HIT

数学·统计学系列

Primary Theory of Equation

初级方程式论

[美] 迪克森 著　黄新铎 译

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

初级方程式论

Primary Theory of Equation

[美] 迪克森 著

黄新铎 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

全书共包括 10 章 115 节:第一章复数;第二章关于方程式根之基础定理;第三章用尺规作图法;第四章三次及四次方程式之解法,该方程式等之判别式;第五章一方程式之图形;第六章圈定实方程式之实根;第七章数目方程式之解法;第八章行列式,一次方程组;第九章对称函数;第十章消元法,消元所得式及判别式。书后配备了附录、答案及索引。

本书适合于高等院校师生及相关专业研究人员、数学奥林匹克竞赛选手和教练员以及数学爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

初级方程式论/(美)迪克森著;黄新铎译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5603-3218-5

Ⅰ.①初… Ⅱ.①迪… ②黄… Ⅲ.①方程-理论
Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 038420 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 11.75 字数 217 千字
版 次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3218-5
定 价 28.00 元

原序

方程式论者不仅为继续研究各门算学及其应用所需要，且继几何、代数、解析几何而予以阐明也.更有进者，本门对于多项式简要之情款其各种微积分之基本观念重新演述极为周详.故方程式论者无论继微积分之后而学习抑同时学习皆予微积分以有用之补充也.

本书为适合学者对于已习或将习各门算学之需要起见，关于编辑几经考虑慎出之.此书与拙著初等方程式论(*Elementary Theory of Equations*)一书取材不同，互有增减，盖以本书系为初级学者而作且可与微积分一门同时教授也.书内所用证法皆简明而周详，至所辑习题则简易而繁多，遍及各类，且其中复含有多数之实用问题.

本书对于各项初等论题予以明白之指示.例如，一学几何之聪颖生徒其会习平分一角之法者，必将问以凡角是否皆可以尺及规三等分之，如其不能则何为而不能.其于知做3,4,5,6,8及10边之正边形后则必以7及9边之正边形之阙如为问.使教师知悉此项事实且知此类问题之简单讨论，如第三章所述者，自可从容处之矣.至关于代数问题其他诸章会予以所需要之指示.特别如第五章所述圆形理论其科学的及实用的态度则非在代数及解析几何内所可能者也.

编内所述计算一方程式实根之方法,乃最省力而所得小数皆正确无疑.法先以霍纳方法求连续变换的方程式,至变换的次数则为所拟求之根其有效数字位数之半.而于变得之最后一方程式应用,从略去之二次及高次项所算出之修改数(Correction),于常数项将其化为一次方程式,再用省略除法演算则所拟求之根得矣.此法盖计算便捷而结果正确二者兼备之法也.

牛顿方法,系本图形的及数目的立场申述,有可应用于非代数的方程式之优点;该法对于各种非代数的方程式之应用编中演述至详.

至若定或圈定一方程式之实根兹可以合法做出之图形或笛卡儿、斯图姆,及布丹诸定理定之.而该定理等在通常则叙述证明两不正确也.

行列式一章与其前诸章并无关连.章内所述之一般的一次方程组之理论亦本方阵之立场而为论列也.

本书初稿经明尼苏达大学卜色教授,华盛顿大学罗艾渥教授,伊利诺大学肯蒲诺教授,芝加哥大学杨教授阅读后予以有价值之更正,著者深为感荷.再稿复经西北大学克蒂斯教授详加批阅予以改善.著者对威斯康星大学朱来斯登教授并致谢意,以其对于证法曾予以各种有用之更正也.

芝加哥

一九二一

目录

复　数

第一章

1. 平方根

设 p 为正实数，记号 $\sqrt{p}$ 乃用以表示 p 之正平方根. 该平方根极易以对数法计算之.

兹将负数之平方根以成立 $i^2=-1$ 关系之记号 i 表出之. 而以 $+i$ 及 $-i$ 表示 $x^2=-1$ 之根. 至 $x^2=-4$ 之根则书为 $\pm 2i$ 以代 $\pm\sqrt{-4}$. 于一般情形，设 p 为正数，则将 $x^2=-p$ 之根书为 $\pm\sqrt{p}\,i$ 以代 $\pm\sqrt{-p}$.

如是则各根之平方为 $(\sqrt{p})^2 i^2=-p$. 如于 $x^2=-p$ 之根用通常所罕用之记法 $\pm\sqrt{-p}$，则易使吾人于求其各根之平方时以根号内两值相乘而得谬误之结果：

$$\sqrt{-p}\sqrt{-p}=\sqrt{p^2}=+p$$

为免除斯种错误计兹用 $\sqrt{p}\,i$ 而不用 $\sqrt{-p}$.

2. 复　数

设 a 及 b 为任意二实数,而 $i^2=-1$,则 $a+bi$ 名为复数[①],而 $a-bi$ 为其配数[②]. 设 $a=b=0$ 则谓各数为零. 谓二复数 $a+bi$ 及 $c+di$ 相等者则设且必设 $a=c$ 及 $b=d$. 就特别情形言之,如 $a+bi=0$,则设且必设 $a=b=0$. 设 $b\neq 0$,则谓 $a+bi$ 为虚数. 于特别情形,bi 名为纯虚数.

复数加法之义定为

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

与加法相反之运算名为减法,即于

$$(c+di)+z=a+bi$$

求复数 z 之法也. z 之记法及值为

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

乘法之义定为

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

从而知其构成之方法与通常代数方法无异,惟用 $i^2=-1$ 之关系加以化简耳. 例如

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

除法之义则定为与乘法相反之运算,亦即于 $(a+bi)q=e+fi$ 求复数 q 之法也,以 $a-bi$ 乘各节[③]则得 q 之记法及值为

$$\frac{e+fi}{a+bi}=\frac{(e+fi)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{ae+bf}{a^2+b^2}+\frac{af-be}{a^2+b^2}i$$

因 $a^2+b^2=0$ 当 a 及 b 为实数时必须 $a=b=0$,从可断言除法除用零除外所得之商为可能的单一的.

习题 1

以复数表出:

1. $\sqrt{-9}$.

---

① 复数盖集成双实数而成. 欲详本此立场之论述以及以矢量为根据之论述,参看著者 L. E. Dickson 之"Elementary Theory of Equations," 第 21 页,第 18 页.

② $a+bi$ 与 $a-bi$ 目前称之为共轭复数,本书称之为二相配复数.

③ 本书等式中的节指从左至右以等号分割的式子.

2. $\sqrt{-4}$.

3. $(\sqrt{25}+\sqrt{-25})\sqrt{-16}$.

4. $-\frac{2}{3}$.

5. $8+2\sqrt{3}$.

6. $\frac{3+\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-1}}$.

7. $\frac{3+5i}{2-3i}$.

8. $\frac{a+bi}{a-bi}$.

9. 证明:二相配复数之和为实数,而其差为纯虚数.

10. 证明:二复数和之配数等于其配数之和. 如将内中和字易为差字其结果亦能成立乎?

11. 证明:二复数积(或商)之配数等于其配数之积(或商).

12. 证明:设二复数之积为零则二数中至少有一数为零.

13. 求适合次式之二实数 x,y:

$$(x+yi)^2=-7+24i$$

仿第 13 题,以复数表示次数之平方根:

14. $-11+60i$.

15. $5-12i$.

16. $4cd+(2c^2-2d^2)i$.

3. 一之立方根

任意复数 x 其立方等于一者名为一之立方根. 因

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

故 $x^3=1$ 之根为 1 及适合

$$x^2+x+1=0$$

$$(x+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$$

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

之二数. 是以一之立方根有三,即

1

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$\omega'=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

按 ω 之由来,则得重要之关系式

$$\omega^2+\omega+1=0,\omega^3=1$$

因 $\omega\omega'=1$ 及 $\omega^3=1$,故得 $\omega'=\omega^2,\omega=\omega'^2$.

4. 复数之几何图示法

用直角坐标轴 OX 及 OY,兹以坐标为 a,b 之点 A 示 $a+b\mathrm{i}$(图 1.1).

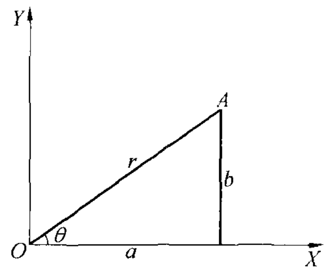

图 1.1

正数 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 示 OA 之长,名为 $a+b\mathrm{i}$ 之模数(或绝对值). $\angle\theta=XOA$,即从 OX 按反表针之方向量至 OA 之角度,名为 $a+b\mathrm{i}$ 之辐角,如是则 $\cos\theta=a/r,\sin\theta=b/r$,而

$$a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\qquad(1)$$

第二节名为 $a+b\mathrm{i}$ 之三角式.

至幅角 θ 则可以 $\theta\pm360°,\theta\pm720°$,等等,之任一角代之.

二复数相等设且必设其模数相等及其中一数之幅角等于他数之幅角.

例如,一之立方根为 1 及

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}=\cos120°+\mathrm{i}\sin120°$$

$$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}=\cos240°+\mathrm{i}\sin240°$$

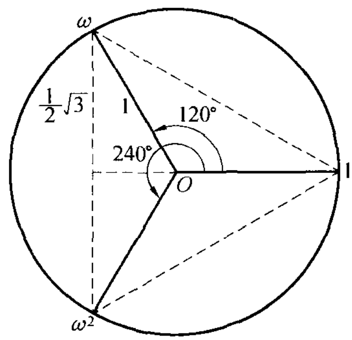

图 1.2

而可以用取 O 为圆心及以 1 为半径之圆.其内接等边三角形,如图 1.2 记为 $1,\omega,\omega^2$ 之角顶示之. ω 及 ω^2 之幅角各为 120° 及 240°,而其模数各为 1.

-3 之模数为 3,而其幅角为 180° 或 180° 加减 360° 与任何正整数之积.

5. 复数之积

按乘法及三角法

$$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)][r'(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]=$$
$$rr'[(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)+\mathrm{i}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)]=$$
$$rr'[\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\theta+\alpha)]$$

是以二复数乘积之模数等于其模数之积,而其积之幅角等于其幅角之和.

例如,$\omega=\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°$ 之平方其模数为1,而其幅角为 $120°+120°$,即 $\omega^2=\cos 240°+\mathrm{i}\sin 240°$. 再 ω 及 ω^2 之积其模数为1及其幅角为 $120°+240°$,亦即为 $\cos 360°+\mathrm{i}\sin 360°$,而可化为1. 此则与已知之结果 $\omega^3=1$ 适相契合也.

在前式内取 $r=r'=1$,则得一有用公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\theta+\alpha) \qquad (2)$$

6. 复数之商

于(2)内取 $\alpha=\beta-\theta$ 而将所得之方程式以 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 除之,则得

$$\frac{\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}=\cos(\beta-\theta)+\mathrm{i}\sin(\beta-\theta)$$

是以 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 除 $R(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$ 所得之商其幅角等于两幅角之差 $\beta-\theta$,而其模数等于原模数之商 R/r.

于 $\beta=0$ 时得一有用公式

$$\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$$

7. 棣莫佛定理

设 n 为任何正整数

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \qquad (3)$$

此式当 $n=1$ 时显然成立,而当 $n=2$ 时从公式(2)使 $\alpha=\theta$ 即得. 依算学归纳法为之,假定于 n 为 $1,2,\cdots,m$ 时皆成立. 则吾人能证明于 n 为其后之值 $m+1$ 时此式亦可成立. 盖按假设知

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^m=\cos m\theta+\mathrm{i}\sin m\theta$$

以 $\cos\theta + i\sin\theta$ 乘各节，而以从式(2) 使 $\alpha = m\theta$ 所得之值代其右节. 如是得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos m\theta + i\sin m\theta) = \cos(\theta + m\theta) + i\sin(\theta + m\theta)$$

证明(3) 于 $n = m + 1$ 时成立. 如是则归纳证法完成，而本定理证明矣.

例如第 5 节末原例之结果：

$$(\cos 120° + i\sin 120°)^2 = \cos 240° + i\sin 240°$$

$$(\cos 120° + i\sin 120°)^3 = \cos 360° + i\sin 360°$$

8. 立方根

拟求一复数之立方根，先将原数以三角式表出之. 例如

$$4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 8(\cos 45° + i\sin 45°)$$

设原数有一复数之立方根，而该根可以三角式

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4}$$

表出之. 由式(3) 知此根之立方必等于原数，而

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos 45° + i\sin 45°)$$

模数 r^3 与 8 必相等，而正实数 r 等于 2. 再，3θ 与 45° 有相等之余弦及相等之正弦，从而知二者相差为 360° 之整倍数. 是以 $3\theta = 45° + k \cdot 360°$ 或 $\theta = 15° + k \cdot 120°$，而 k 为一整数①. 以所得 θ 之值及 r 之值 2 代于(4) 内，则得所求之立方根. 因 k 之为 0,1,2 而得不同之结果

$$R_1 = 2(\cos 15° + i\sin 15°)$$

$$R_2 = 2(\cos 135° + i\sin 135°)$$

$$R_3 = 2(\cos 255° + i\sin 255°)$$

如 k 为其他新整数值，则又得与 R_1，R_2 或 R_3 相等之结果. 实际上，从 $k = 3$，则得 R_1，从 $k = 4$ 则得 R_2，从 $k = 5$ 则得 R_3，从 $k = 6$ 则又得 R_1，如是循环不已.

习题 2

1. 验证 $R_2 = \omega R_1$，$R_3 = \omega^2 R_1$. 用棣莫佛定理求 R_1 之立方以验证 R_1 为 $8(\cos 45° + i\sin 45°)$ 之立方根. 至 R_2 及 R_3 诸新式显然亦系其立方根何故？

2. 求 -27，$-i$，ω 三数之三个立方根.

3. 求 i，$-i$，ω 三数之两个平方根.

---

① 此处，以及其他各处之未经特别限制者，零与负数以及正数皆包括于名词[整数]之内.

4. 证明:数 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 而此外无他数为圆心在原点而半径为一之圆其上之点所示.

5. 设 $a+bi$ 及 $c+di$ 为三图 1.3 内 A 及 C 两点所示,证明其和必为二边为 OA 及 OC 之平行四边形之第四角顶 S 所示. 依此说明二复数和之模数等于或小于其模数之和,而等于或大于其模数之差.

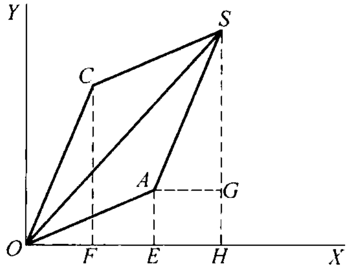

图 1.3

6. 令 r 及 r' 为图 1.4 中 A 及 C 两点所示二复数之模数,而 θ 及 α 为其幅角. 令 U 为距原点右一单位而在 x 轴上之点. 作 $\triangle OCP$ 与 $\triangle OUA$ 相似且位置相当,因之 OC 与 OU,CP 与 UA,OP 与 OA 为相当边而 O,C,P 诸角顶与 O,U,A 诸相当角顶秩序相同(顺时针方向或反时针方向). 证明:P 示 A 及 C 所示二复数之积(第 5 节).

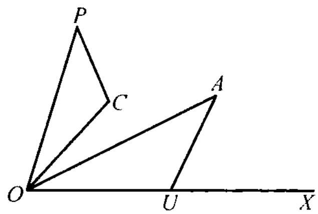

图 1.4

7. 设图1.3 内 A 及 S 两点示 $a+bi$ 及 $e+fi$,证明:C 表示从 $e+fi$ 减 $a+bi$ 所得之复数. 依此更说明二复数其差之绝对值等于或小于其绝对值之和,而等于或大于其绝对值之差.

8. 将第 6 题加以整理,而说明二复数商之几何做法.

9. n 次方根

据第 8 节所论以规则任意复数 $\rho(\cos A+\mathrm{i}\sin A)$ 之 n 次方根显系 $\cos A+\mathrm{i}\sin A$ 之 n 次方根乘以正实数 ρ 之正实 n 次方根(可用对数法求得).

令 $\cos A+\mathrm{i}\sin A$ 之一 n 次方根如式

$$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{4}$$

则按棣莫佛定理得

$$r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\cos A+\mathrm{i}\sin A$$

模数 r^n 及 1 必相等,因而正实数 r 等于 1. 因 $n\theta$ 及 A 有相等之正弦及余弦,故其差为 360° 之整倍数,即 $n\theta=A+k\cdot 360°$,而 k 为一整数. 代所得 θ 之值及 r 之值 1 余(4) 内,则得

$$\cos\left(\frac{A+k\cdot 360°}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{A+k\cdot 360°}{n}\right) \tag{5}$$

凡取 k 为一整数则得(5) 为一答数,盖,按棣莫佛定理,(5) 之 n 次乘幂可化为 $\cos A+\mathrm{i}\sin A$ 故也. 其次,k 为 n 时所得之答数与 k 为0时相同;k 为 $n+1$ 时所得之答数与 k 为1时相同;而在一般情形 k 之值为 $n+m$ 时所得之值与 k 为 m 时相同. 是以吾人所论只限于 k 之值为 $0,1,\cdots,n-1$. 而于 k 之值为 $0,1,\cdots,n-1$ 时答数(5) 所予之值完全不同,因诸答数为距原点为模数 1 且其幅角为

$$\frac{A}{n},\frac{A}{n}+\frac{360^\circ}{n},\frac{A}{n}+\frac{2\cdot 360^\circ}{n},\cdots,\frac{A}{n}+\frac{(n-1)360^\circ}{n}$$

之点所示,故此 n 个点为在半径为 1 之圆周上等距之点. 其特别情款于第 10 节之末论之. 从而知任意复数除零外恰有 n 个不同的复 n 次方根.

10. 一之方根

1 之三角式为 $\cos 0^\circ+\mathrm{i}\sin 0^\circ$. 按第 9 节 n 次方根使 $A=0$ 则得 n 个不同的一之 n 次方根

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\cdots,n-1 \tag{6}$$

至式内之角兹用半径角计之(180 度之角等于 π 倍半径角,而 $\pi=3.141\ 6$,近似值). 若 $k=0$,则(6) 化为 1,其为 1 之 n 次方根至为明确. 若 $k=1$,则(6) 为

$$R=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n} \tag{7}$$

按棣莫佛定理知一般数(6) 等于 R 之 k 次乘幂,是以 n 个不同的一之 n 次方根为

$$R,R^2,R^3,\cdots,R^{n-1},R^n=1 \tag{8}$$

此 n 个复数(6) 即第 9 节 n 次方根末所提及之特别情款,故数(8) 可以圆心在原点上及半径为一之圆其内接正 n 边形之角顶示之且此内接之 n 边形有一角顶在正向 x 轴之上.

于 $n=3$ 数(8) 为 $\omega,\omega^2,1$,如图1.2 等边三角形之角顶即示此诸数者也. 于 $n=4,R=\cos\pi/2+\mathrm{i}\sin\pi/2=\mathrm{i}$. 1 之四次方根按(8) 为 $\mathrm{i},\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$ 四个,可以圆心在原点 O 半径为 1 之圆内接正方形四个角顶示之(图 1.5).

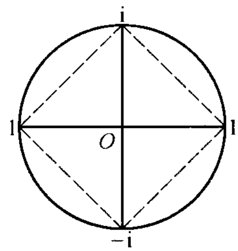

图 1.5

习题 3

1. 将四个一之四次方根如三角式(6) 者化简之. 分解 x^4-1 之因子以核对