王磊 聂娅 主编

大学物理学学习指导

清华大学出版社

王磊 聂娅 主编

大学物理学
学习指导

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是以王磊、陈钢、聂娅主编的《大学物理学》为基础而编写的教学参考书。依据主教材本书分为17章。每章包含四个部分：一、主要内容，这一部分对教材各章的知识点进行归纳、总结，为学生复习、巩固教学内容提供帮助；二、各章主要方法和解题步骤总结，这一部分通过对典型例题的剖析(含重难点解析、一题多解和拓展题讲解)，以帮助学生理清解题思路，掌握解题方法，做到对知识的灵活运用，最后还给出了一些讨论题，启发学生进行讨论和思考，并用解题提示的形式代替详细解答；三、《大学物理学》各章课后题目详解；四、自测题，各章最后给出了自测题，围绕各章基本要求，题目覆盖面广且难易适度，并给出答案，以便学生自我检验。

本书适合作为高校理工类的大学生学习物理的指导书，也可作为工程技术人员自学进修的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学学习指导/王磊，聂娅主编. --北京：清华大学出版社，2011.7
ISBN 978-7-302-25513-0

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①王…②聂…　Ⅲ.①物理学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第087950号

责任编辑：邹开颜　赵从棉
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：24.5　**字　数**：590千字
版　次：2011年7月第1版　**印　次**：2011年7月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：35.00元

产品编号：040940-01

前　言

本书是王磊、陈钢、聂娅主编的《大学物理学》的配套教学参考书。《大学物理学》已由高等教育出版社出版。

作为配套教材，也为了使广大读者开拓思路，编写小组编写了这本《大学物理学学习指导》，希望在大学物理的基本概念、基本理论的深入理解和知识应用方面，以及在解决基本物理问题的思路和分析方法上对读者有所启发和帮助。希望本书对分析、解决《大学物理学》中的习题有所帮助，成为读者的良师益友。

书中首先提出各章学习目的和要求，列举出主要内容的基本概念和重要公式、解题方法提示、例题分析和习题的解答。对问题的分析解答层次清楚，深入浅出，强调基础知识的灵活运用。书中“*”号部分内容，仅供读者参考。参加编写的有王磊、聂娅、陈钢、张纪平、刘彦允、张软玉、廖志君、伍登学等。

由于作者经验不足，疏漏之处请予谅解。

编　者

2011 年 4 月

目 录

第一章

质点的运动

一、主要内容

（一）几个重要概念

1. 参考系

宇宙中运动是绝对的，而对运动的描述是相对的，要确定地描述物体运动就需先选取一定的参考系。参考系的选择是任意的，选择不同的参考系，对研究对象运动的描述是不同的。

2. 坐标系

若要定量描述质点在选定参考系中的运动规律，需在相应参考系中建立适当的时空坐标系。最常用、最直观的坐标系是直角坐标，当质点运动轨迹已知时常用自然坐标系描述质点运动。

3. 质点

质点是指其大小和形状均可以忽略的有质量的点，它是研究物体运动时抽象出的一种简单、有效的理想化模型。在两种情形下，物体的运动可当成质点来处理：①当物体作非旋转的平动时，可以用一个点代表整个物体的运动情况；②当物体的几何尺寸与所关注的空间尺度相比足够小时，可将整个物体看成一点来处理。

（二）重要的运动学物理量

1. 位置和位移

质点位置随时间的变化规律可用质点运动方程表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

在确定的坐标系中由原点指向 t 时刻质点所在处的矢量称为质点的位置矢量，简称位矢。在直角坐标系中质点的位矢表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的增量称为质点的位移，即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A \tag{1-3}$$

$\Delta \boldsymbol{r}$ 与参考点 O 的选择无关。在直角坐标系中，位移可写为

$$\Delta \boldsymbol{r} = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

注意区别“位移”和“路程”的概念：

(1) 路程是对质点历经轨迹长度的度量结果，是标量，以 Δs 表示。

(2) 位移是质点初位置指向末位置的矢量。位移的大小是质点初末位置间的直线距离。位移和路程通常不相等，但两者有如下关系：

$$|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,| = \mathrm{d}s \tag{1-5}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为质点的元位移，$\mathrm{d}s$ 为质点的元路程。

2. 速度和速率

运动质点位矢随时间的变化率称为速度。速度是矢量，表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

在直角坐标系中，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

路程随时间的变化率称为质点的速率。速率是标量，表示为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

3. 加速度

速度随时间的变化率称为加速度。加速度是矢量，表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-9}$$

在直角坐标系中，加速度的三个分量 a_x、a_y、a_z 分别是

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \tag{1-10}$$

加速度矢量可以写作

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

(三) 平面曲线运动

1. 抛体运动

质点以一定的初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在地球表面的自由运动称为抛体运动。作抛体运动的质点的加速度恒为 $\boldsymbol{g}$。若 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平地面的夹角为 θ 时，建立如图 1-1 所示的坐标系，抛体运动质点的运动方程可表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{j} \tag{1-12}$$

$$\boldsymbol{v} = (v_0\cos\theta)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta - gt)\boldsymbol{j} \tag{1-13}$$

$$\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 \tag{1-14}$$

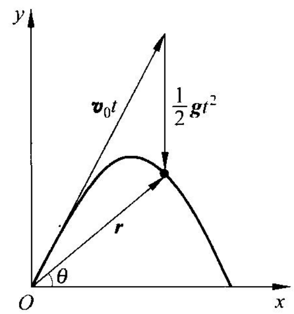

图 1-1

抛体运动的轨迹方程为

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{1-15}$$

所能达到的最大高度(射高)为

$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{1-16}$$

能达到的水平最远距离(射程)为

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \tag{1-17}$$

2. 圆周运动

曲率半径始终不变的平面曲线运动称为圆周运动。用角量描述圆周运动更为方便。圆周的运动方程、角速度和角加速度分别为

$$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ \omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ \alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \end{cases} \tag{1-18}$$

角量与线量之间的关系如下：

$$s = r\theta;\quad v = r\omega;\quad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha;\quad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{1-19}$$

3. 自然坐标系中平面曲线运动方程

平面自然坐标系是根据质点运动轨迹建立的。以轨迹上任一点 O 开始计量的轨迹长度 s,来确定质点位置。$\boldsymbol{e}_t$ 为沿轨迹切线的单位矢量,$\boldsymbol{e}_n$ 为指向曲线凹侧的法向单位矢量。彼此正交的 $\boldsymbol{e}_t$、$\boldsymbol{e}_n$ 依赖于质点位置,决定质点的速度和加速度方向。在平面自然坐标中质点的运动方程为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t \tag{1-20}$$

$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-21}$$

(四) 相对运动

在两个相对运动的不同参考系描述同一质点的运动,将得到不同的描述,这就是运动描述的相对性。若 S' 系相对 S 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 作匀速直线运动,则在两个坐标系中分别观察某质点 P 的运动,可得到如下关系：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}t \\ t' = t \end{cases} \tag{1-22}$$

式中，$\boldsymbol{r}'$、t'表示从S'系中的观测值；$\boldsymbol{r}$、t 表示从 S 系中的观测值。

S 系和S'系中的速度满足下列关系：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \tag{1-23}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 为质点相对于 S 系的速度（绝对速度）；$\boldsymbol{v}'$为质点相对于 S'系的速度（相对速度）；$\boldsymbol{u}$ 为S'系相对于 S 系的速度（牵连速度）。

二、解题指导

本章问题涉及主要方法如下。

1. 运动方程的求解：运用求导和积分等高等数学知识求解运动学中的“正问题”和“逆问题”。

2. 运动的合成和分解方法：运用矢量运算规则和运动叠加原理求解较复杂的平面曲线运动问题。

3. 选择合适的坐标系描述质点的运动。

4. 相对运动问题：在不同参照系中对同一问题的观察和测量规律的研究。

例 1-1 简答下列问题。

(1) 位移和路程有何区别？在什么情况下两者的量值相等？平均速度和平均速率有何区别？在什么情况下两者的量值相等？

答：位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 Δs 是两个不同的概念。路程是在某段时间内，质点所经路径（轨迹）的总长度，一般为曲线的弧长；而位移是在这段时间内，从起始位置引向终止位置的有向线段。路程是标量，只有大小，无方向；而位移是矢量，既有大小又有方向。只有在质点作直线直进运动时，位移的大小与路程的量值才相等（或当 $\Delta t \to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$）。

平均速度$\bar{\boldsymbol{v}}$和平均速率$\bar{v}$是两个不同的概念。平均速率是运动质点所经过的路程与完成这段路程所需时间的比值，即$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$；平均速度是运动质点的位移与完成这段位移所需时间的比值，$\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$。平均速率是标量，平均速度是矢量。只有当质点作直线直进运动时，平均速度的大小与平均速率的量值才相等。

(2) 匀速圆周运动的速度和加速度是否都恒定不变？在什么情况下会有切向加速度？在什么情况下会有法向加速度？

答：在直角坐标系中，匀速圆周运动的速度和加速度都要改变。而在自然坐标系中，匀速圆周运动的速度与加速度却是恒定不变的。

当速度的大小变化时，就有切向加速度；当速度的方向变化时，就有法向加速度。在直线运动中，只有切向加速度，直线运动的加速度实际上就是切向加速度。凡是曲线运动都有法向加速度。在匀速曲线运动中，仅有法向加速度；在变速曲线运动中，不仅有法向加速度，还有切向加速度。

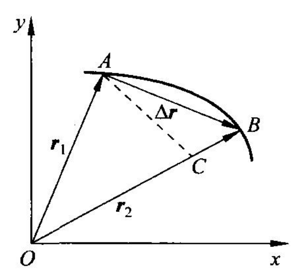

图 1-2

(3) 在曲线运动中，Δr 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 是否相同？Δv 与 $|\Delta \boldsymbol{v}|$ 是否相同？

答： $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$ 表示两位置矢量的绝对值之差，而 $|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$ 表示两位置矢量的差的绝对值。在一般情况下，Δr 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 并不相等。在图 1-2 中，设质点从 A 点运动到 B 点，则 $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|=\overline{CB}$，$|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=\overline{AB}$。二者不相等。

$\Delta v=|\boldsymbol{v}_2|-|\boldsymbol{v}_1|$ 表示两速度矢量的绝对值之差，而 $|\Delta \boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|$ 表示两速度矢量之差的绝对值。在一般情况下，Δv 与 $|\Delta \boldsymbol{v}|$ 不相等。

例 1-2　(由运动方程求运动速度、加速度)一质点的运动方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，计算质点的速度和加速度时：

(1) 有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$a=\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$，求得 v、a 的值；

(2) 有人先计算 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$a_x=\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，$a_y=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，然后合成求得 v、a 的值，即

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2},\quad a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

(3) 又有人直接根据 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$a=\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)$，求得 v、a 的值。

你认为哪种方法正确？方法不正确的错在哪里？

答： 第(2)种方法正确。速度和加速度都是矢量，满足关系

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

在上式求导中，因 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是单位恒矢量，所以 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$。所以速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

第(1)种方法只考虑了位置矢量的量值 r 随时间 t 的变化，而没有考虑位置矢量的方向变化，所以是错误的。第(3)种方法则是由于物理概念不清而出现的错误。

例 1-3　(由运动方程讨论运动)一质点的运动方程为 $y=3t^2-2t^3$(SI)。

(1) 求质点在任一时刻的速度和加速度；

(2) 质点作什么运动？

解： (1) 任一时刻的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=6t-6t^2$$

任一时刻的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6-12t$$

(2) 由 $v=6t-6t^2$ 和 $a=6-12t$ 知

$$t=0\text{ 时},\quad v_0=0, a_0=6\ \mathrm{m/s^2}$$

$$t=1\ \mathrm{s}\text{ 时},\quad v_1=0, a_1=-6\ \mathrm{m/s^2}$$

由此判知，质点在坐标原点从静止开始作变加速直线运动。

例 1-4 （由加速度求速度和运动方程）已知一质点运动的加速度为 $a=2t+4$(SI)，初始条件为 $t=0$ 时，$x_0=-2\ \mathrm{m}$，$v_0=4\ \mathrm{m/s}$。求：

(1) 第三秒初质点运动的速度；

(2) 质点的运动方程。

解：由题设条件知，此题应用积分法可解。

(1) 根据速度公式

$$v=v_0+\int_0^t a(t)\mathrm{d}t$$

代入已知初始条件 $a=2t+4$，$v_0=4\ \mathrm{m/s}$，得

$$v=v_0+\int_0^t(2t+4)\mathrm{d}t=t^2+4t+4(\mathrm{SI})$$

所以 $v|_{t=2\,\mathrm{s}}=16\ \mathrm{m/s}$，即第三秒初质点的速度为 16 m/s。

(2) 根据运动方程一般表达式 $x=x_0+\int_0^t v(t)\mathrm{d}t$，代入(1)中的速度 v 表达式与 $x_0=-2\ \mathrm{m}$，得

$$x=-2+\int_0^t(t^2+4t+4)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+2t^2+4t-2$$

所以，所求质点的运动方程为

$$x=\frac{1}{3}t^3+2t^2+4t-2(\mathrm{SI})$$

例 1-5 （由加速度和初条件求解运动）一升降机沿竖直方向以加速度 $a=1\ \mathrm{m/s^2}$ 上升，当上升的速度为 $v_0=3.2\ \mathrm{m/s}$ 时，有一颗螺钉从升降机的天花板松落。升降机的天花板与升降机地板间的距离为 2 m。求：

(1) 螺钉从天花板落到地板所需的时间；

(2) 螺钉相对于升降机外固定柱子的下降距离；

(3) 螺钉即将落到地板时的速度。

解法一：(1) 以螺钉松落处的空间点为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，如图 1-3 所示。以螺钉为研究对象，螺钉作初速度为 v_0 的竖直上抛运动，从松落到与升降机地板相遇的过程中，螺钉的位移为

$$L_1=-v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

以升降机为研究对象，升降机作匀加速直线上升运动，从螺钉松落到升降机的地板与螺钉相遇的过程中，升降机的位移为

$$L_2=-v_0t+\frac{1}{2}(-a)t^2 \tag{2}$$

且螺钉的位移与升降机的位移之和就是天花板到地板的距离，即

$$L_1+L_2=L \tag{3}$$

联解方程(1)、(2)、(3)得

$$t=\sqrt{\frac{2L}{g+a}}=\sqrt{\frac{2\times 2}{9.8+1}}=0.61\ (\mathrm{s})$$

(2) 螺钉相对于升降机外固定点(即所选坐标原点)的位移为

$$L_1=-v_0t+\frac{1}{2}gt^2=-3.2\times 0.61+\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.61^2=-0.13\ (\mathrm{m})$$

负号说明从螺钉松落至落到升降机地板上的过程中,螺钉相对于升降机外的固定柱子上升了 0.13 m。

(3) 因螺钉作竖直上抛运动,所以有

$$v=(-v_0)+gt=-3.2+9.8\times 0.61=2.8\ (\mathrm{m/s})$$

螺钉即将落到升降机地板时,其速度的大小为 2.8 m/s,方向竖直向下。

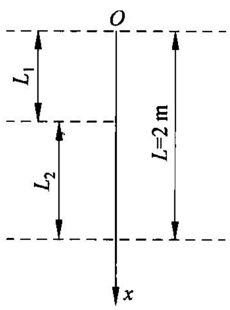

图　1-3

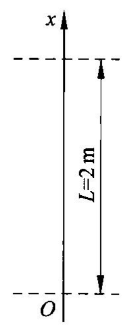

图　1-4

解法二:(1) 以螺钉松落时,升降机的地板为坐标原点,竖直向上为 x 轴正方向,如图 1-4 所示。

以螺钉松落时为计时起点,得螺钉的运动方程为

$$L_1=L+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

升降机的运动方程为

$$L_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

相遇时,有 $L_1=L_2$,代入方程(1)和(2)得

$$t=\sqrt{\frac{2L}{g+a}}=\sqrt{\frac{2\times 2}{9.8+1}}=0.61\ (\mathrm{s})$$

(2) 螺钉相对于升降机外固定点的位移为

$$L_1-L=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=3.2\times 0.61-\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.61^2=0.13\ (\mathrm{m})$$

$L_1-L>0$,表示位移的方向与坐标轴的正方向相同,说明螺钉相对于升降机外的固定点上升了 0.13 m。

(3) 螺钉即将与升降机地板相遇时的速度为

$$v=v_0+(-g)t=3.2-9.8\times 0.61=-2.8\ (\mathrm{m/s})$$

负号表示速度的方向沿 x 轴负方向,即竖直向下。

求解这类问题时应注意：①首先需明确研究对象运动过程的特点；②其次要选定坐标原点，建立恰当的坐标系；③运用匀变速直线运动的位移公式和速度公式列方程时，要特别注意各物理量的正、负号，若方程中的各量的正、负号取得不当，将会导致错误的结果。

例 1-6 （空中打靶）如图 1-5 所示，当子弹从 O 点射出之时，小球 B 开始自由下落，问仰角 θ 为多大时，子弹正中目标？

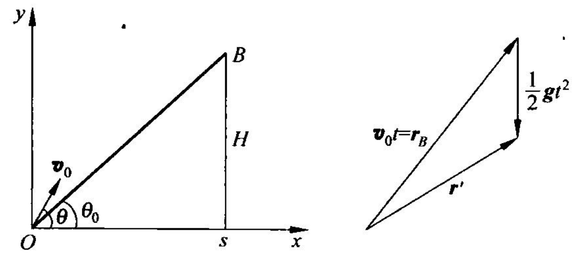

图 1-5

解法一：子弹射出后，它的运动由射出方向的匀速运动和竖直方向的匀加速运动叠加而成，因此可用矢量合成进行处理。

要使子弹击中目标，必须满足：子弹与靶的轨道相交，子弹与靶同时经过交点。

子弹的运动方程写成矢量形式，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}(t - t_0)^2$$

因 $t_0=0$ 时，有 $r_0=0$，所以

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

上式为两种运动的叠加。

对靶 B，初速度为 0，初始位置为 $\boldsymbol{r}_B$，则有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_B + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

子弹击中靶，应有 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$，即 $\boldsymbol{v}_0 t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2=\boldsymbol{r}_B+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$，可得

$$\boldsymbol{v}_0 t = \boldsymbol{r}_B$$

因 $\boldsymbol{r}_B$ 是常矢量，故只要 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_B$ 同方向，即仰角 $\theta=\theta_0$，也就是说，只需要瞄准靶 B 即可扳机射击。

解法二：子弹的运动也可视为水平匀速运动与竖直上抛运动（初速度不为零）的叠加，因此可用坐标分解法。设子弹的坐标为 x_1、y_1，靶坐标为 x_2、y_2，则有

$$x_1 = v_0\cos\theta \cdot t, y_1 = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_2 = s, \quad y_2 = H - \frac{1}{2}gt^2$$

击中目标时，$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，可得

$$v_0\cos\theta \cdot t = s$$

$$v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2$$

联解得

$$\tan\theta = \frac{H}{s}$$

而 $\tan\theta_0 = \frac{H}{s}$，故 $\theta_0=\theta$，即表明只要瞄准靶射击就可击中靶。

例 1-7　（转动角速度、角加速度）一半径为 0.2 m 的圆盘绕中心轴转动的运动方程为 $\theta=2+2t+2t^2$(SI)。求：

(1) 初始时刻的角速度大小；

(2) 第 2 秒末圆盘边缘质点的切向加速度大小和法向加速度大小。

解：由题设条件可知，本题属于运动学正问题，应用微分法求解。

(1) 因为角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2+2t+2t^2) = 2+4t$$

所以初始时刻 $t=0$ 时的角速度大小为

$$\omega_0 = 2\ \mathrm{rad/s}$$

(2) 因为角加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2+4t) = 4\ \mathrm{rad/s^2}$$

所以在第 2 秒末边缘质点的切向加速度大小

$$a_t = r\alpha = 0.8\ \mathrm{m/s^2}$$

在第 2 秒末边缘质点的法向加速度大小

$$a_n = r\omega^2 = 20\ \mathrm{m/s^2}$$

例 1-8　（抛体运动的轨道曲率半径）如图 1-6 所示，以初速度 v_0、抛射角 θ 抛出一小球，试求任一时刻 t 小球所在处轨道的曲率半径。

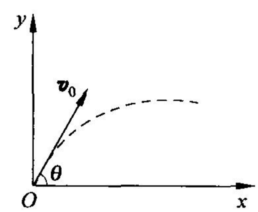

图 1-6

解法一：设抛出瞬时为计时零点，以抛出点为坐标原点 O，在小球轨道平面内建立 Oxy 直角坐标。

任意时刻 t 小球的速度为

$$v_x = v_0\cos\theta,\quad v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$v = \sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}$$

切向加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0\sin\theta - gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}}g$$

法向加速度

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}}$$

此时刻小球所在处轨道曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{v_0 g\cos\theta}\left[v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - gt)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$