 可表示为

$$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}.$$

### 1.1.3　集合的运算及运算律

#### 1. 集合的运算：交、并、补

设 $A,B$ 是两个集合，$U$ 是全集（由所研究的所有事物构成的集合称为全集）. 由所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的交集，记作 $A\cap B$；由所有属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的并集，记作 $A\cup B$，如图 1-1 所示.

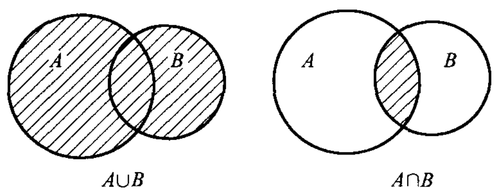



图 1-1　集合的并与交

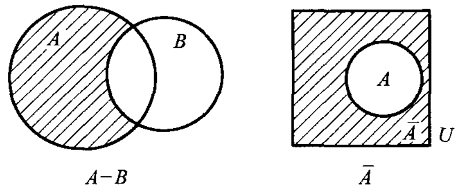



图 1-2　差集与补集

**例 1.1**　设 $A=\{0,1,3\}$，$B=\{0,2,4\}$，$C=\{2,4\}$，则 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{0\}$，$B\cap C=\{2,4\}$，$A\cap C=\varnothing$.

由所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的差集，记作 $A-B$；全集 $U$ 中所有不属于 $A$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 的补集，记作 $\overline{A}$，如图 1-2 所示.

**例 1.2**　设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{1,2,4\}$，则 $A-B=\{3,5,7\}$，$\overline{A}=\{2,4,6\}$，$\overline{B}=\{3,5,6,7\}$.

#### 2. 运算律

(1) 交换律（Ⅰ）$A\cup B=B\cup A$；（Ⅱ）$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律（Ⅰ）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（Ⅱ）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律（Ⅰ）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

（Ⅱ）$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德摩根对偶律（Ⅰ）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；（Ⅱ）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

下面证明结合律的（Ⅰ）和德摩根对偶律的（Ⅰ），其余定律可类似地证明.

**结合律（Ⅰ）的证明**

若 $x\in(A\cup B)\cup C$，则 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$，因而 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cup(B\cup C)$，所以 $(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$；同理可证 $A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$；所以 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

**德摩根对偶律(Ⅰ)的证明**

若 $x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,亦即 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,因此 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,所以 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$;

反之,若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,亦即 $x\notin A\cup B$,因此 $x\in\overline{A\cup B}$,所以 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$.

所以有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

**例 1.3** 利用集合运算律证明:$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$.

**证明** 由分配律(Ⅰ)知,$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B=U\cap B=B$.

### 1.1.4 区间和邻域

人们在生活与工作中,经常会遇到各种不同的量.在某一过程中保持固定数值的量称为**常量**,可以取不同数值的量称为**变量**.例如,圆的周长与直径的比是一个常量,称为圆周率,记作 $\pi$.汽车在某一段时间内行驶过的路程是一个变量,因为它随时间的变化而变化.

在实际问题中,一个变量根据所研究问题的条件,一般有着一定的变换范围,如果超出这个范围,就会使研究的问题失去意义.在数学中常用区间表示一个变量的变化范围,下面介绍一些常用区间的记号.设 $a,b$ 为实数,且 $a<b$.

**1. 开区间**

由满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 $x$ 所组成的集合,称为以 $a,b$ 为端点的开区间,记作 $(a,b)$,即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$,如图 1-3(a)所示.

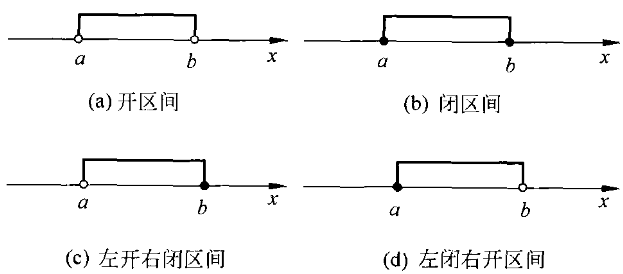



图 1-3 区间示意图

**2. 闭区间**

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 $x$ 所组成的集合,称为以 $a,b$ 为端点的闭区间,记作 $[a,b]$,即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,如图 1-3(b)所示.

**3. 半开半闭区间**

满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 $x$ 所组成的集合,称为以 $a,b$ 为端点的半开