概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

张忠志　李伯忍　李绍明　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

张忠志　李伯忍　李绍明　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共分7章:第1章至第4章是概率论部分,主要内容有随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量和随机变量的数字特征;第5章至第7章是数理统计部分,主要内容有数理统计的基本概念、参数估计和假设检验.

本书内容精炼,结构合理,例题充实,每章配有习题和小结,书末附有常用数理统计表及习题参考答案.本书可作为高等学校理工类(非数学专业)以及经管类各专业的概率论与数理统计课程的教材,也可作为相关专业技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张忠志,李伯忍,李绍明编.—天津:天津大学出版社,2011.2

ISBN 978-7-5618-3839-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张…②李…③李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第012943号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 9.25
字　　数 240千
版　　次 2011年2月第1版
印　　次 2011年2月第1次
定　　价 22.00元

前　言

本书根据作者多年来在教学实践和教学研究中积累的经验,按照数学与统计学课程指导委员会制定的《概率论与数理统计课程基本要求》编写而成.

概率论与数理统计是研究带有随机性的各类问题或模型的基础,是高等学校理工、经济和管理类各专业的必修课程.其本身理论性强,处理问题的思想方法特别,计算烦琐.为了使学生易学好懂,本书以较多的实例引出概率统计的基本概念和公式,揭示其直观背景和实际意义,减少一些烦琐的定理证明和公式推导.在选配例题和习题时,力求使学生理解概率统计的基本理论与基本方法的实质,了解基本理论与基本方法的实际应用.

本书可作为理工、经管类各专业概率论与数理统计课程教材.阅读本书只要求具备微积分和线性代数的基本知识.由于不同学校或不同专业安排的学分有所不同,使用本书时可根据教学需要适当取舍,本教材所需学时约为54~64学时.

本书第1、2章由李伯忍博士编写,第3、4章由张忠志博士编写,第5、6、7章由李绍明博士编写.

本书在编写过程中参阅了许多专家学者的著作,并引用了部分文献中的信息,恕不一一指明出处,在此向他们表示诚挚的谢意!

由于编者水平和时间有限,书中的错误及不妥之处在所难免,敬请读者与专家批评指正!

编　者

2010年10月

目　　录

前言
第 1 章　随机事件及其概率 …… 1
1.1　随机事件 …… 1
1.2　随机事件的概率 …… 4
1.3　条件概率 …… 8
1.4　独立性 …… 12
本章小结 …… 15
习题 1 …… 16
第 2 章　随机变量及其分布 …… 19
2.1　随机变量与分布函数 …… 19
2.2　离散型随机变量及其分布律 …… 21
2.3　连续型随机变量及其概率密度 …… 26
2.4　随机变量的函数的分布 …… 32
本章小结 …… 34
习题 2 …… 35
第 3 章　随机向量 …… 37
3.1　随机向量的概率分布 …… 37
3.2　随机变量的独立性 …… 47
3.3　随机向量的函数的分布 …… 50
本章小结 …… 56
习题 3 …… 58
第 4 章　随机变量的数字特征 …… 62
4.1　随机变量的数学期望 …… 62
4.2　随机变量的方差 …… 67
4.3　协方差与相关系数 …… 71
4.4　大数定律与中心极限定理 …… 74
本章小结 …… 78
习题 4 …… 80
第 5 章　数理统计的基本概念 …… 83
5.1　随机样本与统计量 …… 83
5.2　统计推断中常用的三个分布 …… 86
5.3　正态总体的常用抽样分布 …… 88
本章小结 …… 93
习题 5 …… 93

第 6 章　参数估计 …… 95
6.1　点估计 …… 95
6.2　估计量的评选标准 …… 99
6.3　区间估计 …… 101
6.4　正态总体均值与方差的区间估计 …… 103
本章小结 …… 108
习题 6 …… 109
第 7 章　假设检验 …… 112
7.1　假设检验概述 …… 112
7.2　一个正态总体的均值与方差的假设检验 …… 114
7.3　两个正态总体的均值或方差的比较 …… 117
本章小结 …… 120
习题 7 …… 121
附录　常用数理统计表 …… 124
附表一　标准正态分布表 …… 124
附表二　泊松分布数值表 …… 125
附表三　χ^2 分布临界值表 …… 126
附表四　t 分布临界值表 …… 127
附表五　F 分布临界值表 …… 128
习题答案 …… 133

第1章　随机事件及其概率

抛一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,在抛掷之前无法预知抛掷的结果,即呈现出不确定性,但多次重复的抛掷同一枚硬币,得到正面朝上和反面朝上的次数大致相同. 这种大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性,就是后面要讲述的**统计规律性**. 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称为**随机现象**.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科,它从数量角度给出随机现象的描述,为人们认识和利用随机现象的规律提供了有力的工具. 因此概率论和数理统计这门学科应用相当广泛,几乎渗透到所有科学技术领域,工业、农业、国防与国民经济的各个部门都要用到它. 例如,在工业生产中,人们应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品抽样检查等;还可以使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等. 另外,概率论与数理统计的理论与方法正向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了各种边缘性的应用学科,如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

1.1　随机事件

1.1.1　随机事件

概率论与数理统计要研究的是随机现象,这就需要进行大量重复的试验,要求试验具有以下三个性质:

(1)可以在相同的条件下重复进行;

(2)每次试验的结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现.

在概率论中,将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**. 下面举一些随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面朝上 H、反面朝上 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛三次,观察正面朝上 H、反面朝上 T 出现的情况.

E_3:在一批灯管中任意抽取一只,测试它的寿命.

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能的结果是明确的. 将随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S. 样本空间的元素,即随机试验 E 的每个结果,称为**样本点**.

下面写出随机试验 E_i $(i=1,2,3)$的样本空间 S_i:

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$;

$S_3=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

在实际的随机试验中，人们常常关心满足某种条件的样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯管的寿命小于500小时为次品，那么在 E_3 中更关心灯管的寿命是否是 $t\geqslant500$（小时）的情况，满足这一条件的样本点组成 S_3 的一个集合 $A=\{t|t\geqslant500\}$，称 A 为试验 E_3 的一个随机事件. 显然当且仅当集合 A 中的一个样本点出现时，有 $t\geqslant500$（小时），即灯管合格.

一般地，称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件**发生**. 随机事件一般用大写的字母 A,B,C,D 等来表示.

下面举出一些随机事件的例子.

例 1.1 在 E_2 中，事件"三枚硬币出现同一面"，即

$$A_1=\{HHH,TTT\};$$

事件"三枚硬币至少有两枚正面朝上"，即

$$A_2=\{HHH,HHT,HTH,THH\};$$

在 E_3 中，事件"寿命小于500小时"，即

$$A_3=\{t|0\leqslant t<500\}.$$

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 如在 E_1 中有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是它自身的子集，它在每次试验中总是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它是样本空间 S 的子集，但在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

1.1.2 事件间的关系和事件的运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按集合论中集合间的关系与集合运算来处理. 下面给出这些运算在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A,B 是 S 的子集.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

(3) 事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当事件 A 或事件 B 中至少有一个发生时，和事件 $A\cup B$ 发生.

(4) 事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅当事件 A 和事件 B 都发生时，积事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 通常记为 AB.

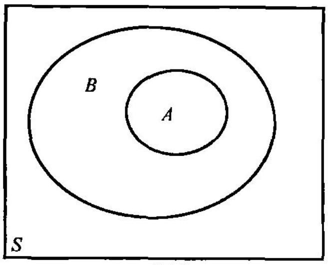
特别地，对于有限个或可列个事件的和事件与积事件可以类似地定义，请大家自己给出相应的定义.

(5) 事件 $B-A=\{x|x\in B$ 且 $x\notin A\}$，称为事件 B 与事件 A 的**差事件**. 当且仅当事件 B 发生且事件 A 不发生时，差事件 $B-A$ 发生.

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或**互斥**的，即事件 A 与事件 B 不能同时发生.

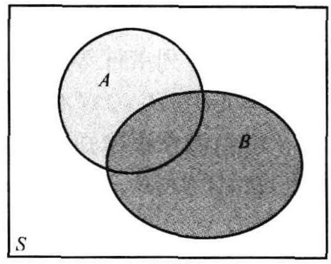
(7) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，又称事件 A 与事件 B 为**互逆事件**. 即对每次试验而言，事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件常记为 $\overline{A}$.

以下面的图形(图 1 - 1 ~ 1 - 6)来表示上述事件间的关系和运算.



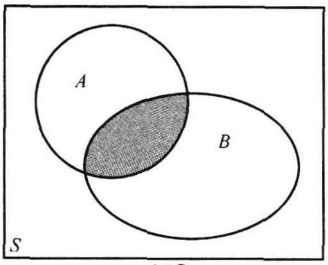
$A\subset B$

图 1 - 1



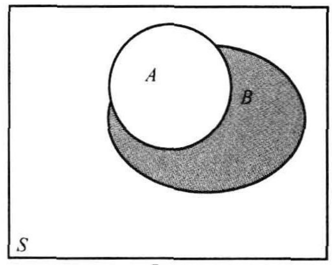
$A\cup B$

图 1 - 2



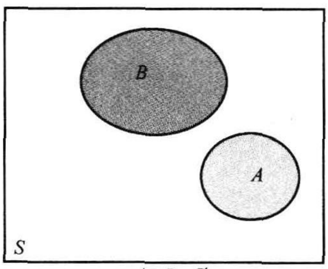
$A\cap B$

图 1 - 3



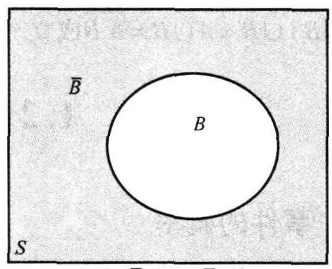
$B-A$

图 1 - 4



$A\cap B=\varnothing$

图 1 - 5



$B\cup\overline{B}=S, B\cap\overline{B}=\varnothing$

图 1 - 6

在进行事件的运算时,经常要用到下述定律(设 A,B,C 为事件).

交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.2 在例 1.1 中有

$A_1\cup A_2=\{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\}$;

$A_1\cap A_2=\{HHH\}$;

$A_1-A_2=\{TTT\}$.

例 1.3 下列各式说明什么包含关系?

(1) $AB=A$; (2) $A\cup B=A$; (3) $A\cup B\cup C=A$.

解 (1) $AB=A$ 表示事件 A 包含于事件 B,事件 B 包含事件 A,即 $A\subset B$;

(2)$A\cup B=A$ 表示事件 B 包含于事件 A,事件 A 包含事件 B,即 $B\subset A$;

(3)$A\cup B\cup C=A$ 表示事件 $B\cup C$ 包含于事件 A,事件 A 包含事件 $B\cup C$,即 $B\cup C\subset A$.

例 1.4 证明下列事件等式成立.

(1)$A\cup B=A\bar{B}\cup B$;(2)$(A-AB)\cup B=A\cup B=\overline{\bar{A}\bar{B}}$.

证明 (1)由德摩根律知 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$,而

$$\overline{A\bar{B}\cup B}=\overline{A\bar{B}}\cap\bar{B}=(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}})\bar{B}=(\bar{A}\cup B)\bar{B}=\bar{A}\bar{B}\cup B\bar{B}=\bar{A}\bar{B}\cup\varnothing=\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B},$$

所以

$$\overline{A\cup B}=\overline{A\bar{B}\cup B},$$

即 $A\cup B=A\bar{B}\cup B$ 成立.

(2)因为

$$\begin{aligned}\overline{(A-AB)\cup B}&=\overline{A-AB}\cap\bar{B}=\overline{(A\overline{AB})}\bar{B}=(\bar{A}\cup AB)\bar{B}\\&=(\bar{A}\bar{B})\cup(AB)\bar{B}=\bar{A}\bar{B}\cup AB\bar{B}=\bar{A}\bar{B}\cup\varnothing=\bar{A}\bar{B},\end{aligned}$$

所以

$$(A-AB)\cup B=\overline{\bar{A}\bar{B}},$$

又

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B},$$

故

$$A\cup B=\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\bar{A}\bar{B}},$$

即 $(A-AB)\cup B=A\cup B=\overline{\bar{A}\bar{B}}$ 成立.

1.2 随机事件的概率

1.2.1 事件的概率

除必然事件和不可能事件外,在一次试验中一个事件可能发生也可能不发生. 观察试验中的各个事件,常会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大,而另一些事件发生的可能性较小. 例如,在抛一颗骰子观察它的点数的试验中,事件"出现偶数点"比事件"出现 1 点"发生的可能性要大. 因此,希望对每个事件指定一个数,能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 下面给出表征事件发生可能性大小的概率的定义.

定义 1.1 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A,赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果它满足下列条件:

(1)对于任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2)对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

(3)设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j\ (i,j=1,2,3,\cdots)$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

其中(3)式称为概率的可列可加性.

由概率的定义可以推得概率具有下述性质.

性质 1(对立事件的概率) $\bar{A}$ 是 A 的对立事件,则有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质2 $P(\varnothing)=0.$

性质3 设 A,B 是两个事件，且 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质4(加法公式) 对于任意两事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 1 ~4 的证明从略.

性质 4 容易推广到 n 个事件的情形，这里给出三个事件 A_1,A_2,A_3 的加法公式，

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-\\&P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

例1.5 (1)设 A,B 是互不相容的事件，已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，求 $P(\overline{A})$，$P(A\cup B)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(2)设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.4$，求 $P(AB)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 (1)$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6.$

因 A,B 是互不相容的事件，即 $AB=\varnothing$，$P(AB)=0$，于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5-0=0.9,$$

由德摩根律，有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1.$$

(2)$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.2+0.3-0.4=0.1,$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.4=0.6.$

例1.6 已知 $P(A)=P(B)=1/4$，$P(C)=1/2$，$P(AB)=1/8$，$P(BC)=P(CA)=0$，试求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

解 $\{A,B,C$ 中至少有一个发生$\}=A\cup B\cup C$，而

$$ABC\subset BC,$$

且

$$P(BC)=0,$$

所以有

$$P(ABC)=0,$$

则由加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-0-0+0=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

1.2.2 古典概型

考察一类最简单的随机试验，它们具有以下两个特点：

(1)试验的样本空间只包含有限个样本点；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

例如前面提到的“抛硬币”和“掷骰子”的试验就属于这一类试验. 具有这两个特点的试

验称为**古典概型**或称**等可能概型**.

基于古典概型的特点,其概率计算方法为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

若以 $N(S)$ 表示样本空间中的基本事件的总数,以 $N(A)$ 表示事件 A 中包含的基本事件数,即有

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}.$$

这就是古典概型中,事件 A 的概率的计算公式,上式表明在古典概型中,事件 A 的概率等于 A 中包含的样本点的个数在样本空间的全部样本点总数中所占的比例.

古典概型中,事件 A 的概率也称为**古典概率**,在计算时,可以利用乘法原理、加法原理及排列、组合的知识来求得相应的概率.

例 1.7 将一枚硬币抛掷 3 次,求:

(1)恰有一次出现正面朝上的概率;

(2)至少有一次出现正面朝上的概率.

解 用 H 表示出现正面朝上,用 T 表示出现反面朝上,将一枚硬币抛掷 3 次的样本空间为

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\},$$

S 中包含有限个样本点,且由对称性可知每个样本点出现的可能性相同,是古典概型.

(1)设 A 表示“恰有一次出现正面朝上”,则

$$A=\{HTT,THT,TTH\},$$

故有 $P(A)=\frac{3}{8}$.

(2)设 B 表示“至少有一次出现正面朝上”,则 B 的对立事件 $\overline{B}=\{TTT\}$,则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间 S 中包含的样本点个数较多时,一般不将 S 中的元素一一列出,而只需要分别求出 S 中和事件 A 中分别包含的样本点的个数,再由古典概型计算公式即可得到事件 A 的概率.

例 1.8 箱中有 a 只白球,b 只红球,k 个人依次从箱中取一只球,考虑两种取球方式:

(1)作放回抽样,即每人取一只球,观察其颜色后再放回箱中;

(2)作不放回抽样,即每人取一只球,观察其颜色后不再放回箱中.

求第 i $(i=1,2,\cdots,k)$ 个人取到白球(记为事件 A)的概率(设 $k\leqslant a+b$).

解 本题是古典概型.

(1)放回抽样的情况,每个人在取球时箱中均有 a 只白球,b 只红球,故第 i $(i=1,2,\cdots,k)$ 个人取到白球的概率均为 $\frac{a}{a+b}$,即

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

(2)不放回抽样的情况,k 个人各取一球,每种取法是一个基本事件. 第 1 个人有 $a+b$

种取法，第2个人有 $a+b-1$ 种取法，…，第 k 个人有 $a+b-(k-1)$ 种取法，由乘法原理知总共有 $(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)=C_{a+b}^{k}$ 种取法，即基本事件总数 $N(S)=C_{a+b}^{k}$，事件 A 发生时，第 i 个人取的是白球，它可以是 a 只白球中的任一只，有 a 种取法. 其余被取的 $k-1$ 只球可以是其余 $a+b-1$ 只球中的任意 $k-1$ 只，共有 C_{a+b-1}^{k-1} 种取法，于是事件 A 包含的基本事件的总数为 $a\cdot C_{a+b-1}^{k-1}$，由古典概率模型计算公式得

$$P(A)=\frac{a\cdot C_{a+b-1}^{k-1}}{C_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}.$$

从计算的结果可以看出，尽管取球的先后顺序不同，每个人取到白球的概率是一样的，大家机会均等；而且放回抽样和不放回抽样取到白球的概率也是一样的. 例如购买福利彩票时，尽管购买的先后顺序不同，但每个人中奖的机会是一样的.

例1.9 某城市有 N 部卡车，车牌从1到 N. 有一个外地人到该城市去，把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号). 试求抄到的最大号码正好是 k 的概率($1\leqslant k\leqslant N$).

解 此问题可看成是对 N 个车牌号进行 n 次放回抽样，样本空间包含的样本点的总数为 N^n，而最大号码正好是 k 的取法可用最大号码不大于 k 的抽样总数减去最大号码不大于 $k-1$ 的抽样总数得到.

事件 A 表示"抄到的号码正好是 k"，事件 A_k 表示"n 次放回抽样中抽到的号码不大于 k" ($k=1,2,\cdots,N$). 当事件 A_k 发生时，事件 A_k 包含的样本点总数为 k^n ($k=1,2,\cdots,N$)，故事件 A_{k-1} 发生时，事件 A_{k-1} 包含的样本点总数为 $(k-1)^n$，因此所求概率为

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

例1.10 购买某种彩票需要从01，02，…，32这32个数字中选择7个下注，如果选中的数字与当期彩票开奖时由摇奖机开出的7个数字相同(顺序可以不同)，则中一等奖，求某人购买了一注彩票而中一等奖的概率.

解 事件 A 表示"某人购买了一注彩票而中一等奖"，可知该样本空间包含的基本事件的总数为 C_{32}^{7}，事件 A 包含的基本事件的总数为 $C_7^7=1$，由古典概型计算公式，所求的概率为

$$P(A)=\frac{1}{C_{32}^{7}}=0.000\,000\,297.$$

购买了一注彩票而中一等奖的概率是非常小的，约为千万分之三，像这样概率很小的事件称为小概率事件. 小概率事件在一次试验中几乎是不会发生的. 这一原理称为小概率原理，它在统计学中有重要应用.

1.2.3 几何概型

上述古典概率的计算，只适用于具有等可能性的有限样本空间，若试验结果无穷多，它显然不适用. 为了克服古典概型的局限性，可将其加以推广.

设试验具有以下特点：

(1)样本空间 S 是一个几何区域，这个区域的大小可以度量(如长度、面积、体积等)，并把 S 的度量记为 $D(S)$；

(2)向区域 S 内任意投掷一个点，落在区域内任意一点处都是"等可能的"，或者设落在

S 中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $D(A)$ 成正比,与 A 的位置和形状无关.

用事件 A 表示"投掷点落在区域 A 内",那么事件 A 的概率可用下列公式计算:

$$P(A)=\frac{D(A)}{D(S)},$$

称之为**几何概率**.

例 1.11 两人相约在某天上午 10:00—11:00 在预定地方见面,先到者要等候 20 分钟,过时则离去,如果两人在该天上午 10:00—11:00 内任一时刻到达是等可能的,求约会的两人会见到面的概率.

解 设 x,y 为两人到达预定地点的时刻,那么两人到达时间的一切可能的结果落在边长为 60 的正方形内,这个正方形就是样本空间 S,而两人会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 20$,即 $x-y\leqslant 20$ 且 $y-x\leqslant 20$.

用事件 A 表示"两人会见到面",其区域如图 1-7 中的 A,则

$$P(A)=\frac{D(A)}{D(S)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

例 1.12 在一张印有方格的纸上投入一枚直径为 1 的硬币. 试问方格的边长 a 要多大才能使硬币与边线不相交的概率小于 1%?

解 由于投掷的等可能性,只需要考虑硬币投入一个方格的情形,如图 1-8 所示,样本空间 S 对应于面积为 a^2 的区域,若硬币与边线不相交,则硬币中心应落入面积为 $(a-1)^2$ 的中心阴影区域内,故

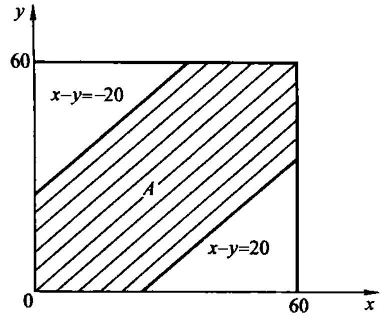


图 1-7

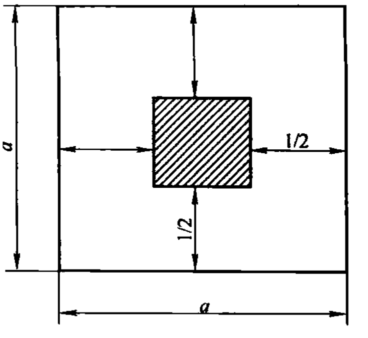


图 1-8

$$P\{\text{硬币与边线不相交}\}=\frac{(a-1)^2}{a^2}<0.01,$$

于是有

$$a<10/9.$$

1.3 条件概率

1.3.1 条件概率

在实际应用中,常常会遇到这样的问题:在已知事件 B 已经发生的条件下,求另一事件 A 发生的概率,如下面的例子.

例 1.13 某班有 30 名学生，其中 20 名男生，10 名女生，身高 1.70 米以上的有 15 名，其中有 12 名男生，3 名女生.

(1) 任选一名学生，问该学生的身高在 1.70 米以上的概率是多少？

(2) 任选一名学生，选出来后发现是个男生，问该学生的身高在 1.70 米以上的概率是多少？

解 容易知道，问题(1)的答案是$\frac{15}{30}=0.5$. 而对于问题(2)，由于是在任选一名学生后，"发现是男生"（记为事件 B）已经发生的条件下，推求"该学生的身高在 1.70 米以上"（记为事件 A）发生的概率. 因此，这时是在 20 名男生中考察"该学生的身高在 1.70 米以上"这一事件发生的概率，显然这一概率应为$\frac{12}{20}=0.6$，这种概率就称为在事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)$.

注意到 $P(B)=\frac{20}{30}$，$P(AB)=\frac{12}{30}$，从而有

$$P(A|B)=\frac{12}{20}=\frac{12/30}{20/30}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由此得到条件概率的一般定义如下.

定义 1.2 设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

条件概率 $P(A|B)$ 也具有概率的一切性质.

(1) 非负性：$P(A|B)\geqslant 0$.

(2) 规范性：$P(S|B)=1$.

(3) 可列可加性：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i \mid B\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i \mid B).$$

(4) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

(5) 一般加法公式：

$$P(A\cup C|B)=P(A|B)+P(C|B)-P(AC|B).$$

例 1.14 设某种动物活 20 年以上的概率为 0.8，活 25 年以上的概率为 0.4. 如果现在有一只已活 20 年的这种动物，它能活 25 年以上的概率是多少？

解 用事件 B 表示"能活 20 年以上"，事件 A 表示"能活 25 年以上". 由题意可知，$P(B)=0.8$，由于 $A\subset B$，因此

$$P(AB)=P(A)=0.4.$$

由条件概率定义得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

例 1.15 甲乙两个人，每人手中各有 6 张卡片，上面分别写有 1,2,3,4,5,6. 现从两人手中各取一张卡片（取到任何一张卡片是等可能的）.

(1)试求两张卡片数字之和等于6的概率.

(2)如果已知从甲手中取出的卡片上的数字为偶数,问两张卡片数字之和为6的概率是多少?

解 事件A表示"两张卡片数字之和等于6",事件B表示"甲手中取出的卡片上的数字为偶数",由于甲乙两人手中各有6张卡片,故从甲手中可抽得1,2,3,4,5,6张卡片中任一张,共有6种选择,从乙手中抽取亦为6种,总抽取方式有36种,试验的样本空间S可表示为

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\end{Bmatrix}.$$

则当事件A发生时,当且仅当样本点(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)发生,故有

(1)$P(A)=\dfrac{5}{36}$;

(2)当事件B发生时,取法总数为18种,故

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/18}{1/2}=\frac{1}{9}.$$

1.3.2 乘法公式

由条件概率的定义可以推得下面概率的乘法公式:

(1)当$P(A)>0$时,有$P(AB)=P(A)P(B|A)$;

(2)当$P(B)>0$时,有$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

利用这两个公式可以计算积事件的概率.

乘法公式还能推广到有限个事件的积事件的情形.下面给出A_1,A_2,A_3三个事件的积事件的乘法公式,设$P(A_1A_2)>0$,则有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

由假设$P(A_1A_2)>0$,而$A_1\supset A_1A_2$,故$P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)>0$,因此上式中的条件概率是有意义的.

例1.16 设某地区位于甲乙两河流下游某汇合点附近,当任一条河流泛滥时,该地区即会被淹没,设在雨季时期,河流甲泛滥的概率为0.2,河流乙泛滥的概率为0.18,又当河流甲泛滥时,引起河流乙泛滥的概率为0.25,求此期间内该地区被淹没的概率.

解 用事件A和B分别表示河流甲和乙泛滥,则该地区被淹没的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)=0.2+0.18-0.2\times0.25=0.33.\end{aligned}$$

1.3.3 全概率公式

为了计算复杂事件的概率,往往需要把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事

件的和,通过分别计算简单事件的概率,来求得复杂事件的概率.

定义 1.3 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一组事件,若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = S$, $B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个**完备事件组**或 S 的一个**分割**.

定理 1.1 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个完备事件组,且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对任意事件 A,有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\mid B_i).$$

此公式称为**全概率公式**.

证 因为

$$A=AS=A\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n,$$

且由 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$,有

$$(AB_i)\cap(AB_j)=\varnothing,i\neq j\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

故

$$\begin{aligned}P(A) &= P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)\\ &= P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).\end{aligned}$$

1.3.4 贝叶斯公式

定理 1.2 若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一个完备事件组,且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,A 是一个事件,$P(A)>0$,则有

$$P(B_k\mid A) = \frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

上式称为**贝叶斯(Bayes)公式**,由条件概率的定义及全概率公式即可得. 贝叶斯公式是综合了先前的经验(先验概率)以及在试验所提供的新的信息的基础上,对事件发生的可能性进行推断,根据这种思想建立起来的统计分析方法,称为贝叶斯方法.

例 1.17 某学生做选择题,假定他会做该题的概率为 0.5,如该选择题有 4 个答案且只有一个正确. 如果他不会做该题时任选一个答案,(1)求他答对该题的概率;(2)若他答对了该题,求他确实会做该题的概率.

解 用 A 表示"他答对了该题",B 表示"他会做该题",则 $B,\overline{B}$ 是样本空间的一个完备事件组,于是

$$P(B)=\frac{1}{2},\quad P(\overline{B})=\frac{1}{2},\quad P(A\mid B)=1,\quad P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{4}.$$

(1)由全概率公式可得

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

(2)由贝叶斯公式可得