"十二五"应用型本科系列规划教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

侯亚君　总主编
刘立士　马建军　张玉春　主　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

概率论与数理统计

总主编　侯亚君
主　编　刘立士　马建军　张玉春
参　编　王宏栋　丁志强　王　凯

机 械 工 业 出 版 社

本书是概率论与数理统计课程教材，主要特点是包含了 MATLAB 实验和相关数学历史文化知识介绍．全书分为概率论与数理统计两大部分，共 9 章．概率论部分由前 5 章组成，包括概率论的基本概念，一维和二维随机变量及其分布理论，大数定律和中心极限定理．数理统计部分由后 4 章组成，包括统计的基本概念，参数估计，假设检验和回归分析．各章后配有适量习题，书后有部分习题答案与提示．

本书适合应用型本科各专业使用，也可作为科研人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/侯亚君总主编；刘立士，马建军，张玉春主编．—北京：机械工业出版社，2011.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-34579-4

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①侯…②刘…③马…④张…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 144794 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　东

版式设计：霍永明　责任校对：刘怡丹

封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇

三河市宏达印刷有限公司印刷

2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×240mm · 15.25 印张 · 259 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-34579-4

定价：29.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：（010）88361066

销售一部：（010）68326294

销售二部：（010）88379649

读者购书热线：（010）88379203

网络服务

门户网：http：//www.cmpbook.com

教材网：http：//www.cmpedu.com

前　　言

本套数学基础课教学改革丛书包括《线性代数》、《概率论与数理统计》、《微积分（经济类）》三种教材，改革思路一致，体例统一，风格相似。

目前在数学基础课教学采用的教材中，纯粹的数学问题多，应用问题少；抽象、经典的内容多，直观、现代的内容少，造成了教材和教学目标有偏差。

本套教材试图尝试针对专业需求，注重直观和学生亲身实践的思路，强调教材的针对性、实用性和趣味性。内容的安排遵循“量力”和“循序渐进”原则；概念的引入力求朴实、简明和自然，尽可能从简单问题引入；定理的证明尽可能做到严谨，但强调理论证明与直观说明并重，突出数学的思想和方法。数学应用方面，强调与专业知识结合，与计算机手段结合。本套教材的主要特色是：

1. 把数学软件 MATLAB 引入教材。在实践中数学问题的解决往往要借助计算机，为了使学生既能通过计算机编程来亲身体验数学知识，又不至于被繁琐的程序编写羁绊，我们选择了数学编程简单而高效的 MATLAB，作为计算机手段引入课堂教学。为了使学生对 MATLAB 的使用有初步的了解以及加强对相关知识的理解和运用，教材在每章后面都加入了数学实验的内容，要求学生以 MATLAB 为工具完成数学实验。这部分内容可根据学时看是安排在正常课堂教学内，还是另外安排时间或者课后练习。

2. 引入知识纵横，加强数学教材的趣味性。每章后我们加入知识纵横，内容丰富而灵活，既有数学简史，又有相关内容的延伸，还有数学家小传等。这些内容为学生课外阅读提供一种引导，旨在调动学生对数学知识背后的历史和文化的兴趣，促使学生主动阅读其他的相关文献。

本书为《概率论与数理统计》，全书分为概率论与数理统计两大部分，共 9 章. 概率论部分由前 5 章组成，讲授概率论的基础知识，包括概率论的基本概念，一维和二维随机变量及其分布理论，大数定律和中心极限定理. 数理统计部分由后 4 章组成，包括统计的基本概念，参数估计，假设检验和回归分析. 各章后配有适量习题，书后有部分习题答案和提示.

本书第1、2、3章以及书后附表由张玉春组织编写，第4、5、6章以及数学实验部分由马建军组织编写，第7、8、9章以及知识纵横由刘立士组织编写.

由于编者水平有限，加上时间比较仓促，书中难免存在不足之处，希望专家、同行及读者批评指正.

编　者

目　录

第 1 章

概率论的基本概念

概率论与数理统计是一门研究随机现象统计规律的学科，它有着系统、丰富的内容和许多深刻的结论；同时，它作为研究和揭示随机现象规律的主要理论工具，已经在自然科学、国民经济以及社会活动的各个领域都得到了广泛的应用.

第 1 章我们介绍概率论的基本概念，包括随机现象、随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的概率、随机事件的独立性等；概率论的基本理论，包括随机事件之间的关系和运算、概率的性质及其计算公式；同时介绍应用非常广泛的两类概型——古典概型与 n 重伯努利概型.

1.1 随机事件

在这一节我们先从随机现象谈起. 由于人们主要是通过随机试验来认识和考察随机现象的，因而我们通过随机试验得出概率论中的两个重要概念——样本空间和随机事件.

1.1.1 随机现象与频率稳定性

我们先来了解概率论与数理统计这门课程研究的对象——随机现象. 在自然界与人类社会中普遍存在着两类现象：一类为确定现象，即在一定条件下必然发生的现象. 例如，一个电路中若电动势 E 和电阻值 R 是确定不变的，那么根据欧姆定律可知该电路中的电流 I 也是确定不变的. 在大气压强为 101 325Pa 时，纯净水被加热到 100℃ 时必然会沸腾，而温度被降到 0℃ 时又必然会结冰. 手拿一枚硬币，松开手，硬币

往下落．这些都属于**确定现象**．另一类为不确定现象，即在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果．例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么．某种保险产品在投保人数一定的条件下，一年中的索赔人数却不能确定．一堆产品中混有合格品和不合格品，从中随意抽取一件，取到的可能是合格品，也可能是不合格品．这些均属于不确定现象，也称为**随机现象**．

如何研究随机现象呢？随机现象在个别或少量的试验或观测中呈现出不确定性，但是切不可认为随机现象就没有一定的规律了．事实上，如果做了大量的重复试验或观察，我们就会发现一个随机现象中各个结果的出现总是服从一定规律的．以掷一枚硬币为例，历史上多位数学家做过抛掷一枚质地和构造均匀硬币的试验（见表 1-1），发现随着投掷次数的增多，正面朝上的次数 n_1 与投掷次数 n 的比值 n_1/n（称为频率）越来越接近 0.5．随机现象的这一自身固有的规律，即随着试验次数的增多，一个结果的频率越来越接近一个确定的数值，称为**频率稳定性**，这是随机现象的统计规律性．

表 1-1 “抛硬币”试验

实　验　者	试验次数 n	正面朝上的次数 n_1	频　　率
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K．皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K．皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

1.1.2 随机试验与样本空间

随机现象的统计规律性是在大量重复试验中体现出来的，在概率论中我们把具有如下三个特点的试验称为**随机试验**：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不唯一，但其全部可能结果事先是知道的；

(3) 试验前不能确定哪一个结果发生．

我们把随机试验的每一个结果称为**样本点**，样本点组成的集合称为**样本空间**，记为 S．

例 1.1 写出下列随机试验的样本空间 S．

（1）掷一颗骰子，观察出现的点数．样本空间为

$$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

（2）记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼叫次数．样本空间为

$$S_2=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

（3）在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命．样本空间为

$$S_3=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

其中，S_1的样本点为有限个，称为**有限样本空间**；S_2，S_3的样本点为无限个，称为**无限样本空间**，又 S_2的样本点可按一定顺序排列，称为**可列样本空间**.

1.1.3　随机事件的概念、关系与运算

定义 1.1　样本空间 S 的子集称为随机试验的**随机事件**，简称**事件**，记为 A，B，C，…．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集合，称为**基本事件**；样本空间 S 构成的事件，称为**必然事件**；空集$\varnothing$构成的事件，称为**不可能事件**．严格地说，必然事件和不可能事件已经不具有随机性，但我们仍将其称作事件.

在例 1.1 中，随机事件“灯泡的寿命大于 1 000h”，可以表示为 $A=\{t\mid t>1\ 000\}$.

事件是集合，利用集合的关系与运算，可以得到事件的如下关系与运算．设随机试验的样本空间为 S，而 A，B，C，A_1，A_2，…等为随机事件.

（1）事件的包含关系：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B\supset A$.

（2）事件的相等关系：若事件 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

（3）和事件：事件 A 与 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$．n 个事件 A_1，A_2，…，A_n的和事件记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

（4）积事件：事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB．n 个事件 A_1，A_2，…，A_n的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$或

$A_1A_2\cdots A_n$，可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

（5）差事件：事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$.

（6）互斥关系（也称互不相容）：若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是**互斥的或互不相容的**．两个事件互斥指的是事件 A 与 B 不能同时发生．若事件 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥.

（7）逆事件：若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与 B 互为**逆事件**，也称 A 与 B 互为**对立事件**，记 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$.

用集合的文氏图可以直观地表示以上事件之间的关系与运算（见图 1-1）.

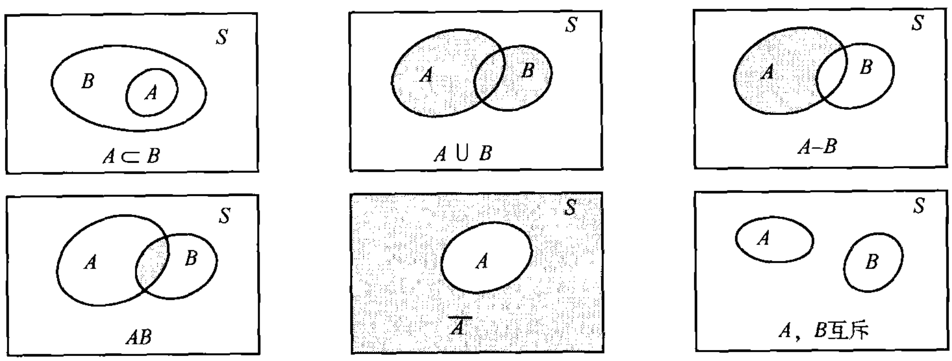

图 1-1　事件的关系与运算

由事件的关系与运算容易得到下面的结论：

（1）$\varnothing\subset A\subset S$，$A\subset A\cup B$，$AB\subset A$，$AB\subset B$，$A-B\subset A$；

（2）若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$，$A-B=\varnothing$，$\overline{A}\supset\overline{B}$；

（3）$A-B=A\overline{B}=A-AB$，$\overline{A}=S-A$；

（4）$A\cup B=A\cup\overline{A}B=B\cup A\overline{B}$，$A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

例 1.2　设 A，B，C 表示三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件.

（1）仅 A 发生．即 A 发生而 B 不发生 C 也不发生，应该是 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

（2）A，B，C 恰有一个发生．即三个事件中必有一个发生，且其他事件都不发生，应该是 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

与集合运算类似，事件的运算具有下面的运算律．对于任意的事件 A，B，C，有

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这里，我们对德摩根律说明如下：因为事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 至少有一个事件发生，它的对立事件显然就是 A 与 B 都不发生，即 $\overline{A}\,\overline{B}$；又因为事件 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示事件 A 与 B 至少有一个事件不发生，它的对立事件就是事件 A 与 B 都发生，即 AB. 这一性质可以推广到更多个事件的情形. 对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

德摩根律表明：若干个事件的和事件的对立事件就是各个事件的对立事件的积事件，若干个事件的积事件的对立事件就是各个事件的对立事件的和事件.

1.2　概率的公理化定义与古典概型

人们对“概率”这一数学术语已经并不陌生，通俗的理解为未来某一事件发生的可能性大小. 例如，天气预报“明天降雨概率是20%”，说明下雨的可能性较小；若“明天降雨概率是 80%”，说明下雨的可能性较大.

上一节介绍过，随机现象具有频率稳定性（统计规律性），即随着随机试验次数的增多，事件 A 发生的频率越来越接近一个常数 p. 正是随机现象的这一固有的规律，说明了随机事件发生的可能性大小是随机现象本身固有的性质，从而使我们对它进行量的刻画成为可能. 历史上就曾以试验次数无限增多时，频率所趋向的某个确定的数值作为概率，称为概率的统计定义. 概率的统计定义提供了一种估计概率的方法，即用试验次数 n 较大时得到的频率作为概率的估计. 随着研究的深入，数学家们在 20 世纪 30 年代提出了关于概率论公理化的设想，给出了概率的公理化定义.

1.2.1　概率的公理化定义

定义 1.2　设 S 是随机试验的样本空间，若对于每一个随机事件 A，有实数 $P(A)$ 与其对应，且 $P(A)$ 满足如下三条公理：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设 A_1，A_2，…，A_n，…是两两互斥事件，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为随机事件 A 的**概率**.

我们知道，任何数学学科公理化体系的建立都来源于客观实际，公理是一种被承认为真的叙述. 概率的公理化定义是受频率基本性质的启发经过早期研究而得来的. 根据概率的公理化定义，虽然不能直接计算随机事件的概率，但是由于概率论公理化体系的建立使概率论有了严谨而坚实的理论基础，因而在概率论的发展史中起着重要作用.

由概率的三条公理，不难证明概率的一系列性质：

性质 1 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_i=\varnothing(i=1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing(i, j=1, 2, \cdots)$，由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

又由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 （有限可加性） 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证 令 $A_i=\varnothing(i=n+1, n+2, \cdots)$，即有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1, 2, \cdots)$，由概率的可列可加性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3 （减法公式） 对于任意两事件 A，B 有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

证 因为 $A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$，且 AB 与 $A\overline{B}$ 互斥，由性质 2 有

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A-B).$$

将上式变形即得减法公式.

特别地，逆事件的概率公式为

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

单调性 若 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$；

任意事件的概率不大于 1，即 $P(A)\leqslant 1$.

性质 4 （加法公式） 对于任意两事件 A，B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 因为$A\cup B=A\cup\overline{A}B$，且$A$与$\overline{A}B$互斥，由性质2及性质3有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质4可以推广到任意n个事件的情况. 对于任意n个事件A_1，A_2，…，A_n有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例1.3 已知$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9$，$P(A)=0.2$，求$P(AB)$，$P(A-B)$.

解 由$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$，得

$$P(AB)=0.1.$$

从而,得 $$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.1.$$

例1.4 某厂有两台机床，机床甲发生故障的概率为0.1，机床乙发生故障的概率为0.2，两台机床同时发生故障的概率为0.05，试求：

(1) 机床甲和机床乙至少有一台发生故障的概率；

(2) 机床甲和机床乙都不发生故障的概率；

(3) 机床甲和机床乙至少有一台不发生故障的概率.

解 令A表示“机床甲发生故障”，B表示“机床乙发生故障”，则

$$P(A)=0.1,\quad P(B)=0.2,\quad P(AB)=0.05.$$

(1) $A\cup B$表示“机床甲和机床乙至少有一台发生故障”，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.25.$$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}$表示“机床甲和机床乙都不发生故障”，故

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.75.$$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$表示“机床甲和机床乙至少有一台不发生故障”，故

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.95.$$

1.2.2 古典概型（等可能概型）

等可能概型是一类最简单直观的随机试验，也是概率论发展初期就开始研究的一类概率问题，因此被称为古典概型. 古典概型简单、应用广泛，通过对它的讨论可以帮助我们理解概率论的基本概念和数量关系.

定义1.3 若随机试验具有以下特点：

(1) 样本空间S中只包含有限个样本点；

(2) 在试验中每个基本事件发生的可能性相同；

则称这类随机试验为**古典概型（等可能概型）**.

下面我们讨论等可能概型中事件概率的计算公式. 设样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，基本事件的概率 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=p$，则由概率的有限可加性，得

$$P(S) = P(\bigcup_{i=1}^{n} e_i) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = np = 1.$$

所以，基本事件的概率 $p=\frac{1}{n}$. 若事件 A 含有 k 个样本点，$A=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$，则

$$P(A) = P(\bigcup_{j=1}^{k} e_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} P(e_{i_j}) = \frac{k}{n}.$$

因此，等可能概型中事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{包含样本点数}}{S\text{中样本点总数}} = \frac{k}{n}. \tag{1-1}$$

式（1-1）就是等可能概型中事件 A 概率的计算公式.

例 1.5（抽样问题） 袋中有 6 只球（除颜色外，其他都相同），其中 4 只白球，2 只红球. 有放回抽样：第一次取出一只球记下颜色放回，再取第二次. 不放回抽样：第一次取出一只球记下颜色不放回，继续取第二次. 试分别就上面两种情况求：

（1）取到的两球都是白球的概率；

（2）取到的两球颜色相同的概率；

（3）取到的两球至少有一只白球的概率.

解 设事件 $A=\{$两白球$\}$，$B=\{$两红球$\}$，则

$A\cup B=\{$两球颜色相同$\}$，$\overline{B}=\{$两球中至少一只白球$\}$.

有放回抽样的情况：样本点总数为 6×6，事件 A 包含的样本点数为 4×4，事件 B 包含的样本点数为 2×2，于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}, \quad P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}.$$

由于 $AB=\varnothing$，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}, \quad P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}.$$

无放回抽样的情况：样本点总数为 6×5，事件 A 包含的样本点数为 4×3，事件 B 包含的样本点数为 2×1，于是

$$P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}, \quad P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}.$$

由于 $AB=\varnothing$，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15}, \quad P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

思考　一次取 2 只球，求上述各事件的概率，试与无放回抽样的概率进行比较．袋中有 n 只白球，m 只红球，$k(k\leqslant n+m)$ 个人依次在袋中取一只球，试分别作有放回抽样和无放回抽样，求第 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 个人取到白球的概率，此概率与 i 是否有关？

例 1.6（超几何概型）　有 N 件同样的产品，其中 M 件次品，任取 n 件，求恰有 $m(m\leqslant\min\{n, M\})$ 件次品的概率．

解　设事件 $A=\{$恰有 m 件次品$\}$，则样本点总数为从 N 件产品中取出 n 件的组合数 C_N^n，事件 A 包含的样本点数为 $\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$，于是

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}.$$

例 1.7　（分球入盒问题）　将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中，试求下列事件的概率．$A=\{$指定的 n 个盒子中各有一球$\}$，$B=\{$每盒至多一个球$\}$．

解　因为每一只球都有 N 个可能，n 只球有 N^n 种可能，样本点总数为 N^n，事件 A 包含的样本点数为 $n!$，事件 B 包含的样本点数为从 N 个盒子中取出 n 个的排列数 A_N^n，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n},\quad P(B)=\frac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}.$$

有很多问题和例 1.7 具有相同的数学模型．例如，某班有 64 个人，他们的生日各不相同的概率为

$$\frac{365\times364\times\cdots\times302}{365^{64}}\approx0.003.$$

这个概率是很小的，那么，64 人的班级里至少有两个人生日相同的概率约为 0.997. 教师在对该班级学生并不了解的情况下敢做出预测：这个班级至少有两个人的生日相同．这是根据实际推断原理：一次试验下，小概率事件几乎是不发生的．

1.3　条件概率

1.3.1　条件概率的概念

在许多实际问题中，除了要求事件 B 发生的概率外，还要求在已知事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率，我们称这种概率为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为 $P(B|A)$．

例如，在掷骰子试验中，样本空间 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，设事