萬有文庫

第二集七百種

王雲五主編

數理精蘊

（八）

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

（八）

清聖祖敕編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

數理精蘊下編卷二十三

體部一

立方

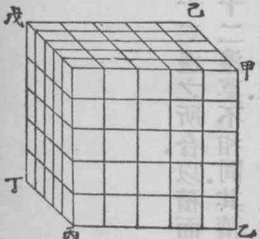
立方者。等邊六面之體積也。以形而言。雖爲六面十二邊之所合。以積而言。則爲自乘再乘之數。因其縱橫與高俱相等。故十二邊皆如一線。得其一邊而十二邊莫不相同。其積之也。自線而面。自面而體。次第相乘而後得其全積。其開之也。必次第析之而後得其一邊。是故古人立爲方廉長廉之制。每積三位而得邊之一位。所謂一千商十定無疑。三萬纔爲三十餘。九十九萬不離十。百萬方爲一百推是也。其法先從一角而剖其體。以自一至九自乘再乘之數。爲方根與實相審。量其足減者而定之。是爲初商。初商減盡無餘。則方根止一位。若有餘實。卽初商方積外。別成一缺角三面磬折體。其附初商之三面者。謂之方廉。其附初商之三邊者。謂之長廉。其附初商之角者。謂之隅。廉有三。故以三爲廉法。隅惟一。而隅之三面卽符於三長廉之端。合三方廉三長廉一隅。始合次商之數。故商除之法。以初商自乘三因爲三方廉面積。視初商餘實足方廉面積幾倍。卽定爲次商。乃以次商乘三長廉爲三長廉面積。又以次商自乘爲小隅面積。共合三方廉三長廉及一小隅面積。以次商數乘之。爲次商廉隅之共積。所謂初商方積外。別成一缺角三面磬折體者是也。如次商外尚有不盡之實。則初商次商方積外。仍爲三方廉三長廉一小隅。

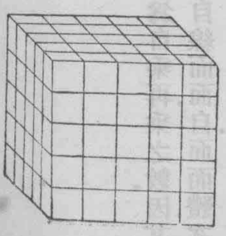
又成一三面磬折體。但較前方廉愈大。長廉愈長。而隅愈小耳。凡有幾層廉隅。俱照次商之例遞析之。實盡而止。如開至多位。實仍不盡者。必非自乘再乘之正數。此開立方之定法也。體形不一。而容積皆以立方爲準。故立方爲算諸體之本。諸體必通之立方。而法乃可施也。

設如正方體積一百二十五尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積一百二十五尺。自末位起算。每方積三位。定方邊一位。今積止有三位。則於五尺上作記。定單位。以自一至九自乘再乘之方根數與之相審。知與五尺自乘再乘之數恰合。乃以五尺書於方積五尺之上。而以五尺自乘再乘之一百二十五尺。書於方積原數之下。相減恰盡。即得開方之數爲五尺也。如圖甲乙丙丁戊己正方體形。每邊皆五尺。其中函一尺小方體一百二十五。自邊計之爲五尺。自面計之。則爲五尺自乘之二十五尺。自通體計之。則爲五尺自乘再乘之一百二十五尺。以積開之。則與五尺自乘再乘之數相準。故商除之恰盡也。蓋方積爲三位。是以方邊止一位。方積即五尺自乘再乘之數。別無廉隅。故不用次商。如有餘實。則自成廉隅而用次商矣。

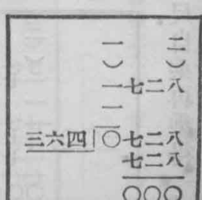
五
一二五）
一二五
○○○

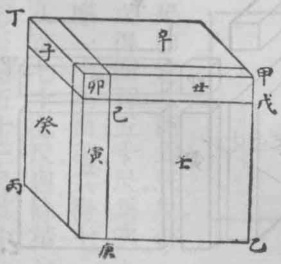




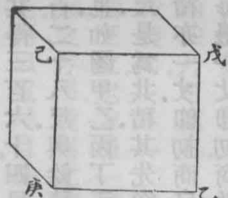
設如正方體積一丈七百二十八尺．開立方．問每一邊數幾何．

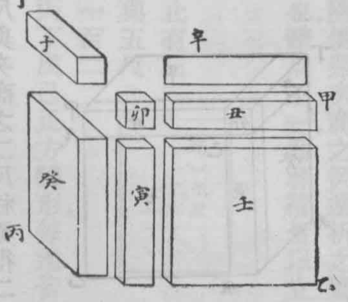
法列正方體積一丈七百二十八尺．自末位起算每方積三位．定方邊一位．故隔二位作記．卽於八尺上定尺位．一丈上定丈位．其一丈爲初商積．與一丈自乘再乘之數相合．卽定初商爲一丈．書於方積一丈之上．而以一丈自乘再乘之一丈書於初商積之下．相減恰盡．爰以方邊末位餘積七百二十八尺．續書於下．大凡以餘積續書於下者．每取方積之三位．以當方邊之一位也．爲次商廉隅之共積．乃以初商之一丈作一十尺．自乘得一百尺．三因之得三百尺．爲次商三方廉面積．以除方積七百二十八尺．足二尺．卽定次商爲二尺．書於方積八尺之上．而以初商之一十尺與次商之二尺相乘得二十尺．三因之得六十尺．爲次商三長廉面積．復以次商二尺自乘得四尺．爲次商一小隅面積．合三方廉三長廉一小隅面積．共得三百六十四尺．爲廉隅共法．書於餘積之左．以次商之二尺乘之．得七百二十八尺．與餘積相減恰盡．是開得一丈二尺．爲正方體積每一邊之數也．如圖甲乙丙丁正方體形每邊皆一丈二尺．其中函積一丈七百二十八尺．是爲共積．其先從一角所分戊乙庚己方體每邊一丈．卽初商數．其中函積亦一丈．卽初商自乘再乘之數．所餘辛形壬形癸形三方體爲三方廉．其每邊一丈．卽初商數．其厚二尺卽次商數．而子形丑形寅形三長方體爲三長廉．其每邊一丈亦卽初



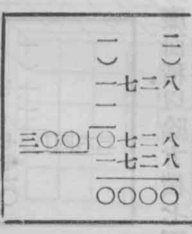


商數．其闊其厚皆二尺．亦卽次商數．方廉有三．故三倍初商之自乘爲廉法．以定次商．其卯形一小正方體爲隅．其長與闊與厚皆同爲二尺．亦卽次商數．故以次商爲隅法．合辛壬癸三方廉．子丑寅三長廉．卯一方隅．而成一罄折體形．附於初商自乘再乘之方體三面．而成一甲乙丙丁之總正方體積．此立方廉隅之法所由生也．三商以後．皆倣此遞析開之．





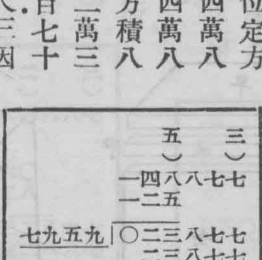
又法．列積一丈七百二十八尺．自末位起算作記．定位同前．乃截一丈爲初商積．與一丈自乘再乘之數相合．則定初商爲一丈．書於方積一丈之上．而以一丈自乘再乘之一丈．書於初商積之下．相減恰盡．乃以方邊末位餘積七百二十八尺續書於下．爲次商廉隅之共積．而以初商之一丈作一十尺．自乘得一百尺．三因之得三百尺．爲次商三方廉面積．卽以三方廉面積三百尺除方積七百二十八尺．足二尺．則定次商爲二尺．書於方積八尺之上．合初商共一丈二尺．自乘再乘得一丈七百二十八尺．與原積符合．相減恰盡．卽定立方邊爲一丈二尺也．此法止用三方廉面積除立方體積．得



次商數。即併初商數自乘再乘。得數與原積相減。雖爲省去長廉小隅一層。然方邊位數少者還爲簡易。至於方邊位數過四位以上。則累次自乘再乘。反比遞析之理爲煩矣。

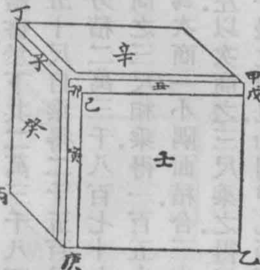
設如正方體積一十四萬八千八百七十七尺。開立方問每一邊數幾何。此題正方體積之六位。皆以尺命位。似與前題分丈尺者不同。然其取方積三位續書於下。其末位卽命爲單位。立算則與丈尺同也。

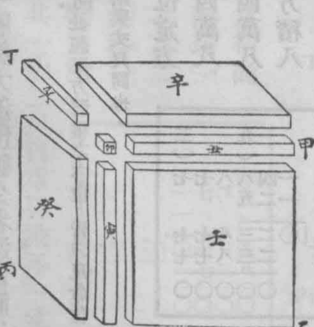
法列正方體積一十四萬八千八百七十七尺。自末位起算每方積三位定方邊一位。故隔二位作記。乃於七尺上定單位。八千尺上定十位。其一十四萬八千尺爲初商積。以初商本位計之。則八千尺爲初商積之單位。而一十四萬八千尺爲一百四十八。止與五自乘再乘之數相準。卽定初商爲五。書於方積八千尺之上。而以五自乘再乘之一百二十五。書於初商積之下。相減餘二萬三千尺。爰以方邊第二位餘積八百七十七尺續書於下。共二萬三千八百七十七尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之五作五十尺。自乘得二千五百尺。三因之得七千五百尺。爲次商三方廉面積。以除方積二萬三千八百七十七尺。足三尺。卽定次商爲三尺。書於方積七尺之上。而以初商之五十尺與次商之三尺相乘得一百五十尺。三因之得四百五十尺。爲次商三長廉面積。復以次商三尺自乘得九尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得七千九百五十九尺。爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商之三尺乘之。得二萬三千八百七十七尺。與餘積相減恰盡。是開得五十三尺。爲正方體積每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方體形每邊五十三尺。其中

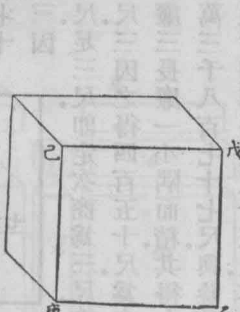


函積一十四萬八千八百七十七尺。是爲共積。其從一角所分戊乙庚己方體每邊五十尺。即初商邊數。其中函積一十二萬五千尺。即初商自乘再乘之數。所餘辛形壬形癸形三方體爲三方廉。其每邊五十尺即初商數。其厚三尺即次商數。而子形丑形寅形三長方體爲三長廉。其每邊五十尺亦即初商數。其闊其厚皆三尺。亦即次商數。方廉有三。故三倍初商之自乘爲廉法。以定次商。其卯形一小正方體爲隅。其長與闊與厚皆同爲三尺。亦即次商數。故以次商爲隅法。合辛壬癸三方廉。子丑寅三長廉。卯一方隅而成一磬折體形。附於初商自乘再乘之方體三面。而成一甲乙丙丁之總正方體積也。

又法。列積一十四萬八千八百七十七尺。自末位起算作記。定位同前。乃截一十四萬八千尺爲初商積。與五十自乘再乘之數相準。則定初商五十尺。書於方積八千尺之上。而以五十自乘再乘







之一十二萬五千尺．書於原積一十四萬八千之下．相減餘二萬三千尺．乃合第二位積八百七十七尺．共二萬三千八百七十七尺．爲次商廉隅之共積．而以初商五十尺自乘得二千五百尺．三因之得七千五百尺．爲次商三方廉面積．即以三方廉面積除方積二萬三千八百七十七尺．足三尺．即定次商爲三尺．書於方積七尺之上．合初商共得五十三尺．自乘再乘得一十四萬八千八百七十七尺．與原積符合．相減恰盡．即定立方邊爲五十三尺也．此法亦止用三方廉面積除立方體積．得次商數．即併初商數自乘再乘以減原積也．

三）　五）
一四八八七七
一二五
七五〇〇｜〇二三八七七
一四八八七七
〇〇〇〇〇〇

設如正方體積一丈八百六十尺八百六十七寸．開立方問每一邊數幾何．

法列正方體積一丈八百六十尺八百六十七寸．自末位起算．每方積三位定方邊一位．故隔二位作記．即於七寸上定寸位．空尺上定尺位．一丈上定丈位．其一丈爲初商積．與一丈自乘再乘之數相合．即定初商爲一丈．書於方積一丈之上．而以一丈自乘再乘之一丈．書於初商積之下．相減恰盡．爰以方邊第二位餘積八百六十尺續書於下．爲次商廉隅之共積．乃以初商之一丈作一十尺．自乘得一百尺．三因之得三百尺．爲次商三方廉面積．以除八百六十尺．足二尺．即定次商爲二尺．書於方積空尺之上．而以初商之一十尺與次商之二尺相乘．得二十尺．三因之得六十尺．爲次商三長廉面積．復以次

三）　二）　一）
一八六〇八六七
一
三六四｜〇八六〇
七二八
四四二八九｜一三二八六七
一三二八六七
〇〇〇〇〇〇

商之二尺自乘得四尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三百六十四尺。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之二尺乘之。得七百二十八尺。與次商廉隅共積相減。餘一百三十二尺。即一十三萬二千寸。復以方邊第三位餘積八百六十七寸續書於下。共一十三萬二千八百六十七寸。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一丈二尺作一百二十寸。自乘得一萬四千四百寸。三因之得四萬三千二百寸。爲三商三方廉面積。以除一十三萬二千八百六十七寸。足三寸。即定三商爲三寸。書於方積七寸之上。而以初商次商之一百二十寸。與三商之三寸相乘。得三百六十寸。三因之得一千零八十寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得四萬四千二百八十九寸。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之三寸乘之。得一十三萬二千八百六十七寸。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得一丈二尺三寸。爲正方體積每一邊之數也。

設如正方體積九千四百八十一萬八千八百一十六尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積九千四百八十一萬八千八百一十六尺。自末位起算。每方積三位。定方邊一位。故隔二位作記。乃於六尺上定單位。八千尺上定十位。四百萬尺上定百位。其九千四百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則四百萬尺。爲初商積之單位。而九千四百萬尺爲九十四。止與四自乘再乘之數相準。即定初商爲四。書於方積四百萬尺之上。而以四自乘再乘之六十四。書於初商積之下。相減餘三千萬尺。爰以方邊第二位餘積八十一萬八千尺。續書於下。共三千零八十一萬八千尺。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則八千尺爲次商積之單位。而三千零八十一萬八千尺。爲三萬零八百一十八。而初商之

四。即爲四十。乃以初商之四十自乘得一千六百。三因之得四千八百。爲次商三方廉面積。以除三萬零八百一十八。足五倍。即定次商爲五。書於方積八千尺之上。而以初商之四十與次商之五相乘得二百。三因之得六百。爲次商三長廉面積。復以次商之五自乘得二十五。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得五千四百二十五。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之五乘之。得二萬七千一百二十五。與次商廉隅共積相減。餘三百六十九萬三千尺。復以方邊末位餘積八百一十六尺續書於下。共三百六十九萬三千八百一十六尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之四百五十尺自乘得二十萬零二千五百。三因之得六十萬零七千五百。爲三商三方廉面積。以除三百六十九萬三千八百一十六尺。足六倍。即定三商爲六。書於方積六尺之上。而以初商次商之四百五十與三商之六相乘得二千七百。三因之得八千一百。爲三商三長廉面積。復以三商之六自乘得三十六。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得六十一萬五千六百三十六。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之六乘之。得三百六十九萬三千八百一十六。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得四百五十六尺。爲正方體積每一邊之數也。

四） 五） 六）
九四八一八八一六
六四

五四二五 | 三〇八一八
二七一二五

六一五六三六 | 〇三六九三八一六
三六九三八一六

〇〇〇〇〇〇〇

設如正方體積三百四十七丈四百二十八尺九百二十七寸。開立方問每一邊數幾何。

法列正方體積三百四十七丈四百二十八尺九百二十七寸。自末位起算每隔二位作記。即於七寸上定寸位。八尺上定尺位。七丈上定丈位。其三百四十七丈爲初商積。與七丈自乘再乘之數相準。即定初商爲七丈。書於方積七丈之上。而以七丈自乘再乘之三百四十三丈。書於初商積之下。相減餘四丈。即四千尺。爰以方邊第二位餘積四百二十八尺續書於下。共四千四百二十八尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之七丈作七十尺。自乘得四千九百尺。三因之得一萬四千七百尺。爲次商三方廉面積。以除方積四千四百二十八尺。其數不足。是次商爲空位也。乃書一空於方積八尺之上。以存次商之位。復以方邊末位餘積九百二十七寸續書於下。共四千四百二十八尺九百二十七寸。即四百四十二萬八千九百二十七寸。爲三商廉隅之共積。仍以次商三方廉面積一萬四千七百尺作一百四十七萬寸。爲廉法。以除四百四十二萬八千九百二十七寸。足三寸。即定三商爲三寸。書於方積七寸之上。又以初商之七丈爲七百寸。與三商之三寸相乘。得二千一百寸。三因之得六千三百寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得一百四十七萬六千三百零九寸。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之三寸乘之。得四百四十二萬八千九百二十七寸。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得七丈零三寸爲正方體積每一邊之數也。此法商出之方邊有空位。凡廉法除餘積而數不足者。皆依此例推之。

七）　〇）　三）
三四七四二八九二七
三四三
一四七六三〇九｜〇〇四四二八九二七
四四二八九二七
〇〇〇〇〇〇〇

設如正方體積三千九百三十萬四千尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積三千九百三十萬四千尺。補三空位以足其分。自末空位起算。每隔二位作記。乃於空尺上定單位。四千尺上定十位。九百萬尺上定百位。其三千九百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則九百萬尺爲初商積之單位。而三千九百爲三十九。止與三自乘再乘之數相準。即定初商爲三。書於方積九百萬尺之上。而以三自乘再乘之二十七。書於初商積之下。相減餘一千二百萬尺。爰以方邊第二位餘積三十萬四千尺。續書於下。共一千二百三十萬四千尺。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則四千尺爲次商積之單位。而一千二百三十萬四千尺爲一萬二千三百零四。而初商之三。即爲三十。乃以初商之三十自乘得九百。三因之得二千七百。爲次商三方廉面積。以除餘積一萬二千三百零四。足四倍。即定次商爲四。書於方積四千尺之上。又以初商之三十與次商之四相乘得一百二十。三因之得三百六十。爲次商三長廉面積。復以次商之四自乘得一十六。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三千零七十六。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之四乘之。得一萬二千三百零四。與餘積相減恰盡。是開得三百四十尺。爲正方體積每一邊之數也。此法方積之末有三空位。故所得方邊之末亦補一空位。凡設數未至單位者。皆依此例補足位分。然後開之。

設如正方體積一丈八百七十九尺零八十寸九百零四分。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積一丈八百七十九尺零八十寸九百零四分。自末位起算。每隔二位作記。於四分上定分位。空寸上定寸位。九尺上定尺位。一丈上定丈位。其一丈爲初商積。與一丈自乘再乘之數相合。即定初商爲一丈。書於方積一丈之上。而以一丈自乘再乘之一丈。書於初商積之下。相減恰盡。爰以方邊第二位餘積八百七十九尺續書於下。爲次商廉隅之共積。乃以初商之一丈作一十尺。自乘得一百尺。三因之得三百尺。爲次商三方廉面積。以除八百七十九尺。足二尺。即定次商爲二尺。書於方積九尺之上。而以初商之一十尺與次商之二尺相乘得二十尺。三因之得六十尺。爲次商三長廉面積。復以次商之二尺自乘得四尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三百六十四尺。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之二尺乘之。得七百二十八尺。與餘積相減。仍餘一百五十一尺。即一十五萬一千寸。又以方邊第三位餘積八十寸。續書於下。共一十五萬一千零八十寸。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一丈二尺。作一百二十寸。自乘得一萬四千四百寸。三因之得四萬三千二百寸。爲三商三方廉面積。以除一十五萬一千零八十寸。足三寸。即定三商爲三寸。書於方積空寸之上。而以初商次商之一百二十寸與三商之三寸相乘。得三百六十寸。三因之得一千零八十寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積合三

四）　三）　二）　一）
一八七九〇八〇九〇四
一

三六四｜〇八七九
　　　　七二八

四四二八九｜一五一〇八〇
　　　　　一三二八六七

四五五三四七六｜〇一八二一三九〇四
　　　　　　　一八二一三九〇四
　　　　　　　〇〇〇〇〇〇〇〇〇

方廉三長廉一小隅面積．共得四萬四千二百八十九寸．爲三商廉隅共法．書於餘積之左．以三商之三寸乘之．得一十三萬二千八百六十七寸．與餘積相減．仍餘一萬八千二百一十三寸．卽一千八百二十一萬三千分．又以方邊第四位餘積九百零四分續書於下．共一千八百二十一萬三千九百零四分．爲四商廉隅之共積．乃以初商次商三商之一百二十三寸．作一千二百三十分．自乘得一百五十一萬二千九百分．三因之得四百五十三萬八千七百分．爲四商三方廉面積．以除一千八百二十一萬三千九百零四分．足四分．卽定四商爲四分．書於方積四分之上．而以初商次商三商之一千二百三十分．與四商之四分相乘．得四千九百二十分．三因之得一萬四千七百六十分．爲四商三長廉面積．復以四商之四分自乘．得一十六分．爲四商一小隅面積．合三方廉三長廉一小隅面積．共得四百五十五萬三千四百七十六分．爲四商廉隅共法．書於餘積之左．以四商之四分乘之．得一千八百二十一萬三千九百零四分．與餘積相減恰盡．是開得一丈二尺三寸四分．爲正方體積每一邊之數也．

設如正方體積八十億六千零一十五萬零一百二十五尺．開立方．問每一邊數幾何．

法列正方體積八十億六千零一十五萬零一百二十五尺．自末位起算．每隔二位作記．於五尺上定單位．空千尺上定十位．空百萬尺上定百位．八十億尺上定千位．其八十億尺爲初商積．以初商本位計之．則八十億尺爲初商積之單位．而八十億尺爲八．止與二自乘再乘之數相合．卽定初商爲二．書於方積八十億尺之上．而以二自乘再乘之八．書於初商積之下．相減恰盡．爰以方邊第二位餘積六千萬尺續書於下．爲次商廉隅之共積．以次商本位計之．則空百萬尺爲次商之單位．而六千萬尺爲六十．而初商

之二卽爲二十。故以初商之二十自乘得四百。三因之得一千二百。爲次商三方廉面積。以除六十。其數不足。是次商爲空位。乃書一空於方積空百萬尺之上。以存次商之位。復以方邊第三位餘積一十五萬尺續書於下。共六千零一十五萬尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則空千尺爲三商之單位而六千零一十五萬尺爲六萬零一百五十。而初商之二百次商之空卽爲空十。故以初商次商之二空作二百自乘得四萬。三因之得十二萬。爲三商三方廉面積。以除六萬零一百五十。其數仍不足。是三商亦爲空位。乃再書一空於方積空千尺之上。以存三商之位。復以方邊末位餘積一百二十五尺續書於下。共六千零一十五萬零一百二十五尺。爲四商廉隅之共積。以四商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商三商之二千空百空十自乘得四百萬尺。三因之得一千二百萬尺。爲四商三方廉面積。以除六千零一十五萬零一百二十五尺。足五尺。卽定四商爲五尺。書於方積五尺之上。而以初商之二千尺與四商之五尺相乘得一萬尺。三因之得三萬尺。爲四商三長廉面積。復以四商之五尺自乘得二十五尺。爲四商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得一千二百零三萬零二十五尺。爲四商廉隅共法。書於餘積之左。以四商之五尺乘之。得六千零一十五萬零一百二十五尺。與餘積相減恰盡。是開得二千零五尺。爲正方體積每一邊之數也。此法商出之方邊有二空位。凡開立方遇此類者。皆依此例推之。