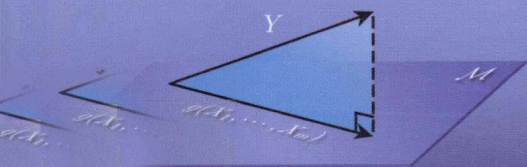


中央财经大学学术专著
出版基金资助出版

统计回归分析

——回归方程引论

陈乃辉 著



$$\|Y - g(X_1, \dots, X_m)\| = \inf_{h(X_1, \dots, X_m) \in M} \|Y - h(X_1, \dots, X_m)\|$$



科学出版社

中央财经大学学术专著出版基金资助出版

统计回归分析

——回归方程引论

陈乃辉 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

统计回归分析的本体是回归方程理论,前者乃后者在统计层面上的推绎.回归方程是对一个变量于一组变量某类函数集合中的最佳逼近元的刻画与规定.

本书内容分两大部分.一部分是1~4章及附录A~C,另一部分是5~12章.其中,5~12章是主体,研讨了八大类回归方程,从统计观点而言,即八大类统计回归模型,分别为线性回归方程、Gauss-Markov线性回归方程、非参数回归方程与半参数回归方程、随机向量密度函数、函数系数回归方程、随机过程回归方程、微分回归方程、逆回归方程.前4章及3个附录是对主体部分的理论支撑与辅助,内容包括:概率论、数理统计学、泛函分析、Fourier分析、矩阵代数、测度论及模拟实验SAS软件程序编制等.

本书可作为学习统计回归分析及相关学科(如物理、生物、经济、金融与管理等)的高年级本科生和研究生教材,也可供教师及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

统计回归分析:回归方程引论/陈乃辉著.—北京:科学出版社,2012

ISBN 978-7-03-033110-6

I. ①统… II. ①陈… III. ①回归分析 IV. ①O212.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第270982号

责任编辑:李欣 赵彦超/责任校对:李影

责任印制:钱玉芬/封面设计:王浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳艺恒彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年1月第一版 开本:B5(720×1000)

2012年1月第一次印刷 印张:19 1/2

字数:370 000

定价:68.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

(一)

1805年 Legendre、1809年 Gauss 分别在大地测量领域与天文测量领域中相继提出所谓线性回归模型问题,即带有随机误差的线性方程组之求解问题,并创立最小二乘方法而予以解决,这可以视为统计回归分析理论的渊源。

二百年来,统计回归分析一直处于数理统计学的中心地位,已有丰厚的积累。然而,与概率论相较,其归宿于纯粹数学的进化,可谓蛹在茧中。

20世纪初叶,借助于实变函数论及测度论,概率论(与数理统计学相对而言)得以完成其数学化的蜕变。就此,苏联概率论大家 A.H.Kolmogrov 曾论述到:“要把一向显得特异的概率论基本概念很自然地归入近代数学一般概念的行列中去,在测度与 Lebesgue 积分理论未产生以前,这一问题几乎是没有任何解决希望的。有了 Lebesgue 的研究以后,集合测度与事件概率之间的相似性,以及函数的积分与随机变量的数学期望之间的相似性就了如指掌。这相似性还可更进一步,例如独立随机变量的许多性质与正交函数的相应性质是完全相似的……”^①作者感觉,现在统计回归分析所处之历史发展阶段,相若于当年的概率论。

基于以往的积累,援用泛函分析与 Fourier 分析的观点、方法,欲成就统计回归分析之纯粹数学化的升华,化臆测为逻辑,化经验为先验,化表象为本体,化冗杂为简明,化不美为美焉,如是纯粹数学化的统计回归分析理论,反过来再应用于物象世界,将使本学科螺旋上升到一个新层次,本书是这个意愿的结果。或许本书之理论形态,更接近统计回归分析的本来面目。

(二)

从概率层次而观,统计回归分析之本在于回归方程理论。

回归方程理论的意义,可以借助法国哲学家、数学家笛卡儿的哲言来表达:“当我们不具备决定什么是真理的力量时,我们应遵从什么是最可能的,这是千真万确的真理。”^②

^①赵荣侠,崔群芳. 测度与积分. 西安:西安电子科技大学出版社,2002.

^②C. R. 劳. 统计与真理:怎样运用偶然性. 北京:科学出版社,2004.

当自变量组 X_1, \dots, X_m 包括了因变量 Y 的所有影响因素, 那么存在 X_1, \dots, X_m 的函数 $g(X_1, \dots, X_m)$, 使得下列方程成立

$$Y = g(X_1, \dots, X_m)$$

而当自变量组 X_1, \dots, X_m 并未涵盖因变量 Y 的所有影响因素时, Y 不能表示成 X_1, \dots, X_m 的函数. 事实上, 后者是更为普遍存在的情况, 于此时, 当退而求其次, 就是求 X_1, \dots, X_m 的所有函数或某类函数 $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m)$ 中最为逼近 Y 的那一个 $g(X_1, \dots, X_m)$, 即下列方程的解

$$\|Y - g(X_1, \dots, X_m)\| = \min_{h(X_1, \dots, X_m) \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m)} \|Y - h(X_1, \dots, X_m)\|$$

此方程称为 Y 关于 X_1, \dots, X_m 的回归方程, 而方程之解 $g(X_1, \dots, X_m)$ 称为 Y 关于 X_1, \dots, X_m 的回归函数. 回归方程是普通方程概念的自然延伸, 方程是回归方程的特例, 即当 $g(X_1, \dots, X_m) \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m)$ 时, 回归方程退化为方程. 换言之, 回归函数是普通函数概念的自然延伸, 函数是回归函数的特例. 回归方程理论就是求解回归方程之回归函数的理论.

回归方程的解有两种类型, 一是概率解, 一是统计解. 前者指在已知回归方程中自变量、因变量的联合概率分布的前提下所获之解, 后者指在已知回归方程中自变量、因变量的联合样本的前提下所获之解. 统计回归分析就是求解回归方程之统计解的理论. 从理路上而言, 概率解为本, 统计解是末, 末应由于本, 囿之逐末未本, 难免溺于茫然无归.

概率理论是一个纯粹逻辑体系, 数理统计学 (统计推断理论) 不过为它的一个特殊部分, 用陈希孺先生的话言之: “实际上, 这种 (统计) 推断的意义正如在欧氏几何公理体系下所推演出的任何一个命题那样明确.”^[4] 类此, 统计回归分析乃为回归方程理论的一个特殊部分, 其与欧几里得几何无异. 经验的、实验的、艺术的统计学, 其当下的根据与最终的归宿是数理统计学, 这类比于实验的物理与理论的物理之关系.

(三)

回归方程论的理论基础来自三个学科: 概率理论 (包括数理统计学)、泛函分析与 (广义) Fourier 分析.

将概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上所有平方可积随机变量看做一个整体而得到空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其成为一个 Hilbert 空间, 如是参数型回归方程的概率解可援用正交投影定理得到解答, 缘于此解是方程变量的诸概率矩, 因而利用大数定律与矩方法,

可获概率 1 意义下的统计解. 至于非参数型回归方程, 在投影空间 $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m)$ 存在至多可列维基的情形下, 借助 (广义) Fourier 级数理论, 将非参数型回归函数化成参数型回归函数之逼近序列, 而解决之.

上述回归方程论的理论基础, 非皆现成, 如 Hilbert 空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中幂函数型 (准 Schauder) 基的存在条件, 本书第 4 章属意之于此问题, 其核心工作是推广 Luzin(卢津) 定理.

本回归方程论, 与以往的统计回归分析相较, 主要不同还有:

- (1) 从概率层次着眼, 而非浮于统计的样本层面;
- (2) 以最佳逼近定理 (正交投影定理的推论) 替换最小二乘方法, 后者是表象, 前者是本质;
- (3) 关于非参数型回归方程所求之解, 乃意在全局解析的, 而非局部数值的;
- (4) 较大地拓广了回归方程的谱系, 特别地, 其中微分回归方程已将数学中的大家族——微分方程纳入囊中. 进一步值得关注者, 乃变分方程与回归方程的关系如何? 而物象世界中的基本原理——最小作用原理之表现, 可用变分方程予以数理刻画和演绎.

(四)

本书的后 8 章 (第 5 章 ~ 第 12 章) 为该书的主体部分, 研讨了八大类回归方程; 前 4 章及附录 (附录 A ~ 附录 C) 为主体部分的理论基础与辅助. 书中有相当部分简单的或易于模仿的定理证明, 着意留给学生读者完成, 以此权作习题.

本书稿于中央财经大学全校研究生公共选修课上连续讲授三年 (2009 ~ 2011 年), 获得学生们的积极影响与应求, 此乃书稿成长的重要因素. 该书出版获中央财经大学学术专著出版基金资助, 在此表示感谢.

鉴于作者德能莫逮, 且所作欠于岁月磨砺, 书稿中尚需改进与琢磨者, 一定不少, 甚或错漏之处, 在所不免, 诚望专家、读者体察, 并予以批评指正, 以利修葺与完善, 庶几臻于有功.

作 者 谨 识

2011 年 10 月于北京清河

符 号 表

$C(F)$	函数 $F(x)$ 的连续点集合
$\text{Col}(A)$	矩阵 A 列向量的张成空间
e_j	$e_j \in \mathbb{R}^n$, 其第 j 项为 1, 余者皆为 0
$\inf\{M\}$	实数集 M 的最大下界
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	数列 x_n 的最大之部分极限
$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$	数列 x_n 的最小之部分极限
I_m	m 阶单位阵
$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$	子空间 \mathcal{M}_1 与 \mathcal{M}_2 的正交和
$\max\{M\}$	实数集 M 的最大值
$\min\{M\}$	实数集 M 的最小值
$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$	子空间 \mathcal{M}_1 与 \mathcal{M}_2 的和
\mathbb{N}	自然数集合
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
\mathbb{R}	实数集合
\mathbb{R}_+	正实数集合
$\mathbb{R}^{m \times n}$	实 $m \times n$ 型矩阵集合
\mathbb{R}^n	实数集合的 n 次直积 $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, 即 n 维实数列向量
$\sup\{M\}$	实数集 M 的最小上界
\mathbb{Z}	整数集合
\mathbb{Z}^+	非负整数集合
$\mathbf{1}_m$	m 阶列向量, 其元素皆是 1
$\#(M)$	集合 M 元素的个数

目 录

前言

符号表

第 1 章 概率论	1
1.1 随机向量	1
1.1.1 测度空间	1
1.1.2 概率分布	1
1.1.3 条件分布	4
1.1.4 独立性	5
1.2 数字特征	6
1.2.1 矩	6
1.2.2 熵	13
1.2.3 随机变量组的离散度	15
1.3 特征函数	17
1.3.1 定义	17
1.3.2 性质	18
1.3.3 逆变换公式与唯一性定理	18
1.3.4 随机向量的特征函数	19
1.4 条件数学期望	20
1.4.1 定义	20
1.4.2 性质	21
1.5 随机过程	22
1.5.1 概念	22
1.5.2 常见随机过程	23
1.6 随机序列的极限	25
1.6.1 收敛方式	25
1.6.2 极限定理	26
1.6.3 函数对收敛的传递性	28

第 2 章 统计推断	31
2.1 统计空间	31
2.2 参数统计推断	34
2.3 非参数统计推断	37
第 3 章 Hilbert 空间	39
3.1 距离空间	39
3.2 赋范线性空间	42
3.3 Hilbert 空间	46
3.4 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 空间	48
3.5 变分引理与正交投影定理	51
3.6 再论条件数学期望	55
3.6.1 新定义	55
3.6.2 条件数学期望的逼近度	57
3.7 广义条件数学期望与 H 条件数学期望	58
3.7.1 线性条件数学期望与广义条件数学期望	58
3.7.2 H 条件数学期望	62
第 4 章 Hilbert 空间中的 Fourier 分析	63
4.1 标准正交基 Fourier 分析	63
4.2 准 Schauder 基 Fourier 分析	69
4.2.1 有限维空间	70
4.2.2 可列维空间	73
4.3 Weierstrass 逼近定理与推广 Luzin 定理	75
4.3.1 Weierstrass 逼近定理	76
4.3.2 推广 Luzin 定理	78
4.4 幂函数准 Schauder 基	82
4.4.1 Lebesgue 测度情形	82
4.4.2 离散测度情形	86
4.4.3 有限区间情形	87
4.4.4 无限区间情形	88
4.4.5 乘积空间情形	92
4.5 Fourier 级数逼近速度	96
4.6 分布函数幂函数准 Schauder 基	100

第 5 章 线性回归方程	103
5.1 回归方程概述	103
5.2 线性回归方程	105
5.2.1 方程参数的概率解	106
5.2.2 方程参数的统计解	108
5.2.3 回归函数的逼近度	112
5.3 拟线性回归方程	115
5.3.1 方程参数的概率解	116
5.3.2 方程参数的统计解	116
5.4 约束线性回归方程	118
5.5 接力投影线性回归方程组	123
5.5.1 二阶接力投影线性回归方程组	123
5.5.2 p 阶接力投影线性回归方程组	125
第 6 章 Gauss-Markov 线性回归方程	127
6.1 定义	127
6.2 最小二乘方法	128
6.2.1 最小二乘估计	128
6.2.2 最小二乘估计的性质	129
6.3 极大似然方法	132
6.3.1 极大似然估计	132
6.3.2 极大似然估计的性质	133
6.4 回归函数的逼近度	134
6.5 自变量的复共线性问题	135
6.5.1 随机变量组复共线性的刻画	135
6.5.2 自变量复共线对系数估计的影响	136
第 7 章 非参数回归方程与半参数回归方程	138
7.1 非参数回归方程	138
7.1.1 回归函数与误差项方差的概率解	138
7.1.2 回归函数与误差项方差的统计解	139
7.1.3 分布函数幂函数基情形	142
7.1.4 回归函数的逼近度	146
7.2 非参数回归方程局部解法	147

7.2.1	局部平均估计	147
7.2.2	回归直方图估计	150
7.2.3	k 最近邻估计	153
7.2.4	核函数与局部化测度	153
7.2.5	局部多项式估计	156
7.2.6	核估计	157
7.3	半参数回归方程	158
7.3.1	系数与非参数函数的概率解	159
7.3.2	系数与非参数函数的统计解	161
第 8 章	随机向量密度函数	165
8.1	随机变量密度函数局部解法	165
8.1.1	局部平均估计	165
8.1.2	直方图估计	166
8.1.3	k 最近邻估计	168
8.1.4	核估计	168
8.2	随机变量密度函数全局解	170
8.2.1	密度函数的概率解	170
8.2.2	密度函数的统计解	171
8.2.3	模拟实验	174
8.3	随机向量密度函数全局解	174
8.3.1	密度函数的概率解	175
8.3.2	密度函数的统计解	176
8.3.3	模拟实验	177
第 9 章	函数系数回归方程	179
9.1	参数变量函数系数线性回归方程	179
9.1.1	函数系数的概率解	180
9.1.2	函数系数的统计解	181
9.1.3	模拟实验	182
9.2	参数变量函数系数半参数回归方程	183
9.2.1	非参数函数与函数系数的概率解	184
9.2.2	非参数函数与函数系数的统计解	186
9.2.3	模拟实验	188

9.3	回归变量函数系数线性回归方程	189
9.3.1	函数系数的概率解	190
9.3.2	函数系数的统计解	194
9.3.3	模拟实验	194
9.4	回归变量函数系数半参数回归方程	195
9.4.1	函数系数与非参数函数的概率解	196
9.4.2	函数系数与非参数函数的统计解	199
9.4.3	模拟实验	201
第 10 章	随机过程回归方程	203
10.1	随机过程线性回归方程	203
10.1.1	系数函数的概率解	204
10.1.2	系数函数的统计解	205
10.1.3	模拟实验	206
10.2	随机过程非参数回归方程	208
10.2.1	回归函数的概率解	208
10.2.2	回归函数的统计解	212
10.2.3	模拟实验	214
第 11 章	微分回归方程	216
11.1	导言	216
11.1.1	定义	216
11.1.2	线性微分回归方程解空间的结构	217
11.2	一阶常系数线性微分回归方程	218
11.2.1	定义	218
11.2.2	方程的概率解	219
11.2.3	方程的统计解	222
11.3	二阶常系数线性微分回归方程	223
11.3.1	定义	223
11.3.2	方程的概率解	224
11.3.3	方程的统计解	228
11.4	二阶常系数线性微分方程的回归方程模式之解法	228
11.5	一阶常系数线性微分回归方程组	234
11.5.1	定义	234

11.5.2	方程组解空间的结构	235
11.5.3	方程组的概率解	236
11.5.4	方程组的统计解	239
11.6	一阶函数系数线性微分回归方程	242
11.6.1	定义	242
11.6.2	方程的概率解	245
11.6.3	方程的统计解	245
11.7	一阶函数系数线性微分方程的回归方程模式之解法	246
第 12 章	逆回归方程	250
12.1	逆正交投影定理	250
12.2	概念	252
12.3	线性逆回归方程	253
12.3.1	同维数情形	254
12.3.2	一般情形	257
12.4	线性逆回归方程组	260
12.4.1	线性逆回归方程组逆回归系数之解空间的结构	261
12.4.2	线性逆回归方程组参数的概率解	262
12.4.3	线性逆回归方程组参数的统计解	265
参考文献		267
附录 A	矩阵代数	269
A.1	矩阵简约记法	269
A.2	矩阵的迹	270
A.3	正定矩阵	270
A.4	正交投影矩阵	271
A.5	二次型的极值	271
A.6	广义逆矩阵	273
附录 B	测度论	276
B.1	测度空间	276
B.2	可测函数	276
B.3	积分	278
B.4	乘积测度空间	281
B.5	条件概率与条件数学期望	282

附录 C 模拟实验 SAS 软件编制程序	284
C.1 5.3 节例 5.3.2 的模拟实验程序	284
C.2 8.3 节的模拟实验程序	284
C.2.1 求解密度函数 (二元 6 次多项式) 的程序	284
C.2.2 作密度函数 (二元 6 次多项式) 三维图像的程序	286
C.3 9.2 节的模拟实验程序	287
索引	294

第1章 概 率 论

1.1 随 机 向 量

1.1.1 测度空间

随机变量是一个泛函, 且其定义域空间上设置了一个测度结构, 即其定义域空间是一个测度空间.

定义 1.1.1 设集合 Ω 的子集族 \mathcal{F} 满足

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F} (n \in \mathbb{N})$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

称 \mathcal{F} 是 Ω 的 σ 代数 (σ -域).

例 1.1.1 \mathbb{R} 的一个通常 σ 代数为 Borel 集

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \triangleq$ 包含 $\{(a, b) \subset \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\}$ 的最小 σ 代数

定义 1.1.2 设 \mathcal{F} 为集合 Ω 的 σ 代数, 称 (Ω, \mathcal{F}) 为可测空间.

例 1.1.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 为可测空间.

定义 1.1.3 设 (Ω, \mathcal{F}) 是可测空间, 集函数 $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ 满足对两两不交的集合序列 $A_n \in \mathcal{F} (n \in \mathbb{N})$, 有

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

称 μ 为可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上的 σ 可加测度, 简称测度; 若 μ 又满足 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 μ 为可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上的概率测度, 简称概率, 记为 P .

定义 1.1.4 设 μ 是可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上的测度, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间. 设 P 是可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 的概率, 称 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间.

例 1.1.3 Lebesgue 测度 μ_L 是可测空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的常见测度, 其是区间长度概念的自然延拓. 而 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_L)$ 为测度空间.

1.1.2 概率分布

随机数学中的随机变量 (或称随机数) 相当于非随机数学中的数.

定义 1.1.5 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, $X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数, $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

称 $X(\omega)$ 为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一个随机变量, 简记为 X . 称

$$P\{X(\omega) \in B\} \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

为随机变量 $X(\omega)$ 的概率分布.

定义 1.1.6 设 X_1, \dots, X_n 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 称有序随机变量组

$$(X_i)_{1 \leq i \leq n} = (X_1, \dots, X_n)^T$$

为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的 n 维随机向量. 设 $X_{ij} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 皆是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, 称随机变量的矩阵

$$(X_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

为 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机矩阵.

下面三个定义是对随机向量完全刻画的三种手法.

定义 1.1.7 设 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 称 n 元函数

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \quad ((x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n)$$

为随机向量 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 的分布函数, 记作 $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$.

定义 1.1.8 设 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 存在非负可积函数 $f(x_1, \dots, x_n)$, 使

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n \quad ((x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n)$$

其中的积分为 Lebesgue 积分, 称 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 为连续型随机向量, $f(x_1, \dots, x_n)$ 为 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 的密度函数, 记作 $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$.

例 1.1.4 设 $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 其密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)}, & (x_1, \dots, x_n)^T \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i], \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

称 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 服从 $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ 上的 n 维均匀分布, 记作 $\mathbf{X} \sim U\left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]\right)$.

例 1.1.5 设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\} \quad (x \in \mathbb{R}^p)$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\Sigma > 0$, 称 \mathbf{X} 服从 p 元正态分布, 记作 $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$.

多元正态分布随机向量的线性函数仍服从多元正态分布.

定理 1.1.1 若随机向量 $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$, B 是 $s \times p$ 型常数矩阵, d 是 s 维常数向量, 令

$$\mathbf{Z} = B\mathbf{X} + d$$

则随机向量 $\mathbf{Z} \sim N_s(B\mu + d, B\Sigma B^T)$.

定义 1.1.9 设 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 存在 \mathbb{R}^n 上的至多可列集 $\{(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n : (k_1, \dots, k_n) \in \Lambda\}$, 使

$$P\{(X_1, \dots, X_n) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) : (k_1, \dots, k_n) \in \Lambda\} = 1$$

称 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 为离散型随机向量, 称

$$P\{(X_1, \dots, X_n) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_n})\} = p_{k_1, \dots, k_n} \quad ((k_1, \dots, k_n) \in \Lambda)$$

为 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 的分布律.

例 1.1.6 设 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 是概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机向量, 其分布律为

$$P\{(X_1, \dots, X_n) = (k_1, \dots, k_n)\} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \frac{\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \quad ((k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n)$$

其中 $\lambda_i > 0 (1 \leq i \leq n)$, 称 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 服从 n 维 Poisson 分布, 记作 $(X_1, \dots, X_n)^T \sim P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

随机向量关于子随机向量的边缘概率分布, 指随机向量的概率分布向该子随机向量所在子空间的垂直投置.

定义 1.1.10 称随机向量 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 的子随机向量 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})^T$ 的分布函数

$$F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, X_{i_k} \leq x_{i_k}) \quad ((x_{i_1}, \dots, x_{i_k})^T \in \mathbb{R}^k)$$

为 $(X_1, \dots, X_n)^T$ 关于 $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})^T$ 的边缘分布函数.