高等学校教学参考书

高等学校教学参考书

微分几何

中国人民解放军测绘学院数学教研组编

人民教育出版社

序

本书原为北京測繪学院的数学講义，由刘欽圣同志执笔編写。曾在該院天文大地、航測、制图三个专业試教过。此次出版前，又根据試教中教师和同学提出的意見进行了一次全面的整理。

本书在取材方面，力求結合測繪专业的需要，因而将重点放在曲面論部分，特别是对測地綫和曲面映射講述得比較詳細，并专写了一章旋轉曲面。

考虑到測繪学院各专业微分几何的教学时数不多，而所牵涉的內容又相当广泛，因此本书在講述方法上，力求簡明易懂，而对某些定理和公式，未作严密的推証。

由于我們的数学水平和測繪技术知識都很欠缺，加上人力有限，集体討論和审查工作做得不够，內容不妥或謬誤之处，恐属难免，希讀者予以批評与指正。

中国人民解放军测绘学院

1960 年 5 月

目 录

第一章　向量

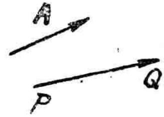
近代很多自然科学常用向量作为运算工具，因为这样可以使內涵簡明而减少分析运算上的麻煩。本书将用向量运算来研究微分几何。因此在本章把向量代数和向量分析的基本內容作一簡明的介紹。

1.1. 数量、向量

我們經常遇到的量有两类——数量与向量。

当确定的选擇好测量单位时，仅由数的大小就可以完全表現出来的量，叫做数量。例如体积、温度、密度、質量等。数量可为正，可为負，也可为零。

除了数的大小而外，还具有方向的量称为向量，簡称矢，例如力、速度、加速度等。



(图 1)

在几何学上，我們用具有箭头的綫段表示向量(图 1)，箭头表示方向，綫段的长度表示数的大小。

一般用黑体字 **A**、**B**、……或 $\overrightarrow{PQ}$、……来記向量。对应的用 $|\mathbf{A}|$，$|\mathbf{B}|$，……$|\overrightarrow{PQ}|$……来記它們的长度，而叫做向量的模（大小）。数量则用普通字母来表示。

如果一个向量的始点不是固定的，我們把这向量叫做自由向量。如果它的始点是固定的，就叫做固定向量。这两种向量以后都要用到，在符号上不加区别。

若两个向量的大小相等而方向相同时，就称作它們相等。但如果两个向量 **A**、**B** 的大小相等而方向相反，則記作 $\mathbf{A}=-\mathbf{B}$。

1.2. 向量的和与差

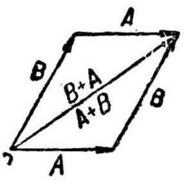
設有向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$, 由向量 $\mathbf{A}$ 的終点作向量 $\mathbf{B}$, 則把从向量 $\mathbf{A}$ 的始点到向量 $\mathbf{B}$ 的終点叫做 $\mathbf{A}$ 加 $\mathbf{B}$ 的和, 記作 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$(图2)。容易証明

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

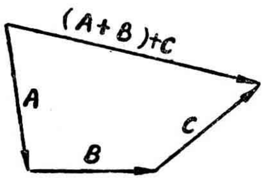
設有三个向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, 由向量 $\mathbf{A}$ 的終点作向量 $\mathbf{B}$, 再从向量 $\mathbf{B}$ 的終点作向量 $\mathbf{C}$, 則把从向量 $\mathbf{A}$ 的始点到向量 $\mathbf{C}$ 的終点的向量記作$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$(图3)。容易証明

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

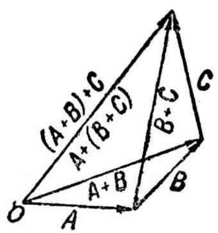
(图4)为此, 我們可以把三个向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 的和記作 $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$。



(图 2)



(图 3)

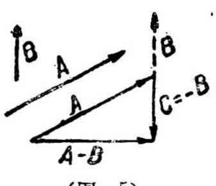


(图 4)

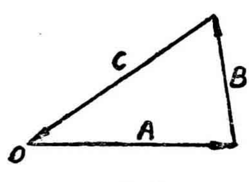
若向量 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 的方向相反而大小相等, 我們把 $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ 叫做 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的差(图5), 記作 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, 即

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}+\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}.$$

若一个向量的大小等于零, 則这向量叫做零向量。零向量的方向是不定的, 通常把它記作 $\mathbf{0}$。



(图 5)



(图 6)

若諸向量相加时，最后一个向量的終点与第一个向量的起点重合，就是說若由上述法則作出的折綫是封閉的，則此諸向量的和等于零向量。例如图 6

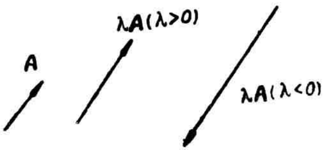
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{0}$$

特別明显的

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$$

1.3. 向量与数量的乘积

若有向量 $\mathbf{A}$ 与一数量 λ，規定它們的乘积仍为一个向量，其大小等于 $|\lambda|\,|\mathbf{A}|$，其方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\mathbf{A}$ 相同，$\lambda<0$ 时与 $\mathbf{A}$ 相反，在 $\lambda=0$ 时，它为零向量，方向不定。我們把这乘积記作 $\lambda\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\lambda$（图 7）。



（图　7）

特別地，$(-1)\mathbf{A}$ 就是与 $\mathbf{A}$ 方向相反而大小相等的向量。即

$$(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}.$$

关于这个乘法的分配律是成立的：

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}, \tag{1}$$

因为向量乘数量 λ 只是更改向量的大小和可能顚倒向量的方向，又向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 是一个三角形的边，那末所有这三向量遍乘同一数量 λ 仅仅依同一比例更改大小或可能顚倒方向，結果 $\lambda\mathbf{A}$, $\lambda\mathbf{B}$, $\lambda\mathbf{C}$ 仍組成一个三角形，它与原来的相似（图 8）这就是說：

$$\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}=\lambda\mathbf{C},$$

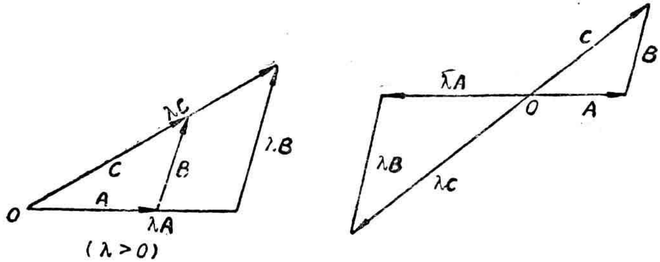
即

$$\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}=\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}).$$

还要指出，由向量与数量的乘法定义，不难証明：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{A} \tag{2}$$

$$\lambda_1(\lambda_2\mathbf{A})=(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_2(\lambda_1\mathbf{A}) \tag{3}$$

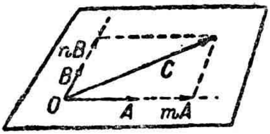


(图 8)

若用 $\mathbf{A}^0$ 表示与 $\mathbf{A}$ 同方向的单位向量，那末有

$$\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^0. \tag{4}$$

由定义，我們看到这样一件事实：若 $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{B}$，則 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 互相平行（方向相同或相反）；反之，若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行，則必定可找到一个数量 λ 使 $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{B}$，因此两向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行的必要与充分条件是可以找到一个数量 λ，使 $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{B}$。我們常把互相平行的二向量叫做共綫向量。



(图 9)

設給定任何两个向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，它們不是共綫的。通过某一点 O 引两条平行于所給向量的直綫（图 9），这两条直綫确定一个平面，此平面不仅平行于 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，且平行于所有的向量 $m\mathbf{A}$ 及 $n\mathbf{B}$，其中 m, n 是任意的数值，并且由加法法則，可知此平面也平行于它們的和

$$\mathbf{C}=m\mathbf{A}+n\mathbf{B}. \tag{5}$$

如果若干个向量同时平行于某一个平面，我們說这些向量是共(平)面的。这样，如果 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 满足关系式(5)，它們就是共面的。

反之如果三个向量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 是共面的，則它們之間一定有象(5)的关系。事实上，如果其中有两个向量相平行，例如 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 相

平行，則有 $\mathbf{C}=n\mathbf{B}$，也卽 $\mathbf{C}=m\mathbf{A}+n\mathbf{B}$，而其中 $m=0$；如果这三个向量两两不平行，我們只要由点 O 作出向量 $\mathbf{C}$，以它为对角綫作平行四边形，使这平行四边形的边各平行于 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，于是可以写出关系式(5)。

总之，三个向量共平面的必要与充分条件是这三个向量之間有象(5)的关系。

最后我們規定 $\mathbf{A}/\mu\equiv\left(\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{A}$，其中 μ 是一个异于零的常数。

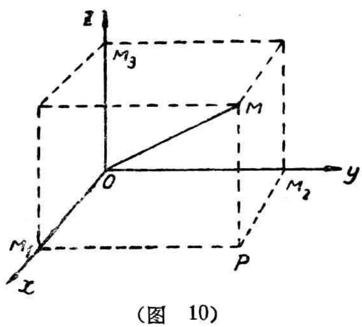
1.4. 向量在直角坐标軸上的分量

設点 O 是直角坐标的原点，点 M 的坐标为

$$OM_1=x,\ \ OM_2=y,\ \ OM_3=z.$$

我們常把向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向徑，記作 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$（图 10）。由向量的加法法則有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PM}$$
$$=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}\qquad(6)$$



（图　10）

为了便于运算，从 O 点沿坐标軸 Ox, Oy, Oz 取三个单位向量，其方向与坐标軸的正方向相同，并依次以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示，这三个向量我們叫做基本向量。于是，根据公式(4)可把公式(6)写为：

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$$
$$=OM_1\mathbf{i}+OM_2\mathbf{j}+OM_3\mathbf{k}$$
$$=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.\qquad(7)$$

公式(7)中的 x, y, z 旣是点 M 的坐标，也是向量 $\overrightarrow{OM}$ 在各坐标軸上的射影。

設向量 $\mathbf{A}$ 在坐标軸上的射影为 A_x, A_y, A_z, 我們有

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k} \tag{8}$$

有时把向量 $\mathbf{A}$ 在坐标軸上的射影 A_x, A_y, A_z, 叫做 $\mathbf{A}$ 的坐标或分量, 用

$$\mathbf{A}\{A_x, A_y, A_z\}$$

記号来表示。

容易看出: 如果两向量相等(不一定共起点)則它們在各坐标軸的射影相等, 反之, 如果两个向量在坐标軸上的射影依次相等, 則这两向量相等。所以不論把一个向量的起点放在何处, 它在坐标軸上的分量是不变的。

利用向量的分量, 可得向量加减法及向量与数量乘法的运算。設

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k},\quad \mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k},$$

由公式(2)得

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=(A_x\pm B_x)\mathbf{i}+(A_y\pm B_y)\mathbf{j}+(A_z\pm B_z)\mathbf{k}$$

由公式(1)及(3)得

$$\lambda\mathbf{A}=\lambda A_x\mathbf{i}+\lambda A_y\mathbf{j}+\lambda A_z\mathbf{k}.$$

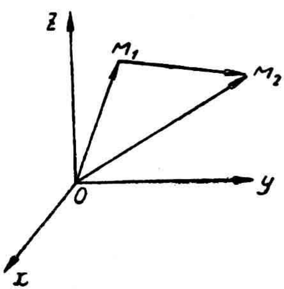
例: 設两定点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标軸上的分量(图 11)。

解: 作向量 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ 則

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}\\&\quad+(z_2-z_1)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{9}$$



(图 11)

所以向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标軸上的分量为 $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$。

1.5. 向量的模、方向余弦

設向量 $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$, 由于 A_x, A_y, A_z 是向量 $\mathbf{A}$ 在坐标軸上的射影, 則向量 $\mathbf{A}$ 的模由明显的几何概念得公式

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}. \tag{10}$$

假定向量 $\mathbf{A}$ 与坐标軸間的角依次为 α, β, γ; 我們叫这 α, β, γ 为 $\mathbf{A}$ 的方向角, 而把 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 叫做 $\mathbf{A}$ 的方向余弦。根据解析几何講过的射影公式我們有:

$$A_x=|\mathbf{A}|\cos\alpha, \quad A_y=|\mathbf{A}|\cos\beta, \quad A_z=|\mathbf{A}|\cos\gamma, \tag{11}$$

于是

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{|\mathbf{A}|}=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{A_y}{|\mathbf{A}|}=\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{A_z}{|\mathbf{A}|}=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}. \tag{12}$$

这就是用分量来表示方向余弦的公式。

又由公式(12)直接推出

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{13}$$

卽: 任意向量的方向余弦的平方和等于1。

如果我們用 $\mathbf{A}^0$ 来表示向量$\mathbf{A}$方向上的单位向量, 因 $|\mathbf{A}^0|=1$, 則

$$\cos\alpha=A_x^0, \quad \cos\beta=A_y^0, \quad \cos\gamma=A_z^0.$$

因而得

$$\mathbf{A}^0=\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}. \tag{14}$$

1.6. 数量积

所謂两个向量 **A** 与 **B** 的数量积是一个数量，它的大小等于两个向量的模与它們夹角的余弦之乘积。

数量积用記号 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 来表示，所以

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}). \tag{15}$$

根据这个定义直接可以推出

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}. \tag{16}$$

即交换律成立。

若 **A**, **B** 互相垂直，則因 $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})=0$，而有

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0.$$

反之，若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$，只要 **A** 与 **B** 都不是零向量，則必 $\cos(\mathbf{A},\mathbf{B})=$ $=0$，即 **A** 与 **B** 互相垂直。因此，两个向量互相垂直的必要与充分条件是它們的数量积等于零。

特别是对于基本向量，我們有

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0. \tag{17}$$

若 **A**, **B** 的方向相同，則

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|,$$

如果方向相反，則

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|.$$

特别是

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2,$$

这就是說，向量 **A** 的模的平方等于 **A** 与自己作数量积。为了方便起見，我們还常把 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ 記作 $\mathbf{A}^2$，即

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2, \tag{18}$$

因此我們还有

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \tag{19}$$

另外，对于数量积，分配律以及数量积与常数因子的結合律都成立：

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}, \tag{20}$$

$$(\lambda\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{B})=\lambda(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \tag{21}$$

它們的証明，本书从略。

由(20)还可推出更普遍的公式

$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1)\cdot(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2.$$

它表达了交叉相乘的展开括号的法則，在向量运算中也成立。

利用(16)至(21)諸式，还能把数量积通过向量的分量来表达。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})\\&=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i})\\&+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_y\mathbf{j})\\&+(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot(B_z\mathbf{k})\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,\end{aligned}$$

卽

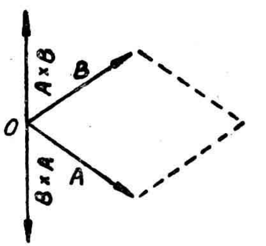
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{22}$$

利用这公式来計算数量积常常是方便的。由公式(22)可知向量 **A** 与 **B** 互相垂直的必要和充分条件是：

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

1.7. 向量积

由空間任一点 O 引向量 **A** 与 **B**，并以它們为边作一平行四边形。这平行四边形所在平面通过 O 点的垂綫有两个相反的方向(图 12)，在这两个方向中我們选定一个作为此平面的垂綫，这个垂綫具有下述性質：卽从这个方向观察时，由向量 **A** 的方向轉一个小于 π 的角度达到 **B** 的方向是反时



(图 12)

針方向。

所謂 $\mathbf{A}$ 乘以 $\mathbf{B}$ 的向量积是一个向量，它的模等于由这两个向量所作平行四边形的面积的大小，方向与上述这个平行四边形所在的、平面的垂綫方向相同，卽同时垂直于 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，且它与 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的方向順序合于右手系。我們常用記号 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 来表示。它的模:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}). \tag{23}$$

若向量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的方向互相平行，則它們的向量积等于 0，反之也成立。特别是

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0,$$

因此，对于基本向量有

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0. \tag{24}$$

若 $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$，則因 $\sin(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 1$，故 $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$，由此可以推証:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}. \tag{25}$$

現在考慮向量 $\mathbf{B}$ 乘以向量 $\mathbf{A}$ 的向量积 $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$，显然它的大小也象 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 的情形一样，但方向則相反，因为对于 $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ 来說不是由向量 $\mathbf{A}$ 轉起，而是由 $\mathbf{B}$ 轉起。如此

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B} \tag{26}$$

向量积的交換律不成立，但 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ 之間却存在这个簡单的关系。

另外，向量积滿足分配律和向量积与常数因子的結合律:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C} \tag{27}$$

$$(\lambda\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\lambda\mathbf{B}) \tag{28}$$

它們的証明，本书从略。

利用上述向量积的那些基本性质，我們可以推出向量积的分量表达式。設二向量

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B}=B_x\,\mathbf{i}+B_y\,\mathbf{j}+B_z\,\mathbf{k},$$

則根据向量积的分配律有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\,\mathbf{k})\times(B_x\,\mathbf{i}+B_y\,\mathbf{j}+B_z\,\mathbf{k})\\&=A_xB_x(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+A_xB_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+A_xB_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+\\&+A_yB_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i})+A_yB_y(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+A_yB_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+\\&+A_zB_x(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+A_zB_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+A_zB_z(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+\\&+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

用行列式的符号来写有

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}.\tag{29}$$

我們还有

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\sqrt{\begin{vmatrix}A_yA_z\\A_yB_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_zA_x\\B_zB_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}A_xA_y\\B_xB_y\end{vmatrix}^2}.\tag{30}$$

1.8. 向量数量积

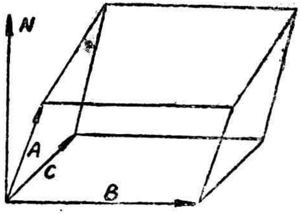
作出向量 $\mathbf{A}$ 与向量积 $\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 的数量积: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, 有时为了运算方便起见可把它記作($\mathbf{ABC}$), 即

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{ABC}),$$

$\mathbf{N}$的大小等于由$\mathbf{B}$与 $\mathbf{C}$ 作成的平行四边形的面积的大小, 但

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{N}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{N})$$

这个乘积可以考虑作上述平行四边形的面积$|\mathbf{N}|$与$\mathbf{A}$在方向$\mathbf{N}$上的投影的乘积, 其中方向$\mathbf{N}$垂直于这平行四边形所在的平面, 即向量数量积 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$的絕对值等于由 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{C}$ 作成的平行六面体的体积(图 13)。



(图 13)

又 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

$$=A_x(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_x+A_y(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_y+A_z(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_z$$

$$=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+A_z(B_xC_y-B_yC_x).$$

用行列式来表示即有

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=(\mathbf{ABC}) \tag{31}$$

由行列式的性质可以直接証明:

$$A\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{32}$$

及

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) \tag{33}$$

等等。

当三向量 **A**, **B**, **C** 共面时, 則此平行六面体的体积为 0, 于是

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0 \quad 或 \quad (\mathbf{ABC})=0 \tag{34}$$

反之如果$(\mathbf{ABC})=0$可以証明向量 **A**, **B**, **C** 是共面的, 因此这等式(34)是三向量共面的必要与充分条件。

1.9. 二重向量积

現在考虑 **A** 乘以向量积 $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ 的向量积, 就是

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}),$$

因 **D** 垂直于向量 $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, 而 **B** 与 **C** 也垂直于向量 $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, 則**D**与**B**, **C** 共面, 于是

$$\mathbf{D}=m\mathbf{B}+n\mathbf{C},$$

其中 m, n 为待定常数。又 **D** 垂直于 **A**, 所以

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=m\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+n\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=0,$$

由此推出

$$m=\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\quad n=-\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

其中 μ 是待定常数，于是

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{D}=\mu\{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\}.$$

現在确定 μ 的值，为此我們取 OX 軸的方向平行于 $\mathbf{A}$，則

$$A_x=|\mathbf{A}|=a;\quad A_y=A_z=0.$$

比較上式两边，对左边有

$$D_z=A_x\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_y=a(B_zC_x-B_xC_z),$$

对于右边有

$$D_z=\mu(aC_xB_z-aB_xC_z).$$

故

$$\mu=1.$$

由是得出公式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}.\tag{35}$$

1.10. 变向量

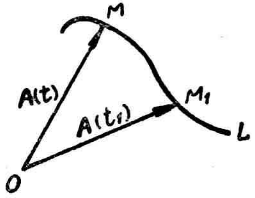
現在我們引进依賴于某一参变量 t 的变向量的概念。我們假定向量 $\mathbf{A}(t)$ 是参变量 t 的一个单值連續函数，我們写成，

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(t).$$

当 t 变化时，$\mathbf{A}$ 的大小和方向也随着变化，同时它也可以用分量表示，即

$$\mathbf{A}(t)=A_x(t)\mathbf{i}+A_y(t)\mathbf{j}+A_z(t)\mathbf{k}.$$

其中 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 是 t 的普通函数。因此一个向量函数对应于三个普通函数。



(图　14)

向量函数的图形可表示如下：我們把坐标原点 O 作为变向量的公共起点，当参变量 t 改变时，变向量 $\mathbf{A}(t)$ 的終点画出一条曲