

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

代数学思想史 的 文化解读

从结绳记事到无穷集合

郭龙先 著

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

代数学思想史的 文化解读

从 结 绳 记 事 到 无 穷 集 合

郭龙先 著



上海三联书店

图书在版编目(CIP)数据

代数学思想史的文化解读:从结绳记事到无穷集合/郭龙先
著. —上海:上海三联书店,2011.5
ISBN 978-7-5426-3540-2

I. ①代… II. ①郭… III. ①数学史 IV. ①011

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 056431 号

代数学思想史的文化解读:从结绳记事到无穷集合

著 者 / 郭龙先

责任编辑 / 张大伟

装帧设计 / 鲁继德

监 制 / 任中伟

责任校对 / 喻 萍

出版发行 / 上海三联书店

(200031)中国上海市乌鲁木齐南路396弄10号

印 刷 / 上海肖华印务有限公司

版 次 / 2011年5月第1版

印 次 / 2011年5月第1次印刷

开 本 / 787×1092 1/16

字 数 / 380千字

印 张 / 21

书 号 / ISBN 978-7-5426-3540-2/C·389

定 价 / 48.00元

序言：文化视野中的代数学思想史

多算胜，少算不胜，而况于无算乎？

——孙武

五方万国、风气万千，至于算数，无弗同者。

——徐光启

时至今日，数学已不再被认为是一门自然科学，而是联系自然与人文社会的横断学科。其实，纵观历史我们将发现，无论是人文学者，还是自然科学家，很早就围绕着“数”的概念及应用，展开过内容丰富的交流与争论。例如一百年前，德国学者斯宾格勒（Oswald Spengler，1880—1936年）在其所著《西方的没落》（1912年定名，1918年初版）一书中，即认为数学在人类心灵的创造活动中具有非常特殊的地位，他以数学为例说明“在外在世界的图像中，灵魂如何寻求实现自己的途径”时写道：

数学从一个原始的泉源中，迸跃而出，而此源泉尚有许多的出口。歌德式的教堂和多力克的神庙，便是以石头表现的数学。无疑的，毕达哥拉斯是文典文化，第一个以科学方法，把数字作为一切“可理解的事物的世界秩序”之统驭原则人物的人……但是在他之前，我们已可以在希腊雕像的严格和多力克廊柱的排列中，发现到一种高贵的物体陈列顺序，充分表达了希腊数学的精神。^①

斯宾格勒强调数学是指一切借形象而思考的能力，不可与狭义的科学性数学相混淆。他说：“一个文化，其所具有的数学景观和思想，若以其写录下来的数

① [德]奥·斯宾格勒. 西方的没落. 陈晓林译. 哈尔滨：黑龙江教育出版社，1988年，第55页.

学作代表,每不恰当,正如一个文化的哲学景观和思想每被其哲学论文所误表一样。”美国著名数学史家 M. 克莱因也曾从不同的角度对数学作过诸多的描述:

数学是一个知识体系,一种实际工具,哲学的一块基石,完美的逻辑方法,理解自然的钥匙,真实的自然,一种智力游戏,理性的冒险,美感的经验。^①

在人类文化史上,数不仅仅具有计算功能,同时还具有更广泛的文化意义。史前时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族或多或少掌握了一些简单的数学技术,包括记数、计算、测量、绘图、建筑等,基本上是源于生产经验的实用技术,而且内容也是大同小异,但就是对这些零散知识背后的非数学功能的认识与反思却表现出了明显的差异。班固《汉书·历律志》说:

数者,一、十、百、千、万也,所以算数事物,顺性命之理也。书曰“先其算命”。本起于黄钟之数,始于一而三之……。职在太史,羲和掌之。

班固认为数学具有“算数事物”和“顺性命之理”两大功能。明朝学者徐光启(1562—1633 年)曾愤然批评“数有神理”是胡说八道的“妖妄之术”。其实,西方数学也是从“数有神理”的神秘主义发展成为宗教理性,再到自然哲学,最终在理性精神与实验方法的引导下才创立了宏伟的现代科学技术体系。对此,艾伦·G. 狄博斯在《文艺复兴时期的人与自然》一书中,这样写道:

正是在开普勒身上,我们看到了文艺复兴时期在科学上自相矛盾人物的最好例子——这位杰出的数学家,他的灵感来源于对宇宙的神秘和谐的信仰。尽管这种神秘主义与数学的丰富多彩的混合离近代科学相去甚远,但它却构成了近代科学诞生的必不可少的因素。^②

中国古代数学被称为算学,虽然从一个侧面反映出了它的技术特征——操作的、技巧的、实用的,但如果认为对数的认知仅仅是出于记数和计算的需要,则是片面和错误的。人们认知数的种种努力,可能起源于实用上的需要,也可能起

① [美]M. 克莱因. 西方文化中的数学. 张祖贵译. 上海:复旦大学出版社,2004 年,第 470 页.

② [美]艾伦·G. 狄博斯. 文艺复兴时期的人与自然. 周雁翎译. 上海:复旦大学出版社,2000 年,第 118 页.

源于好奇以及对美好事物的追求，甚至是出于对希望的祈求和对恐惧的回避。同样是“算术”，在古代就有许多人对“数”在数学科学中的性质、功用漠不关心，而对“数”在星象、命理、占卜等方术中的意义和作用却津津乐道，并且不厌其烦地将数的种种神秘性与阴阳、五行、八卦、九宫等百般比附。南宋理学家蔡沈在《洪范皇极·序》中写道：

数始于一，一者为奇；象成于二，二为偶，故二四而八，八者八卦之象也；一而三，三而九，九者九畴之数也。由是重之，八而六十四，六十四而四千九十六，而象备矣。九而八十一，八十一而六千五百六十一，而数周矣。

从先秦至清末，数千年间，这种以“数”来臆测宇宙人生的兴趣丝毫也没有减弱。数的非计算功能并不是中国古代所特有的现象，而是一种世界性的文化现象，只不过在不同的文化系统中有不同的具体表现罢了。毕达哥拉斯坚信“万物皆数”；柏拉图用五种正多面体构造世界；亚里士多德坚信匀速圆周运动才符合天体的本性；开普勒信奉上帝是按数学规律设计宇宙的，等等。波克纳说西方“数学”一词来自希腊语，他写道：

它意味着某种“已学会或被理解的东西”或“已获得的知识”，甚至意味着“可获得的东西”、“可学会的东西”，即“通过学习可获得的知识”……“数学”一词从表示一般的知识到专门表示数学专业，经历了一个较长的过程；仅在亚里士多德时代，而不是在柏拉图时代，这一过程才完成。数学名称的专有化不仅在于其意义深远，而在于当时古希腊只有“诗歌”一词的专有化才能与数学名称的专有化相媲美。“诗歌”原来的意思是“已经制造或完成的某些东西”，“诗歌”一词的专有化在柏拉图时代就完成了。^①

古希腊人称数学为“一般知识”这一事实，波克纳认为可以有两种解释：一种是，数学本身优于其他知识领域；而另一种是，作为一般知识性的学科，数学在修辞学、辩证法、语法和伦理学等等之前就结构完整了，数学的优越性是无可比拟的。英国科学家霍格本说：

数学是文明的镜子，它的历史和人类的一般文化、人类的文明、人类的

① [美]塞路蒙·波克纳. 数学在科学起源中的作用. 李家良译. 长沙: 湖南教育出版社, 1992年, 第14—16页.

经济状态、人类的宗教信仰密切相关——历史地粗略论述，可以暂且停止在牛顿去世时所达到的阶段。从那时以来所发生的事情，主要是填补空白和改进已创造的方法。一种新种类数学的迹象已在多处出现。我们在社会统计学和原子研究中看到了它的线索，我们开始看到出现一种超越我们现在已使用的、新的量值语言的可能性，就像度量运动的微积分学把一切已经创造的统统纳入其自身一样。^①

数学作为一种文化，其表现形式无疑具有民族性、传统性等特征。例如，现在世界各民族仍在使用的记数符号就有罗马数字、中国的大小写数字以及天干地支、希腊字母、阿拉伯数字等；西方有用英文字母记数的习惯，中国则有用《千字文》编号的传统（所谓“天字一号”的说法，就是以《千字文》句首“天地玄黄，宇宙洪荒”依次编号的）；进位制则有二进制、五进制、十进制、十二进制、六十进制等多种形式；计算方法则有指算、筹算、珠算、笔算等不同的地域差异和民族特色。尤其是各种计量制度的确立与换算，更是社会生活中广泛使用的基本数量关系，并由此产生了形式最为多样和丰富的各民族度量衡系统。《孙子兵法·计篇》所言：“夫未战而庙算胜者，得算多也；未战而庙算不胜者，得算少也。多算胜，少算不胜，而况于无算乎？吾以此观之，胜负见矣。”其中就包含了敌我双方兵员、马匹、钱粮、辎重的度量、计算与对比。明代数学家周述学（生卒不详）即主张数学源于度、量、衡的实际需要，提出了“名数御量”的看法：

夫物之不齐，物之情也。故其形体有长有短，有广有狭，有多有寡，有轻有重，是以立法、名数以御之。度之以弓尺，而长、短、广、狭明；量之以斗斛，而多寡审；权之以斤秤，而轻重晰。此度、量、衡三法为数之纲也。^②

时下流行将数学看作一种“文化”，虽然内容丰富多彩，说法五花八门，但颇有脱离数学本质而罗列现象的危险。因为数学真理具有逻辑的必然性，无论东方还是西方，一加一都等于二。梅文鼎（1633—1721年）说得好，“法有可采何论东西？”徐光启也认为“算数，无异同者”，他说：“数之原其与生人具来乎？始于一，终于十，十指象之，屈而计诸，不可胜用也。五方万国、风气万千，至于算数，无弗同者；

① 兰斯洛特·霍格本. 数学——文明的镜子. 王铁生译. 见：罗伯特·哈钦斯，莫蒂默·艾德勒主编. 西方名著入门·第8卷数学. 北京：商务印书馆，1995年，第27—28页。

② 转引自金福. 对明代数学思想的几点分析. 李迪主编. 数学史研究文集第一辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990年，第95页。

十指之贻存,无弗同耳。”西方学者则强调数学作为一种逻辑严密的理性科学,具有一种放之四海而皆准的普适性。汤姆斯·雷德(Thomas Reid)指出:

数学系统一旦在少数公理和原始定义的基础上完美地建立起来,则就构成了一个坚如磐石那样的基础。然后年复一年地发展和成长,最终形成一种能为人类理性所引以为自豪的坚固结构。^①

其实,中国古代哲学中也有“物同理同,人同此心,心同此理”的观念。所谓“东海西海心理攸同”,用宋朝理学家陆象山的话说就是:

东海有圣人出焉,此心同也,此理同也;西海有圣人出焉,此心同也,此理同也;……千百世之上有圣人出焉,此心同也,此理同也;千百世之下有圣人出焉,此心同也,此理同也。

遗憾的是徐光启对数学文化功能的认识,尤其是他主张积极引入西方数学的思想,不仅未被同时代的人所认同,甚至今天都还不时遭到一些人的痛骂,说他过分崇拜西方数学而贬斥中国传统数学是“数典忘祖”。事实上,徐光启时代的中国数学已经陷入衰退与停滞的可悲境地,无论是学术成果还是研究水平都远远落后于西方,这是众所周知、无可争辩的史实。反之,由清代学者梅文鼎、王锡阐所倡导的“西学中源”论,虽然客观上也为学习西方科学技术起到了一定的作用,但正如古人所云:“求其上,得其中;求其中,得其下,求其下,必败”。嘉庆皇帝(1760—1820年)曾下诏说:“我大清亿万万年颁朔之法,必当问之于欧罗巴乎?此必不然也!精算之士当知所自重矣。”^②这种以夜郎自大的“天朝上国”心态和莫名其妙的“自重”情绪,“辞严义正”而又堂而皇之地关闭了与世界数学交流的大门,结果当然只能是“往事不堪回首”了!

徐光启主张数学无国界,早在四百年前就提倡努力学习西方科学技术,将中国数学融于世界潮流之中,其深远的目光不仅超越他的时代,而且这种冷静的思考与开放的胸襟至今仍需积极发扬光大。数学家齐民友更是一针见血地指出:“没有现代的数学就不会有现代的文化,没有现代数学的文化是注定要衰落的。”^③因此,我们认为透过纷繁的表面形式,所谓“数学文化”,其核心仍

① [美]莫里兹.数学的本性.朱剑英译.大连:大连理工大学出版社,2008年,第24页.

② 转引自:张祖贵.数学与人类文化发展.广州:广东教育出版社,1995年,第99页.

③ 齐民友.数学与文化.长沙:湖南教育出版社,1991年,第13页.

是数学的思想与方法。正如 M. 克莱因所言：“作为理性精神的化身，数学已经渗透到了以前由权威、习惯、风俗所统治的领域，而且取代它们成为思想和行动的指南。”他说：“数学学科并不是一系列的技巧，这些技巧只不过是它微不足道的方面：它们远不能代表数学，就如同调配颜色远不能当作绘画一样。”要对数学的精神实质有较彻底的把握与领会，就必须暂时忽略那些复杂的细节，深入到其深层的思想之中，知道它的目的和用处，明白数学中各种创新思想的动机，以及这些概念和结构的创生背景。日本数学教育家米山国藏认为，思想和方法是数学创造与发展的源泉，是数学教育目的的集中表现。数学的知识可以记忆一时，但数学精神、思想与方法却永远发挥作用，使人终身受益。斯宾格勒说：

数学是一种真正的艺术，足可与雕刻及音乐并驾齐驱，因为他需要灵感的诱导，而且，是在伟大的传统之下发展起来的；最终说来，数学，是最高境界的形上思考，就如同柏拉图，尤其是莱布尼兹所表现的一样。迄今为止，每一种哲学，皆伴随有一种属于此哲学的数学，而共同发展。^①

他认为当我们处理某种伟大艺术的发展时，必须也要注意一下同时代的数学，这是有百利而无一弊的。对此，M. 克莱因也说“艺术必须为人类创造性的行动提供表现的机会”。他写道：

回顾数系系统的产生过程，技术的发展，由于艺术、科学和哲学方面的问题而产生的新分支及其发展，以及建立在精密的逻辑基础上的理论的不完善，这一切都说明，数学家们也在进行创作。^②

在代数学的发展过程中，数系的扩张贯穿始终。人类获得了数的概念之后，又相继发明了屈指运算、结绳计数、刻痕记事等认识事物数量的基本技巧和方法。随着生产及数学本身的发展，分数、无理数、负数、零、虚数、复数、超复数（四元数、八元数）等种种新数不断应运而生。从远古结绳记事到 19 世纪末无穷集合论的建立，其间经历了数百代人、上万年的探索与奋斗。

数学家花了两千年时间才理解无理数；花了约一千年才理解负数和零；花了三百年才理解复数。在筚路蓝缕的艰难求索中，数系的王国虽曾笼罩过理性的

① [德]奥·斯宾格勒. 西方的没落. 陈晓林译. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1988 年, 第 53 页.

② [美]M. 克莱因. 西方文化中的数学. 张祖贵译. 上海: 复旦大学出版社, 2004 年, 第 466 页.

迷雾,但人类思想的智慧之光终将照彻寰宇。美国数学家丹齐克在评价计数对人类文明的巨大贡献时说:“正是由于有了计数,我们赢得了用数来表达我们宇宙的惊人成就。”

斯宾格勒认为西方音乐理论的变迁和数学上对无穷所作的分析关系良深。的确,无穷比其它任何概念都激动着人们的感情,震撼着人类的心灵。毕达哥拉斯学派关于不可公度量的发现;德谟克利特和柏拉图探索过的无穷小量;欧多克斯、安提丰、阿基米德所运用的穷竭法,开启了数学极限理论的先河。希帕索斯的无理数悖论、贝克莱的无穷小悖论、罗素的集合悖论,导致了所谓的“三次数学危机”。就其实质而言,都是因无限性问题而引发的(无限不循环量、无穷小量和无穷大量)。数千年来,无穷始终刺激着人类永不枯竭的想象力。著名数学家外尔认为数学就是关于无穷的科学!

当数学既作为一种技术手段,又作为一种认识方式发展时,就会因社会需求、传统文化和思维特征的差异,表现出不同的侧重点和演变方式,从而形成不同的数学体系和思想方法。例如,古希腊数学对理性的推崇以及严密逻辑证明的强调,与古代东方数学中注重实用、偏向于计算法则的程序化思想,就具有各自鲜明的特色。数学与人类文化始终血脉相连,透过文化能够更好地感悟数学的魅力,理解数学,才能更好地认识文化。正如 M. 克莱因所言:“在人类文明中,数学如果脱离了其丰富的文化基础,就会被简化成一系列的技巧,它的形象也就完全被歪曲了”,他认为,“技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物”。

现代数学教育所存在的问题之一,就是高度浓缩而又“正确无误”的教科书早已割断了数学与历史、数学与文化的血肉联系。这种隐去了数学丰富生动的人文起源内情,而将其当作一种抽象的纯理论知识的弊病,可谓由来已久。著名数学家柯朗在《数学是什么》一书的序言中早已指出:

数学的教学,逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练,固然,这可以发展形式演算的能力,但却无助于对数学的真正理解,无助于提高思考的能力。数学的研究,有过度专门化和过度抽象化的倾向,忽视了应用以及与其他领域之间的联系。这种状况……必然激起强烈的反感。

就数学而言,人类祖先在原始文化上表现出了惊人的一致性,都经历了结绳或刻木记事的阶段;之后,又毫无例外地产生了数字崇拜及禁忌等神秘主义思想。随着社会的发展,在历经复杂的涨落与分异之后,世界文化的差异逐渐增大,形成了各具特色的民族文化。随着交流的加强,民族文化和科学文化又相互

融合,产生了更加绚丽多彩的现代科学文化。

本书从司空见惯的数字符号入手,以人类计数的产生为起点,以数系的扩张为主线,旁及人类文化学、哲学、逻辑、宗教神学、美学、自然科学、教育学诸多领域,深入阐述了数学的科学精神与文化内涵。重点讲述从有限到无限的超越这一人类文明史上的辉煌成就,展示了数学思想方法的精神实质。著者深知数学历史纷繁复杂,数学大师精妙的思想更是深奥难测,限于本人的学识与水平,书中错误与不足在所难免,还望读者诸君批评指正。

本书的写作与出版,得到昭通师范高等专科学校教授科研基金的资助,得到张毅敏副校长和科技处高云峰处长的关心与支持,在此深表谢意。

目 录

序言:文化视野中的代数学思想史	1
第 1 章 数学思想史的文化内涵	1
1.1 数学的诞生——点燃人类文明的圣火	1
1.2 思想的丰碑 科学的典范——公理方法及其影响	5
1.3 认识宇宙 认识人生——数学的科学追求与人文关怀	17
1.3.1 超然物外 永不休止——数学的探索精神	17
1.3.2 哪里有数学 哪里就有美——数学的艺术品味	20
1.3.3 真理的光芒 人格的感召——数学的品质与力量	25
1.3.4 泽被千秋 薪火相续——数学的创造与传承	29
第 2 章 计数——人类探索宇宙奥秘的起点	34
2.1 最古老的数据库——刻痕计数与结绳记事	37
2.2 最早的代数学公理——对应关系与顺序原则	40
2.3 追思自然——世界的本原及其数学设计	43
2.3.1 独具慧眼 别有洞天——万物之本与数学法则	45
2.3.2 天体的音乐——数量比例与宇宙和谐	50
2.3.3 物质实体与数学的关系——揭示自然秩序的锁钥	60
第 3 章 理性之光与心智的迷雾	
——数学文化中的神秘主义与科学精神	64
3.1 仰望苍穹——天道的发现与命数的幻象	65
3.2 数有神理——超凡的洞见与历史的歧途	75
3.3 数术穷天地——从神秘主义到理性科学	86
3.4 数学的魅力——凝视星空 神思天外	94

第4章 计算方法的革命——算术中的四大发明	100
4.1 中华民族的智慧——十进位值制	103
4.2 印度人的杰作——阿拉伯数字	109
4.3 斯蒂文的灵感——小数点问世	115
4.4 纳皮尔的贡献——对数的诞生	120
第5章 震撼人心的英雄史诗——数系扩张中的激情与睿智	131
5.1 无理数的发现——不可公度比与古希腊数学的转向	133
5.1.1 万物皆数——自然数构建数学的奠基之作	134
5.1.2 简单的推理 惊人的发现——不可公度线段的震撼效应	137
5.1.3 古希腊数学的皇冠——欧多克斯比例论的创意	141
5.2 负负得正——负数的烦恼	149
5.3 哥伦布的鸡蛋——无中生有的零	155
5.4 三百年的争论——虚数神秘性的破解	161
5.4.1 三次方程中的幽灵——负数开平方根的困境	161
5.4.2 烦恼的祸根——不可思议的虚数	168
5.4.3 灵光辉映 穿透迷雾——复数理论的建立	170
5.5 千古几何难题的终结——代数数与超越数的区分	174
5.6 一以贯之——数系扩张的固本原则	182
第6章 至大无外 至小无内——无穷的困惑与争论	187
6.1 循环之理,岂有穷乎——自然数引出的无限性问题	190
6.2 芝诺悖论——间断与连续的矛盾	199
6.3 一尺之棰,日取其半,万世不竭——无穷小的悖论	203
6.4 部分不小于整体——无穷大的悖论	208
6.5 无限性概念的发展——从哲学思辨到数学理论	215
6.6 实无限与潜无限——数学家的哲学分歧	224
第7章 数学天才最精美的产物——超越有限 把握无穷	230
7.1 逝去的鬼魂——无穷小方法与微积分基础之争	231
7.2 数学也疯狂——康托尔的无穷集合与超限数	235
7.2.1 高超的技巧——数清稠密的有理数	236
7.2.2 奇妙的构思——容量无限的希尔伯特旅馆	240
7.2.3 出乎意料的对应——把无穷的宇宙投影到一厘米线段上	243

7.2.4 令人崩溃的想象——无穷无尽的超限数	245
7.3 思维的怪圈——无穷集合的悖论与数学基础的危机	249
7.4 数学哲学的绝唱——无穷观与数学基础的争论	255
7.4.1 从逻辑中展开数学——逻辑主义学派的无限观和思想方法	256
7.4.2 存在就是被构造——直觉主义学派的无限观及思想方法	260
7.4.3 形式公理与兼容性——希尔伯特规划与形式主义学派	267
7.4.4 智者的棒喝——哥德尔不完备性定理对数学基础的冲击	272
第8章 永远值得夸耀的成就——无限的数学解析	275
8.1 千年磨一剑——极限概念的锤炼与完善	276
8.2 上帝是一位代数学学家——数学基础的算术化	285
8.3 连续与间断的统一——数轴的构造与实数的连续性	290
8.4 填补空隙——极限理论对无理数的解析	295
8.4.1 用区间套住无理数——魏尔斯特拉斯的实数论	296
8.4.2 连续的秘密在于把直线截断——戴德金的实数论	299
8.4.3 以有理数序列构建无理数——康托尔的实数论	300
8.4.4 殊途同归——公理实数论	303
8.5 无穷小作为一个数进入微积分——非标准实数论	305
结束语	311
参考文献	313

第 1 章

数学思想史的文化内涵

所以说数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

——普洛克拉斯

在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。

——M. 克莱因

哲人柏拉图(Plato, 约公元前 427—前 347 年)说：“没有数学就没有真正的智慧。”数学是一门古老而基础的学科，以其悠久的传统，精湛的思想，博大的内涵，广泛的应用，在人类文化中一直占有极其重要的地位。数学的发展反映了人们积极进取的意志，缜密周详的推理以及对完美境界的追求。在漫长的历史长河中，数学始终作为一种重要力量，推动着人类的社会进步与思想解放，其理性之光照亮了整个人类文明艰难曲折的发展历程。

1.1 数学的诞生——点燃人类文明的圣火

人类最古老的文明诞生在六千多年前的埃及和两河流域，数学可靠的源头就从这里开始。从此，数学与人类文明同生并存，共同发展。尽管当时还处在最初的积累时期，但数学的影响及在生活中的运用已是无所不在，如创制历法，开挖运河，修筑堤坝，丈量土地，测算体积，买卖商品，征收税款，兑换钱币，计算利息，划分遗产等都离不开数学。麦克莱恩曾列举人类 15 种活动，以说明数学的产生及其观念的起源。

活 动	观 念	概念表述
收集	集体	(元素的)集合
数数	下一个	后继、次序、序数
比较	计数	一一对应、基数
计算	数的结合	加法、乘法规则、阿贝尔群
重排	置换	双射、置换群
计时	先后	线性顺序
观察	对称	变换群
建筑赋形	图形、对称	点集
测量	距离、广度	度量空间
移动	变化	刚性运动、变换群、变化率
估计	逼近、附近	连续性、极限、拓扑空间
挑选	部分	子集、布尔代数
论证	证明	逻辑连词
选择	机会	概率(有利/全部)
继续行动	接续	结合、变换群

显然以上这些概念绝不是一起形成的,而且其中许多概念是经历极为曲折的过程才逐步得到的,如群与拓扑空间。^①

公元前 3000—公元前 2500 年古埃及人建造了大量的金字塔,其中最大的胡夫金字塔高为 146.5 米,底边宽 240 米,由 230 万块巨石堆叠而成。在 1889 年埃菲尔铁塔建成之前,四千多年来它一直是世界上最高的建筑。将其看作一个正四棱锥,底面正方形的误差及水平方向上的高差还不到万分之一。只有一些简单粗浅数学知识的古埃及人,却创造了如此浩大而精确的工程,难怪后人往往把它看作难以置信的人间奇迹,更有甚者认为这是外星人的杰作。其实,所谓“金字塔之谜”只不过是数学力量的一次历史见证罢了,人类智慧中数学的力量是无穷无尽而又令人印象深刻的。

据说,埃及的金字塔建成以后,两千多年中一直没有人能准确测出它们的高度,直到泰勒斯(Thales,约前 640—前 546 年)游历埃及时,才用一个无比巧妙简洁的办法当众解决了这一千古难题。他选择了一个特别的日子,该天的某个时

^① 转引自:胡作玄,邓明立. 20 世纪数学思想. 济南:山东教育出版社,1999 年,第 9—10 页。

刻太阳恰好从正东或正西或正南以 45° 角照射金字塔(两对边分别指向东西与南北),他在阳光下静静地站着,当其影子和身高相等时,让人测出金字塔的影长,得出了金字塔的高度(如果用相似三角形的比例原理则不受时间限制)。普鲁塔克(Plutach,约 46—119 年)记载说,泰勒斯的这一业绩使得埃及法老雅赫莫斯二世(公元前 570—前 526 年在位)兴奋异常。数学的伟大力量和神妙应用真是超乎常人的想象!它那化繁为简、化难为易的智慧,以及纯净的思想、简洁的方法,都有一种不可辩驳的说服力,总能给人们带来出乎意料之外,而又尽在情理之中的惊喜。

数学并非一开始就是一门理论科学,而是经验技术与抽象理论(正确或错误)相互混杂的知识体系。经过漫长而艰难的点滴积累,伴随着人类文明的不断进步,二千五百多年前,一大批古希腊天才的思想家以其无与伦比的创造力经过不懈的努力,终于使数学摆脱了源于经验、以实用为目的的限制,使古埃及和巴比伦零星简单的数学知识上升为一门有组织的独立的理性学科。泰勒斯因提出“水为万物之源”而被誉为西方第一个哲学家。同时,他也被认为是古希腊第一个对实验几何作出演绎证明的数学家,据说直径等分圆周的定理即为其所证。相传泰勒斯发现圆内接直角三角形定理之后,为答谢智慧之神对他的眷顾,还曾奉献一头牛作为祭礼。其后毕达哥拉斯(Pythagoras,前 572—前 497 年?)、柏拉图和亚里士多德(Aristotle,前 384—前 322 年)等哲人对数学也都极为重视。对此,塞路蒙·波克纳写道:

就性质和形式而言,古希腊数学是古希腊哲学的一部分,即,巴门尼德、柏拉图和亚里士多德哲学的一部分。因此古希腊数学忠实地反映了古希腊整个知识体系的一大方面。^①

在古希腊学者眼中数学具有最明显的哲学品质。事实上,哲学的概念就是由强调数学演绎证明的毕达哥拉斯首次提出的,“哲学家”意为“热爱智慧的人”。他认为只有通过理智才能把握真理,比起那些通过观察学到的知识,理性真理则更加重要和高贵。后来哲学因此而演变成为解释自然、认识宇宙的“智慧之学”。古希腊数学的哲学特性决定了它的思想内容和方法:演绎体系的设计——逻辑证明;宇宙运行的解释——几何作图;时空无限的思辨——无穷小分析。

逻辑学鼻祖亚里士多德认为数学是最精确的科学。对此,美国著名数学史家 M. 克莱因(Morris. Klein, 1908—1992 年)指出:“从亚里士多德的著作中,可

① [美]塞路蒙·波克纳. 数学在科学起源中的作用. 李家良译. 长沙:湖南教育出版社,1992 年,第2 页.