

积分解题指导

刘桂琴 王亚峰 任志良 冯丽 编

吉林科学技术出版社

目 录

第一章 极限与连续	(1)
§ 1 基本初等函数与初等函数	(1)
§ 2 数列的极限	(17)
§ 3 函数的极限	(20)
§ 4 极限的运算	(23)
§ 5 无穷小与无穷大	(28)
§ 6 两个重要的极限	(30)
§ 7 函数的连续性	(31)
第二章 导 数	(41)
§ 1 导数的概念	(44)
§ 2 函数的和、差、积、商的求导法则	(53)
§ 3 复合函数的求导法则	(60)
§ 4 初等函数求导问题	(68)
§ 5 高阶导数	(73)
§ 6 隐函数及其求导	(80)
§ 7 由参数方程所确定的函数的导数	(86)
第三章 导数的应用	(92)
§ 1 中值定理	(92)
§ 2 罗必达法则	(96)
§ 3 函数单调性的判定法	(102)
§ 4 函数的极值及其求法	(105)
§ 5 函数的最大值和最小值	(109)
§ 6 曲线的凹凸和拐点	(116)
§ 7 函数图形的描绘	(119)
第四章 微分及其应用	(129)
§ 1 函数的微分	(129)

§ 2	微分的应用	(135)
§ 3	曲线的曲率	(139)
第五章	不定积分	(148)
§ 1	不定积分概念	(148)
§ 2	积分的基本公式和法则 直接积分法	(151)
§ 3	第一类换元积分法	(157)
§ 4	第二类换元积分法	(164)
§ 5	分部积分法	(172)
§ 6	有理函数的积分	(180)
§ 7	三角函数有理式的积分	(184)
第六章	定积分及其应用	(188)
§ 1	记号 Σ 的意义与性质	(188)
§ 2	定积分的概念	(190)
§ 3	定积分的性质	(198)
§ 4	牛顿—莱布尼兹公式	(202)
§ 5	定积分的换元法与分部积分法	(210)
§ 6	定积分的近似计算	(222)
§ 7	定积分在几何上的应用	(227)
§ 8	定积分在物理上的应用	(243)
§ 9	广义积分	(255)
第七章	常微分方程	(262)
§ 1	微分方程的概念	(262)
§ 2	可分离变量的微分方程	(268)
§ 3	一阶线性微分方程	(274)
§ 4	一阶微分方程的应用举例	(287)
§ 5	二阶线性微分方程解的结构	(293)
§ 6	二阶常系数齐次线性微分方程	(297)
§ 7	二阶常系数非齐次线性微分方程	(301)
§ 8	常系数线性微分方程组举例	(317)

第一章 极限与连续

§ 1 基本初等函数与初等函数

【提 要】

1. 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时, 这两个函数才是相同的 (此时, 两个函数图象完全重合)。在判别两个函数不同时, 只要指出定义域、对应关系、值域三要素中有一要素不同就可以了。

2. 有解析式关系的函数, 使式子有意义的自变量取值范围是函数的定义域。在实际问题中, 还要考虑到是否符合题设的条件和实际意义。

3. 求已知函数反函数, 一般由原函数关系式 $y = f(x)$ 变成 $x = f^{-1}(y)$ 。由于习惯, 常用 x 表示自变量、 y 表示因变量, 于是 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改成 $y = f^{-1}(x)$ 。这
在同一直角坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y = x$ 为对称。

4. 反函数的定义域是对应函数的值域, 而值域是对应函数的定义域。

5. 若对定义域中任意 x 均有 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数; 若对定义域中任意 x 均有 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数; 不满足上述条件的函数称非奇非偶函数。

6. $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 不等式

$$|f(x)| \leq M$$

恒成立，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的，否则是无界的。

7. 若 y 是 u 的函数： $y = f(u)$ ，而 u 又是 x 的函数： $u = \varphi(x)$ ，且当 $x \in E$ 时对应的 u 值使 y 有定义，则称 y 是 x 在定义域 E 上的复合函数，记为： $y = f(\varphi(x))$ ， u 称中间变量。

1.1 下列各题中所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$;

(2) $y = x$ 和 $y = (\sqrt{x})^2$;

(3) $y = 2 - x$ 和 $y = \frac{4 - x^2}{2 + x}$;

(4) $y = \arccos x$ 和 $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$;

(5) $y = \ln \sqrt{x-1}$ 和 $y = \frac{1}{2} \ln(x-1)$;

(6) $y = |x-1|$ 和 $y = \begin{cases} 1-x, & x < 1; \\ 0, & x = 1; \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$

解 (1) 不相同。因 $y = \sqrt{x^2} = |x|$ ，二者对应关系不同。

(2) 不相同。因 $y = x$ 中 $x \in R$ 而 $y = (\sqrt{x})^2$ 中 $x \in [0, +\infty)$ ，二者定义域不同。

(3) 不相同。因 $y = 2 - x$ 中， $x \in R$ ，而 $y = \frac{4 - x^2}{2 + x}$ $x \neq -2$ 的一切实数，二者定义域不同。

(4) 是相同函数。因二者定义域、值域、图象都完全相同。

(5) 是相同函数。因定义域和对应关系都相同。

(6) 是相同函数, 因定义域、对应关系都相同。

1.2 求下列函数定义域

$$(1) y = \sqrt{3x+4}; \quad (2) y = \frac{2}{x^2-3x+2};$$

$$(3) y = \sqrt{1-|x|}; \quad (4) y = \lg \frac{1+x}{1-x};$$

$$(5) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)};$$

$$(6) y = \arccos \sqrt{2x};$$

$$(7) y = \frac{x}{\lg x}; \quad (8) y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)};$$

$$(9) y = \log_2(\log_2 x); \quad (10) y = \arcsin \frac{x-3}{2}.$$

解 (1) $\because 3x+4 \geq 0, \therefore x \geq -\frac{4}{3}$. 因此,

$y = \sqrt{3x+4}$ 的定义域是 $[-\frac{4}{3}, +\infty)$.

(2) $\because x^2-3x+2 \neq 0$ 即 $(x-2)(x-1) \neq 0$.

$\therefore x \neq 1, x \neq 2$,

因此, $y = \frac{2}{x^2-3x+2}$ 的定义域为 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$ 的一切实数。

(3) $\because 1-|x| \geq 0, \therefore -1 \leq x \leq 1$. 因此,

$y = \sqrt{1-|x|}$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(4) 当 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 即 $(1+x)(1-x) > 0$ 时, y 值确定。

解之, 得 $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $-1 < x < 1$ 的一切实数。

$$(5) \text{ 使上式有意义应满足 } \begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 1+x > 0, \\ 1+x \neq 1. \end{cases} \text{ 解出得 } x > -1$$

且 $x \neq 0$ ，因此，原函数的定义域为 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 的一切实数。

(6) $\because 0 \leq \sqrt{2x} \leq 1, \therefore 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. 因此，原函数定义域为 $[0, \frac{1}{2}]$.

$$(7) \text{ 要使函数有意义，应满足 } \begin{cases} x \neq kx + \frac{\pi}{2}, \\ x \neq k\pi. \end{cases} \text{ 即}$$

$x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ ，因此，原函数的定义域为 $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ 的一切实数。

$$(8) \text{ 要使函数有意义，应满足 } \begin{cases} 5x - x^2 > 0 \\ \lg \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ \frac{5x - x^2}{4} \geq 0, \end{cases} \text{ 解之得: } 1 \leq x \leq 4, \text{ 因此，函数}$$

定义域为 $[1, 4]$.

$$(9) \text{ 根据对数定义域要求，应满足 } \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x > 0, \end{cases}$$

即 $x > 1$ ，因此，函数定义域为 $(1, +\infty)$.

$$(10) \because -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1 \therefore 1 \leq x \leq 5, \text{ 因此，函数定}$$

义域为 $[1, 5]$.

1.3 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 求 $\varphi(1)$ 、 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi(-2)$ 的值。

解 $\varphi(1) = 0$;

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left| \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi(-2) = 0.$$

1.4 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$ 作出

图象，并求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 、 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 、 $f\left(\frac{3}{4}\right)$ 、 $f(2)$ 的值。

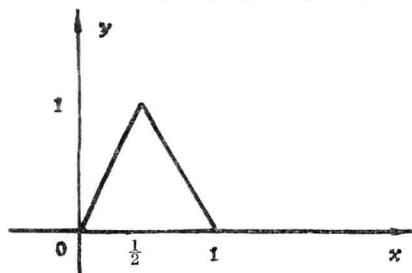


图1-1

$$\text{解 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3};$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$f(2) = 0.$$

1.5 求下列函数的反函数，并求反函数的定义域。

(1) $y = x^2 - 2x \quad (x > 1).$

(2) $y = 10^{x+1}.$

(3) $y = \frac{1-x}{1+x}.$

$$(4) y = \sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \pi \right).$$

$$(5) y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

解 (1) $\because y + 1 = (x - 1)^2$, $x - 1 = \pm \sqrt{y + 1}$; 又 $\because x > 1$, $\therefore x = \sqrt{y + 1} + 1$. 写成:

$$y = \sqrt{x + 1} + 1.$$

因此, 反函数为 $y = \sqrt{x + 1} + 1$, 定义域为 $(-1, +\infty)$.

$$(2) \because \lg y = x + 1, \therefore x = \lg y - 1, \text{ 写成 } y = \lg x - 1.$$

因此, 反函数是 $y = \lg x - 1$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$(3) \because (1 + x)y = 1 - x, \therefore x = \frac{1 - y}{1 + y}, \text{ 写成 } y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

因此, 反函数为 $y = \frac{1 - x}{1 + x}$, 定义域为 $x \neq -1$ 的一切实数.

$$(4) \text{ 由 } y = \sin x, \text{ 当 } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \pi \text{ 时, } x = \arcsin y, \text{ 但}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \pi. \text{ 故}$$

$$x = \pi - \arcsin y, \text{ 改写成}$$

$$y = \pi - \arcsin x.$$

因此, 反函数为 $y = \pi - \arcsin x$, 定义域为 $(-1, 1)$.

$$(5) \text{ 写成指数式: } a^y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \text{ 即}$$

$$a^y - x = \sqrt{x^2 + 1}. \text{ 两边平方得:}$$

$$a^{2y} - 2xa^y - 1 = 0, x = \frac{1}{2}(a^y - a^{-y}), \text{ 写成}$$

$$y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}).$$

因此, 反函数为 $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

1.6 设 $y = \frac{Ax^2 + Bx + C}{Kx^2 + Lx + M}$ 在什么条件下其反函数为有理函数。

解 所给函数的反函数由

$$x = \frac{Ay^2 + By + C}{Ky^2 + Ly + M} \text{ 或}$$

$(kx - A)y^2 + (Lx - B)y + (Mx - C) = 0$ 确定。从中解得:

$$y = \frac{-(Lx - B) \pm \sqrt{(Lx - B)^2 - 4(Kx - A)(Mx - C)}}{2(Kx - A)}.$$

为使其为有理函数必须且只需根号内的二次三项式

$$(L^2 - 4KM)x^2 - 2(LB - 2KC - 2AM)x + (B^2 - 4AC)$$

是完全平方式, 为此必须且只需它的判别式等于零:

$$D = 4(LB - 2KC - 2AM)^2 - 4$$

$$(L^2 - 4KM)(B^2 - 4AC) = 0.$$

即所给函数的反函数为有理函数的条件是

$$(LB - 2KC - 2AM)^2 - (L^2 - 4KM)(B^2 - 4AC) = 0.$$

1.7 指出下列函数中哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

$$(1) f(x) = x^4 - 2x^2 + 3;$$

$$(2) \varphi(x) = x^2 \cos x;$$

$$(3) y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

$$(4) y = \lg \frac{1-x}{1+x};$$

$$(5) g(x) = \frac{x}{a^x - 1}.$$

$$\text{解 } (1) \because f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 3 \\ = x^4 - 2x^2 + 3 = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数。

$$(2) \because \varphi(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = \varphi(x),$$

$\therefore \varphi(x)$ 是偶函数。

$$\begin{aligned}(3) \because f(-x) &= \frac{1}{2} [e^{-x} - e^{-(x)}] = \frac{1}{2} (e^{-x} - e^x) \\ &= -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ &= -f(x), \therefore f(x) \text{ 是奇函数。}\end{aligned}$$

$$(4) \because f(-x) = \lg \frac{1+x}{1-x} = -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数。

$$(5) \because g(-x) = \frac{-x}{a^{-x} - 1} = \frac{x \cdot a^x}{a^x - 1}, \therefore g(x) \text{ 为非奇非偶函数。}$$

1.8 已知 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 试考察下列复合函数的奇偶性。

$$(1) f[g(x)], (2) g[f(x)], (3) f[f(x)].$$

解 (1) 令 $\varphi(x) = f[g(x)]$, 则

$\varphi(-x) = f[g(-x)] = f[g(x)] = \varphi(x)$. 因此, $f[g(x)]$ 为偶函数。

(2) 令 $\varphi(x) = g[f(x)]$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)] \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

因此, $g[f(x)]$ 为偶函数。

(3) 令 $\varphi(x) = f[f(x)]$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)] \\ &= -\varphi(x).\end{aligned}$$

因此, $f[f(x)]$ 是奇函数。

1.9 (1) 证明函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内单调减少。

证 在 $(-1, 0)$ 内任取 x_1, x_2 使 $x_1 < x_2$, 则

$$x_2 - x_1 > 0, \quad x_1 \cdot x_2 > 0.$$

$$\text{而 } y_2 - y_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2} < 0, \text{ 因此, } y = \frac{1}{x} \text{ 在}$$

$(-1, 0)$ 内单调减少。

(2) 讨论 $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调性。

$$\begin{aligned} \text{解 对任意 } x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty) \text{ 不妨设 } x_1 < x_2, \text{ 则} \\ f(x_2) - f(x_1) &= (2x_2 + \sin x_2) - (2x_1 + \sin x_1) \\ &= 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1. \end{aligned}$$

$$\text{其中, } |\sin x_2 - \sin x_1| = \left| 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right|$$

$$\leq 2 \cdot \frac{|x_2 - x_1|}{2} \cdot 1 = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1.$$

$$\text{或 } -(x_2 - x_1) \leq \sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1.$$

从中可得 $\sin x_2 - \sin x_1 \geq -(x_2 - x_1)$. 于是 $f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) + (\sin x_2 - \sin x_1) \geq 2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = x_2 - x_1 > 0$ 或 $f(x_2) > f(x_1)$. 因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的。

1.10 下列函数哪些在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的? 若有界, 请指出。

$$(1) y = \sin^2 x; \quad (2) y = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sin\left(\sin \frac{x}{2}\right); \quad (4) y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

解 (1) 是有界的, $M = 1$

$$(2) y = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \quad M = \sqrt{2}, \text{ 有界.}$$

(3) 是有界的, $M = 1$.

(4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是无界的。

1.11 指出下列周期函数的最小正周期 T 。

(1) $y = \sin x + \cos x$; (2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x$; (4) $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$ 。

解 (1) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $T = 2\pi$ 。

(2) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, $T = \pi$ 。

(3) $y = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x$, $T = 2\pi / \frac{\pi}{2} = 4$ 。

(4) $y = \arctg(\operatorname{tg} x) = \arctg[\operatorname{tg}(x + \pi)]$, $T = \pi$ 。

1.12 指出下列复合函数的复合过程。

(1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; (2) $y = e^{x+1}$;

(3) $y = \cos^2(3x + 1)$; (4) $y = \arccos(1 - x^2)$ 。

解 (1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$ 。

(2) $y = e^u$, $u = x + 1$ 。

(3) $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = 3x + 1$ 。

(4) $y = \arccos u$, $u = 1 - x^2$ 。

1.13 设 $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$, 求 $f(x)$ 。

解 令 $x + 1 = t$ 或 $x = t - 1$, 则

$$f(t) = (t - 1)^2 - 3(t - 1) + 2 = 5t^2 - t + 6 \quad \text{于是,}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6。$$

1.14 设 $f(u) = \cos u$, 而 $u = \varphi(x) = 2 \operatorname{arctg} x$
 $x \in (-\infty, +\infty)$, 求 $f[\varphi(x)]$ 。

解 $\because u = 2 \operatorname{arctg} x, \therefore \operatorname{ctg} \frac{u}{2} = x$ 。

$$\cos u = 1 - 2 \sin^2 \frac{u}{2} = 1 - \frac{2}{\csc^2 \frac{u}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

因此, $f(\varphi(x)) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad x \in (-\infty, +\infty)$.

1.15 有一底半径为 R , 高为 H 的圆锥形量杯, 为在它的侧面刻上表示容积的刻度, 需要找出溶液的容积与其对应高度之间的函数关系。试写出表达式, 并指出定义域。

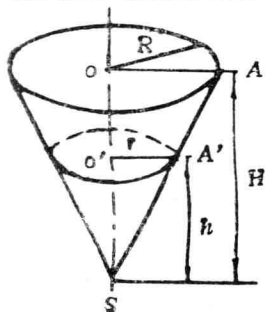


图1-2

解 设溶液的高度为 h 时体积为 V ,

$$\because \triangle AOS \sim \triangle A'O'S,$$

$$\therefore \frac{OA}{O'A'} = \frac{OS}{O'S} \text{ 或 } \frac{R}{r} = \frac{H}{h},$$

$$\text{即 } r = \frac{R \cdot h}{H}.$$

$$\text{因此, } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{Rh}{H} \right)^2 \cdot h \\ = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}, \quad h \in (0, H).$$

1.16 在半径为 R 的球内做内接圆柱体, 试将圆柱体的体积 V 表示为高 h 的函数, 并指明定义域。

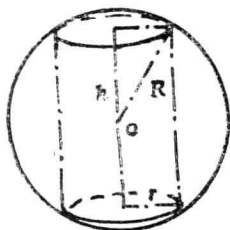


图1-3

解 设圆柱半径为 r , $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$,

$$V = \pi r^2 h = \pi \left[R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] \cdot h \\ = \pi \left(R^2 h - \frac{1}{4} h^3 \right) \quad h \in (0, 2R).$$

1.17 设 m 为密度不均匀的细杆 OB 上的一点, 若 om 的质量 m 与 om 的长度

x 的平方成正比。又知 $x = 4$ 厘米时, $m = 8$ 克, 试求 m 的质量 m 与长度 x 之间的函数关系。



图1-4

解 设所求的关系式为 $m = K \cdot x^2$.

把 $x = 4$ 、 $m = 8$ 代

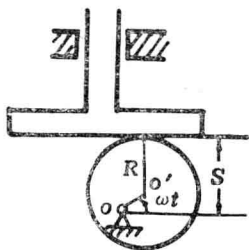
入上式得:

$$8 = K \cdot 4^2 \quad K = \frac{1}{2}$$

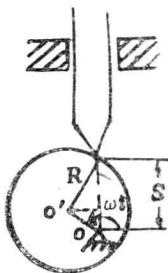
因此, 所求关系式为 $m = \frac{1}{2}x^2$.

1.18 (1) 图1-5(1)为平底从动杆凸轮机构, 偏心轮半径为 R , 偏心距 $\overline{oo'} = l$ 转动中心为 O , 转动角速度为 ω , 求从动杆的运动规律 (即从转动中心到从动杆平底之间的距离 S 与时间 t 的函数关系式)。

(2) 图1-5(2)为尖顶从动杆凸轮机构, 偏心轮半径为 R , 偏心距 $\overline{oo'} = l$ 转动中心为 O , 转动角速度为 ω , 求从动杆的运动规律。



(1)



(2)

图1-5

解 (1) 如图1-5(1), $S = AB = O'A + O'B$,
 $|O'B| = l \cdot \sin \omega t$, $|O'A| = R$,
 $S = l \cdot \sin \omega t + R$ 为所求的从动杆运动规律。

(2) 如图 1-5 (2), $S = AO = AB + OB$,

$$|OB| = l \cdot \sin(\pi - \omega t) = l \cdot \sin \omega t,$$

$$|O'B| = |l \cos(\pi - \omega t)| = |-l \cos \omega t| = l \cdot \cos \omega t,$$

$$|AB| = \sqrt{O'A^2 + OB^2} = \sqrt{R^2 - l^2 \cos^2 \omega t}.$$

因此, $S = l \cdot \sin \omega t + \sqrt{R^2 - l^2 \cos^2 \omega t}$ 为所求从动杆的运动规律。

1.19 已知水渠的横断面为等腰梯形, 倾斜角 $\varphi = 40^\circ$, $ABCD$ 叫过水断面 (即垂直于水流的断面), $L = AB + BC + CD$ 叫水渠的湿周, 当过水断面的面积是定值 S_0 时, 求湿周 L 与水深 h 的函数关系式, 并指明定义域。

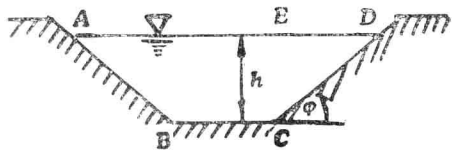


图1-6

解 如图, 在 $\triangle CED$ 中: $ED = h \cdot \operatorname{ctg} \varphi$

$$= h \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ,$$

又 $AB = CD$,

$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{h^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2 40^\circ} = \frac{h}{\sin 40^\circ},$$

$$S_0 = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2} (2BC + 2ED)h$$

$$= (BC + ED)h = BC \cdot h + h^2 \operatorname{ctg} 40^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{S_0}{h} - h \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ,$$

$$\therefore l = AB + BC + CD = BC + 2CD,$$

$$\therefore l = \frac{S_0}{h} - h \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ + \frac{2h}{\sin 40^\circ} \text{ 为所求关系式, } h \in \left(0, \frac{l}{2}\right)$$

1.20 有等腰梯形如图1-7, 当垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时, 若直线与 x 轴的交点坐标为 $(x, 0)$, 求直线扫过的面积 S 与 x 之间的函数关系, 指明定义域。

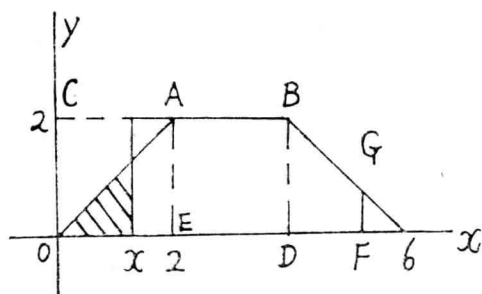


图1-7

解 当 $0 \leq x < 2$ 时, 直线扫过面积为等腰直角三角形, 故 $S = \frac{1}{2} x^2$;

当 $2 \leq x < 4$ 时, 直线扫过的面积为矩形 $ODBC$

的面积减去三角形 OEA 的面积, 故此时面积为 $S = 2x - 2$;

当 $4 \leq x \leq 6$ 时, 直线扫过的面积为梯形 $AOBD$ 的面积加上梯形 $DBGF$ 的面积:

$$\begin{aligned} S_{DBFG} &= \frac{1}{2} (2 + (6 - x))(x - 4) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 + 6x - 16, \end{aligned}$$

$$S_{OABD} = 4 \times 2 - 2 = 6,$$

故此时面积为 $-\frac{1}{2} x^2 + 6x - 10$, 因此, 扫过面积的关系式为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2, & 0 \leq x < 2; \\ 2x - 2, & 2 \leq x < 4; \\ -\frac{1}{2} x^2 + 6x - 10, & 4 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

定义域为 $[0, 6]$.

1.21 在底为 $AC = b$ 和高 $BD = h$ 的三角形 ABC 中, 内接一个高为 $NM = x$ 的矩形 $KLMN$, 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及面积 S 分别表示为 x 的函数, 并指明定义域.