丛书总顾问 杨武▶

《奥赛王》步入“十二五”时期的最新力作

武汉、黄冈、启东一线特高级教师联袂打造

适合各种版本教材

King of the Olympic games

奥赛王

培优新航标

主编 夏永忠

知识+技能+方法=能力全面提升

探究+应用+创新=信心深度递增

能力+信心=成功

九年级

数学

江苏美术出版社

丛书总顾问 杨武▶

《奥赛王》步入“十二五”时期的最新力作

武汉、黄冈、启东一线特高级教师联袂打造

适合各种版本教材

King of the Olympic games

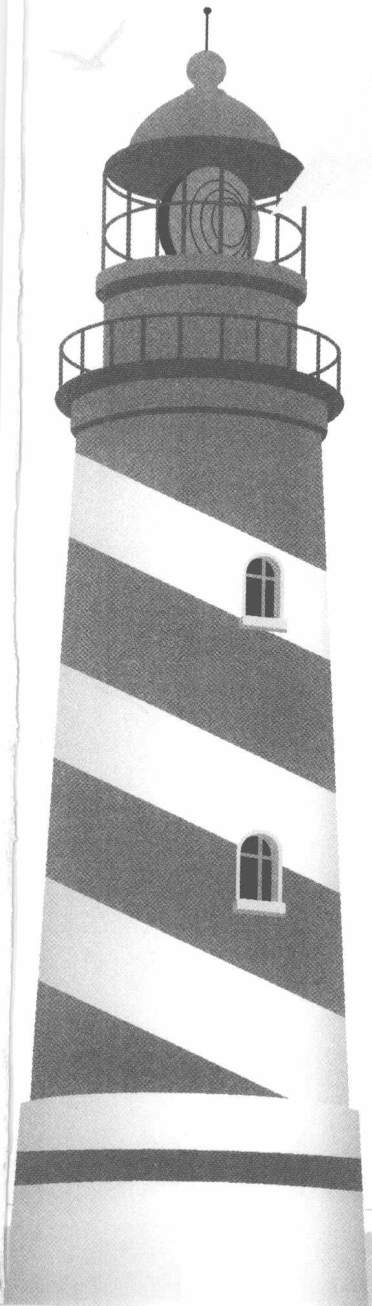
奥赛王

培优新航标

主　编：夏永忠

副主编：董严清　胡友明　曾　涛　邹永义

编　委：蔡章武　陈孝文　董严清　董俊峰　胡仁仪　闵泽平　陶　峰　陶月电　夏世峰　夏永忠　夏玉焰　徐建军　曾　涛　邹永义（按拼音先后排列）



九年级 数学

江苏美术出版社

图书在版编目(CIP)数据

培优新航标.九年级数学/夏永忠主编. —南京:江苏美术出版社,2011.10

ISBN 978-7-5344-4068-7

Ⅰ.①培… Ⅱ.①夏… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 214573 号

出品人	周海歌
项目统筹	程继贤 周宇慧
市场统筹	段 炼 刘晓东
责任编辑	王林军 魏申申
特邀编辑	韩 芹
装帧设计	灵动策划
插图设计	黄如驹
责任校对	刁海裕
责任监印	贲 炜

书名	**培优新航标·九年级数学**
出版发行	凤凰出版传媒集团(南京市湖南路1号A楼 邮编:210009) 凤凰出版传媒股份有限公司 江苏美术出版社(南京市中央路165号 邮编:210009)
集团网址	http://www.ppm.cn
出版社网址	http://www.jsmscbs.com.cn
经销	凤凰出版传媒股份有限公司
印刷	南京师范大学印刷厂
开本	787mm×1092mm 1/16
印张	15.5
版次	2011年11月第1版 2011年11月第1次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5344-4068-7
定价	33.80元

营销部电话 025-68155667 68155670 营销部地址 南京市中央路165号5楼

江苏美术出版社图书凡印装错误可向承印厂调换

前　言

当前，教育改革如火如荼。在此背景下，教学方式，特别是学的方式正在受到越来越多师生的关注，对学生学习方式的研究正在深入进行。深化课改的重要理念之一便是倡导以学习者为中心的教学方式，教学中，学生应该拥有更多的学习自主权和获得更多具有活力的学习空间。畅游知识海洋的学子们迫切需要在自主学习的环境中拥有丰富的资源和学习工具。为此，我们《奥赛王》团队在深得广大读者支持和信赖的基础上，借“十二五”开局之年，发挥品牌优势，集合强势资源，精心推出这套最新力作，打造培优教辅中的新航母！

这套丛书的指导思想是，相信每一个学生都有能力学习好，做到凡学习者最终应该是合格者和成功者，从而达到培养大面积优秀者的目的。同时，我们的这套书里更有能让那些优秀者更优秀的指导和训练。我们通过能力训练与培养信心的方式，使学生学会学习，体验快乐，获得成功！这是我们这套书有别于一般者之处。全书强化知识技能的训练和科学方法的指导，使学生的素质能力全面提升；注重探究过程的体验和应用创新的拓展，使学生的信心和创造力深度递增。

丛书的主要栏目如下：

名家导航——倾听生动活泼的导语，讲述引人入胜的故事，带你步入科技前沿，关注社会热点，与大师深度对话……

知识清单——紧紧回扣教材，着力夯实基础，使你学会梳理，获取成功秘笈。

典例视窗——围绕每讲知识点，精选典型例题，揭示规律，引导方法；每道例题后配置一两道“同类尝试”习题，使你能举一反三，触类旁通；例题旁悬置灵活多变的动态栏目，指点迷津，警示误区，归纳中考竞赛热点，获取智慧锦囊，点燃思维火花……

智能升级——对每讲所学知识进行提炼和升华。通过学情的分析，课标的解读，有针对性的聚焦考点，预测考向。这是精华之所在，你领悟透了，有事半功倍之效。

实战演练——训练题成阶梯分布：“基础训练，立足课标”，“技能提升，面向中考”，“赛题链接，冲击金牌”，真题原味呈现，能力全面提升。

另外，本书还利用页脚设置了“轻松一刻”栏目，每则内容不同，正反问答相应，可谓匠心独具，使你在紧张的遨游涉猎之余能有片刻轻松。

丛书彰显了以下特色：

人文性——本书在每一细微之处无不渗透人文关怀。在编排体例、材料选取、方法指点、语言表述诸方面都是以兴趣为原点，激发读者学习信心和动力。"名家导航""轻松一刻"能让你感受学习的奇妙与乐趣，"共勉阁""名师堂""智慧锦囊"让你受益无穷。

自主性——本书为学生的自主学习提供友好的平台。"知识清单""同类尝试""实战演练""期中(末)训练营"，循序渐进，分级落实；六四对照分栏的创新设计，左栏基础讲解，右栏深入总结，技巧要领齐备，思维训练科学。

基础性——每个学科对各年级知识点进行了有机整合，分专题解读。知识系统化，训练科学化，目标合理化。重难点知识剖析到位，方法规律总结全面。

前瞻性——本书转变了过去以知识立意为导向，而是以发展能力为导向。注重培养《课程标准》提出的三维目标，培养信息时代所需要的新素质。选材紧跟时代，贴近生活，关注前沿，捕捉热点，能力培养到位。

权威性——本书汇聚了众多一线名师多年积累的心血智慧，邀请到许多中考命题专家、全国奥赛金牌教练的积极参与，对最新考纲进行权威解读，让最新资源在书中全真展现。

有效性——本书的创作团队对各版本的教材都有深入的了解，对各地的学情展开了充分的调研，加之从策划、撰稿、审稿到校对诸环节严格把关，书中分享的信息把握精准，考点指向明确。所以本书阅读的群体广，在各地的同步训练、培优竞赛辅导中都非常实用有效。

我们相信，本书一定能给你带来一份惊喜，引导你在驶入知识海洋的航程中，披荆斩棘，乘风破浪，顺利到达成功的彼岸！

尽管我们工作认真负责，但由于时间紧，任务重，编写过程中疏漏和不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

2011年6月于黄冈

目　　录

第一讲　二次根式

名家导航

【李氏恒等式】　数学家李善兰在级数求和方面的研究成果，在国际上被命名为“李氏恒等式”．李善兰，中国清代数学家、天文学家、翻译家和教育家，近代科学的先驱者．原名心兰，字竞芳，号秋纫，别号壬叔，浙江海宁县硖石镇人，生于嘉庆十六年，卒于光绪八年．

李善兰自幼酷爱数学．十岁时学习《九章算术》．十五岁时读明末徐光启、利玛窦合译的欧几里得《几何原本》前六卷，尽解其意．1845 年前后就得到并发表了具有解析几何思想和微积分方法的数学研究成果——“尖锥术”．

李善兰在数学研究方面的成就，主要有尖锥术、垛积术和素数论三项．尖锥术理论主要见于《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》三种著作，成书年代约为 1845 年，当时解析几何与微积分学尚未传入中国．

各种三角函数和反三角函数的展开式，以及对数函数的展开式，在使用微积分方法处理数学问题方面取得了创造性的成就．垛积术理论主要见于《垛积比类》，写于 1859～1867 年间，这是有关高阶等差级数的著作．李善兰从研究中国传统的垛积问题入手，获得了一些相当于现代组合数学中的成果．例如，“三角垛有积求高开方廉隅表”和“乘方垛各廉表”实质上就是组合数学中著名的第一种斯特林数和欧拉数．驰名中外的“李善兰恒等式”自 20 世纪 30 年代以来，受到国际数学界的普遍关注和赞赏．可以认为，《垛积比类》是早期组合论的杰作．

知识清单

1. 一般地，我们把形如________的式子叫做二次根式，符号“$\sqrt{\ }$”称为________．
2. 如果二次根式有如下两个特点：
   (1)被开方数不含________；
   (2)被开方数中不含能开得尽方的________，那么就把这类二次根式叫做最简二次根式．
3. 几个二次根式化为最简二次根式后，如果________相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式．
4. 二次根式的主要性质：
   (1)$\sqrt{a}$________$0(a\geqslant 0)$
   (2)$(\sqrt{a})^2=$________$(a\geqslant 0)$
   (3)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}\underline{\qquad\qquad}(a>0)\\ \underline{\qquad\qquad}(a=0)\\ \underline{\qquad\qquad}(a<0)\end{cases}$
   (4)$\sqrt{ab}=$________$(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=$________$(a\geqslant 0,b>0)$
   (5)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=$________$(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$________$(a\geqslant 0,b>0)$
5. 两个含有二次根式的代数式相乘，若它们的积不含________，则称这两个二次根式互为有理化因式；把分母中的________化去叫做分母有理化．

轻松驿站

轻松一刻：

世界上最小的岛在哪里？

典例视窗

例 1 (1)下列二次根式 $\sqrt{45a}$，$\sqrt{30}$，$\sqrt{2\frac{1}{2}}$，$\sqrt{40b^2}$，$\sqrt{54}$，$\sqrt{17(a^2+b^2)}$ 中最简二次根式是________.

(2)已知 $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+3$，则 $x^y=$________.

(3)(华师一附中招生)把 $(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}$ 根号外的因式移到根号内结果为( )

A. $\sqrt{a-b}$　　B. $\sqrt{b-a}$　　C. $-\sqrt{b-a}$　　D. $-\sqrt{a-b}$

[点击突破口] (1)最简二次根式是被开方数既不含分母又不含开得尽方的因数或因式；(2)从被开方数的非负性入手；(3)被开方数隐含 $b-a>0$.

[完全解答] (1) $\sqrt{30}$，$\sqrt{17(a^2+b^2)}$.

(2)由 $\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$ 得 $x=\pm 2$，$\therefore y=3$.

$\therefore x^y=8$ 或 -8.

(3) $\because \frac{1}{b-a}>0$，$\therefore b-a>0$. $\therefore a-b<0$.

$\therefore$ 原式 $=-(b-a)\sqrt{\frac{1}{b-a}}=-\sqrt{(b-a)^2\cdot\frac{1}{b-a}}=-\sqrt{b-a}$，故选 C.

◎名师堂◎

$\sqrt{a}$ 具有双重非负性：

①$a\geqslant 0$

②$\sqrt{a}\geqslant 0$.

◎警示误区◎

因式从根号外移到根号内时易忽视符号问题.

【同类尝试】

1.(2010·广东湛江)下列二次根式是最简二次根式的是( )

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B. $\sqrt{4}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{8}$

2.(2010·湖北荆门)计算 $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=$________.

3.代数式 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 化简为( )

A. $\sqrt{-a}$　　B. $-\sqrt{-a}$　　C. $\sqrt{a}$　　D. $-\sqrt{a}$

例 2 若 $x+y+z+3=2(\sqrt{x}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z-1})$，求 $(x+y+z)^{y-z}$ 的值.

[点击突破口] 由题知 $x\geqslant 0$，$y+1\geqslant 0$，$z-1\geqslant 0$，故 x，$y+1$，$z-1$ 可分别化为 $(\sqrt{x})^2$、$(\sqrt{y+1})^2$、$(\sqrt{z-1})^2$ 的形式，然后配成几个完全平方和的形成，再利用非负性可求出 x,y,z 的值.

[完全解答] 原式可化为 $x+(y+1)+(z-1)+3=2\sqrt{x}+2\sqrt{y+1}+2\sqrt{z-1}$，

由题可知 $x\geqslant 0$，$y+1\geqslant 0$，$z-1\geqslant 0$，故有

$[(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1]+[(\sqrt{y+1})^2-2\sqrt{y+1}+1]+[(\sqrt{z-1})^2-2\sqrt{z-1}+1]=0$

即 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y+1}-1)^2+(\sqrt{z-1}-1)^2=0$.

又 $\because (\sqrt{x}-1)^2\geqslant 0$，$(\sqrt{y+1}-1)^2\geqslant 0$，$(\sqrt{z-1}-1)^2\geqslant 0$.

$\therefore \sqrt{x}-1=0$，$\sqrt{y+1}-1=0$，$\sqrt{z-1}-1=0$.

◎名师堂◎

二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 可以逆用为 $a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$.

轻松一刻答案：

马路上的安全岛

解得 $x=1,y=0,z=2$.

$\therefore(x+y+z)^{y-z}=(1+0+2)^{0-2}=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

【同类尝试】

4.(2010·湖北荆门)若 a,b 为实数，且满足 $|a-2|+\sqrt{-b^2}=0$，则 $b-a$ 的值为(　　)

A. 2　　B. 0　　C. -2　　D. 以上都不对

5. 已知$\triangle ABC$的三边 a,b,c 满足 $a^2+b+|\sqrt{c-1}-2|=10a+2\sqrt{b-4}-22$，则$\triangle ABC$为(　　)

A. 等腰三角形　B. 等边三角形　C. 直角三角形　D. 等腰直角三角形

例 3　已知$\sqrt{17-n}$是整数，求自然数 n 的值.

[点击突破口]　若$\sqrt{a}$是整数，则 a 必为完全平方数，因此$\sqrt{17-n}=\sqrt{a^2}=a$(a为自然数)，而 $17-n\geqslant0$ 即 $n\leqslant17$，故 $0\leqslant n\leqslant17$，列举出 0～17 之间的完全平方数有 $0^2,1^2,2^2,3^2,4^2$，分情况可一一求出 n 的可能值.

[完全解答]　$\because 17-n\geqslant0$，$\therefore n\leqslant17$.

又$\because n$ 为自然数，$\therefore n\geqslant0$，$\therefore 0\leqslant n\leqslant17$.

$\because\sqrt{17-n}$为整数，$\therefore 17-n$ 为 0～17 之间完全平方数.

$\therefore 17-n=0^2$ 或 1^2 或 2^2 或 3^2 或 4^2.

解得 $n=17$ 或 16 或 13 或 8 或 1.

故自然数 n 的值为 1 或 8 或 13 或 16 或 17.

◎指点迷津◎

判断被开方数为完全平方数时，先确定其取值范围，再探究二次根式为整数时字母的取值，一般通过列方程求解.

【同类尝试】

6.(2010·湖北孝感)使$\sqrt{12n}$是整数的最小正整数 $n=$________.

7.(2010·四川自贡)已知 n 是一个正整数，$\sqrt{135n}$是整数，则 n 的最小值是(　　)

A. 3　　B. 5　　C. 15　　D. 25

例 4　(2010·全国初中数学联赛)若实数 a,b,c 满足等式 $2\sqrt{a}+3|b|=6$，$4\sqrt{a}-9|b|=6c$，则 c 可能取的最大值为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

◎名师堂◎

利用二次根式的非负性化等式为不等式是竞赛中常见的思路.

[点击突破口]　题目已知中两个等式可看作是关于$\sqrt{a}$和$|b|$的方程组，用含 c 的式子表示出$\sqrt{a}$和$|b|$后结合其非负性可求出 c 的取值范围.

[完全解答]　联立$\begin{cases}2\sqrt{a}+3|b|=6,\\4\sqrt{a}-9|b|=6c,\end{cases}$解得$\begin{cases}\sqrt{a}=\frac{3c+9}{5},\\|b|=\frac{4-2c}{5}.\end{cases}$

$\because\sqrt{a}\geqslant0,|b|\geqslant0$,

$\therefore\begin{cases}\frac{3c+9}{5}\geqslant0,\\\frac{4-2c}{5}\geqslant0.\end{cases}$解之得 $-3\leqslant c\leqslant2$.

$\therefore c$ 的最大值为 2.

轻松驿站

轻松一刻：

放烟火时为什么不会射到星星？

轻松一刻答案：

因为星星会闪

【同类尝试】

8.(武汉竞赛)已知实数 a 满足 $|2006-a|+\sqrt{a-2007}=a$,那么 $a-2006^2$ 的值是( )

A. 2005　　B. 2006　　C. 2007　　D. 2008

9.(华中师大一附中网招)已知实数 a,b,c 满足 $\sqrt{a+b+c}+\sqrt{(a^2+2008)(b-6)}+|10-2b|=2$,则代数式 $ab+bc$ 的值为________.

智能升级

二次根式的性质是化根式为有理式的重要依据.运用性质时,先看二次根式是否是最简二次根式,如果被开方数的指数大于根指数,需将平方数移到根号外,移动时要注意被开方数的底数的正负情况.

实战演练

双基精练·立足课标

1.(2010·广东广州)若 $a<1$,化简 $\sqrt{(a-1)^2}-1=$( )

A. $a-2$　　B. $2-a$　　C. a　　D. $-a$

2.(2010·江苏淮安)下面四个数中与 $\sqrt{11}$ 最接近的数是( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 若 $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$,则 a,b 的大小关系是________.

4. 已知 $\sqrt{11-x}$ 为整数,则自然数 x 可取________.

5. 若 $\sqrt{(2x+1)(2-x)}=\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{2-x}$,则 x 的取值范围是________.

6. 计算.

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4.5}-\sqrt{12.5}-\frac{1}{2}\sqrt{200}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}$

(2) $\sqrt{6}\div\sqrt{27}\times\sqrt{50}$

(3) $(\sqrt{5}-1)^2+\frac{4}{\sqrt{5}+1}$

(4) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}+\frac{6}{\sqrt{7}-2}\div\frac{\sqrt{7}+2}{2}$

7. 矩形的长为 $\sqrt{5}+\sqrt{3}$,宽为 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$,求矩形的对角线长及矩形面积.

技能提升·面向中考

8.(2010·湖北黄石)已知 $x<1$,则 $\sqrt{x^2-2x+1}$ 化简的结果是( )

A. $x-1$　　B. $x+1$　　C. $-x-1$　　D. $1-x$

9.(2010·四川绵阳)下列各式计算正确的是( )

A. $m^2\cdot m^3=m^6$

轻松一刻答案:
因为星星会闪

B. $\sqrt{16\frac{1}{3}}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

C. $\sqrt[3]{2^3+3^3}=2+3=5$

D. $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}=-\sqrt{(1-a)^2\cdot\frac{1}{1-a}}=-\sqrt{1-a}(a<1)$

10.（2010·内蒙呼和浩特）已知 a、b 为两个连续的整数，且 $a<\sqrt{15}<b$，则 $a+b=$________.

11.（2010·福建德化）若整数 m 满足条件 $\sqrt{(m+1)^2}=m+1$，且 $m<\frac{2}{\sqrt{5}}$，则 m 的值是________.

12. 已知 a,b,c 是△ABC 的三边，化简 $\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}=$________.

13. 如图 1－1 所示，正方形的城堡的四周有一道护城河，宽度为 4m，一商人因事要进入城堡，但苦于四周无桥，幸好手中有两块 4m 长的木板，他能过河吗？

(1)当这块木板有一定的宽度时，能否只用这块木板过河？

(2)怎样搭木板才能过河？请你设计一种方案，确保他能过河.

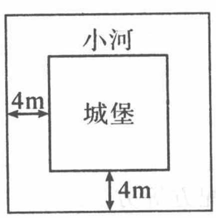


图 1－1

链接赛题·冲击金牌

14.（《数学周报》杯全国初中数学竞赛）计算 $\sqrt[n]{\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}}$（$n\geqslant2$ 的整数）的值为________.

15.（华中师大一附中招生）已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ $(x>0)$，

(1)求证：$0<f(x)-x<\frac{1}{x}$；

(2)试求 $M=f(1002)+f(1003)+f(1004)+\cdots+f(2005)$ 的整数部分.

★知识清单与同类尝试答案★

【知识清单】

1. $\sqrt{a}(a\geqslant0)$；二次根号

2. 分母；因数或因式

3. 被开方数

4. (1)$\geqslant$；(2)a；(3)a；0；$-a$；(5)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$；(6) $\sqrt{ab}$；$\sqrt{\frac{a}{b}}$

5. 二次根号；二次根号

【同类尝试】

1. C　2. 0　3. B　4. C

5. B　提示：原式可化为 $(a-5)^2+(\sqrt{b-4}-1)^2+|\sqrt{c-1}-2|=0$，故有 $a=5,b=5,c=5$，所以 $a=b=c$.

6. 3

7. C　提示：因为 $135n=3^2\times3\times5n$，所以当 $n=3\times5=15$ 时 $\sqrt{135n}=\sqrt{3^2\times3^2\times5^2}=45$.

8. C　提示：∵$a-2007\geqslant0$，∴$a\geqslant2007$，∴原式可化为 $a-2006+\sqrt{a-2007}=a$，即 $\sqrt{a-2007}=2006$，平方得 $a-2006^2=2007$.

9. -36　提示：由题意知 $b-6\geqslant0$，∴$b\geqslant6$.

故原方程可化为 $\sqrt{a+b+c}+\sqrt{(a^2+2008)(b-6)}=12-2b$.

∴$12-2b\geqslant0$ 即 $b\leqslant6$.

∴$b=6$，故 $\sqrt{a+b+c}=0$，∴$a+c=-b=-6$.

∴$ab+bc=b(a+c)=6\times(-6)=-36$.

轻松驿站

轻松一刻：

有瓶葡萄酒，小王用尽办法都无法拔开瓶盖，结果他不打破酒瓶，也不钻洞，仍然喝到了酒，为什么？

第二讲　二次根式的化简与求值

名家导航

【华氏定理】　数学家华罗庚关于完整三角和的研究成果被国际数学界称为“华氏定理”；另外他与数学家王元提出多重积分近似计算的方法被国际上誉为“华—王方法”.

华罗庚，中国现代数学家.1910年11月12日生于江苏省金坛县.华罗庚1924年金坛中学初中毕业之后，在上海中华职业学校学习不到一年，因家贫辍学，但他刻苦自修数学，1930年在《科学》上发表了关于代数方程式解法的文章，被邀到清华大学工作，开始了数论的研究，1934年成为中华教育文化基金会研究员.1936年作为访问学者去英国剑桥大学工作.1938年回国，受聘为西南联合大学教授.1946年赴美国，任普林斯顿数学研究所研究员、普林斯顿大学教授，1948年始，他为伊利诺伊大学教授.1985年6月12日，华罗庚应邀到日本东京大学作学术报告.他先中文，后改用英语演讲.日本学者被他精彩的演说深深吸引，原定45分钟的报告在经久不息的掌声中被延长到一个多小时.当他满头大汗结束讲话时，突然心脏病发作倒在讲台上.他用行动实践了自己的诺言：“最大的希望就是工作到生命的最后一刻.”

知识清单

1. 把________中的根号化去叫做分母有理化；把________中的根号化去叫做分子有理化，分子(或分母)有理化就是在二次根式的分子分母同乘以分子(或分母)的________.
2. 双重二次根式化简的关系式：
$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}=$________$(x>y\geqslant 0)$.
3. 二次根式的化简求值问题，要求先________，再________.
4. 二次根式的化简求值问题常用到因式分解、取倒数或配方等方法.

典例视窗

例1　(1)(2010·福建德化)化简$\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)-\dfrac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{b}}$.

(2)(2010·武汉市初中数学竞赛)若$a\neq b$，化简$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}$的结果为(　　)

A. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　B. $-\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　C. $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$　　D. 0

[点击突破口]　(1)注意挖掘题目中的隐含条件：$a\geqslant 0,b>0$.

(2)由二次根式的意义可知$a\leqslant 0,b\leqslant 0$，从而可将被开方数配方为$2\sqrt{ab}-a-b=(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2$.

[完全解答]　(1)原式$=a+2\sqrt{a}-a=2\sqrt{a}$.

(2)$\because a\leqslant 0,b\leqslant 0$,

◎警示误区◎

二次根式的化简要注意根据题目中的隐含条件，如(2)中易忽视a、b的符号.

轻松一刻答案：
把软木塞塞到瓶子里

$\therefore$原式$=\sqrt{2\sqrt{ab}+(\sqrt{-a})^2+(\sqrt{-b})^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$.

故选 C.

【同类尝试】

1.(2010·江西中考)化简$\sqrt{3}-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$的结果是(　　)

A. 3　　B. -3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2.(全国联赛)化简 $2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$.

例 2　已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$,$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$,求 x^4+y^4 的值.

[点击突破口]　由已知得 $x=2-\sqrt{3}$,$y=2+\sqrt{3}$,故 $x+y=4$,$xy=1$,再将 x^4+y^4 化为与 $x+y$ 和 xy 有关的形式.

[完全解答]　$\because x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$,$y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$,

$\therefore x+y=4$,$xy=1$.

$\therefore x^4+y^4$

$=[(x+y)^2-2xy]^2-2(xy)^2$

$=(16-2)^2-2=194$.

◎指点迷津◎

形如 x^4+y^4 的代数式常通过配方化为与 $x+y$ 和 xy 有关的形式,然后再代值计算.

【同类尝试】

3.已知 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$,求$\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的值.

4.(2010·黄冈预选赛)若 a,b 是实数,且 $a^2=\sqrt{b-1}+\sqrt{2-2b}+4$,则 $a+b$ 的值是(　　)

A. 3 或 -3　　B. 3 或 -1　　C. -3 或 -1　　D. 3 或 1

例 3　(天津竞赛)已知 $x+\frac{1}{x}=7(0<x<1)$,则$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$的值为(　　)

A. $-\sqrt{7}$　　B. $-\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{5}$

[点击突破口]　将要求的$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$平方后可发现它与 $x+\frac{1}{x}$ 有一定的联系,从而可整体代入求值.

[完全解答]　$\because 0<x<1$,

$\therefore\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$.

◎名师堂◎

二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 可逆用为 $|a|=\sqrt{a^2}$,化简更方便.

轻松驿站

轻松一刻:

一个人站在第 20 层楼阳台的护栏掉了下来却没有一点儿事,请问为什么?

$$\therefore \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{x+\frac{1}{x}-2}=-\sqrt{7-2}=-\sqrt{5}.$$

故选 B.

【同类尝试】

5.(天津竞赛)若$\frac{1}{m}-|m|=1$,则$\frac{1}{m}+|m|$的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

6. 已知 $a-\frac{1}{a}=\sqrt{2}$,则 $a+\frac{1}{a}$的值为(　　)

A. $\sqrt{6}$　　B. $-\sqrt{6}$　　C. $\pm\sqrt{6}$　　D. 6

例 4　(2010·《数学周报》杯全国竞赛)已知 $a=\sqrt{5}-1$,求 $2a^3+7a^2-2a-12$ 的值.

[点击突破口]　利用已知构造关于 a 的零值多项式,建立所求多项式与此多项式的关系求解.

[完全解答]　$\because a=\sqrt{5}-1$, $\therefore a+1=\sqrt{5}$.

$\therefore a^2+2a-4=0$.

$\therefore$ 原式 $=2(a^3+2a^2-4a)+3(a^2+2a-4)$

$=2a(a^2+2a-4)+3(a^2+2a-4)$

$=(a^2+2a-4)(2a+3)=0$.

◎指点迷津◎

恰当的拆分、组合可使计算更快捷、简便.

【同类尝试】

7. 设 $a=\frac{16}{\sqrt{17}+1}$,求 $a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17$ 的值.

8.(五羊杯竞赛)若 $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$,求 $a^2+\sqrt{a^4+a+1}$的值.

智能升级

有关二次根式的化简求值的中考题和竞赛题,一般有三种题型:一是直接将已知数代入要求的代数式中,运用二次根式的加减乘除法则进行计算;二是将要求的代数式先化简,再将条件二次根式的值代入求解;三是针对较复杂的二次根式的化简,有时需要将条件二次根式和要求的代数式同时变形,并且要有针对性和选择性地变形.

轻松一刻答案:
掉到室内

实战演练

双基精练·立足课标

1.(2010·山东潍坊)下列运算正确的是(　　)

A. $6\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{3a}$　　B. $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\times 3}$

C. $a^2\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{2}$

2.已知 $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x+y}=0$,则 $x-y$ 的值为(　　)

A. 2　　B. 6

C. 2 或 -2　　D. 6 或 -6

3.(2010·黄冈市预选赛)已知 $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)$,其中 $ab\neq 0$,则 $\frac{a-5b+\sqrt{ab}}{a+b+\sqrt{ab}}$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{7}$　　B. $\frac{6}{7}$

C. $\frac{4}{7}$　　D. 以上答案均不对

4.(2010·浙江杭州)先化简 $\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{6}\sqrt{24}-\frac{3}{2}\sqrt{12}\right)$,再求得它的近似值为________.(精确到 0.01,$\sqrt{2}\approx 1.414$,$\sqrt{3}\approx 1.732$.)

5.若 $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$,则 $\frac{x^{10}+x^6+x^4+1}{x^{10}+x^8+x^2+1}$ 的值为________.

6.观察下列各式:$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$,$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$,$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$,…,请你将发现的规律用含自然数 $n(n\geqslant 1)$ 的形式表示出来________.

技能提升·面向中考

7.已知 a 为实数,则代数式 $\sqrt{a+2}-\sqrt{8-4a}+\sqrt{-a^2}=$________.

8.设 $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,a 是 x 的小数部分,b 是 $-x$ 的小数部分,则 $a^3+b^3+3ab=$________.

9.(2010·湖南益阳)已知 $x-1=\sqrt{3}$,求代数式 $(x+1)^2-4(x+1)+4$ 的值.

10.计算:

(1) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}$

(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2009}}\right)(\sqrt{2010}+1)$

(3)(五市联赛) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$

11.已知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$,且 a,b,c 互不相等,求 $\frac{(\sqrt{a}-1)^2+(\sqrt{b}-1)^2+(\sqrt{c}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)+(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)+(\sqrt{c}-1)(\sqrt{a}-1)}$ 的值.

轻松驿站

轻松一刻:

什么地方很轻松就可以爬上去,却很难下得来?

❖ 链接赛题·冲击金牌 ❖

12.(武汉CASIO杯竞赛)已知 $a=\sqrt{2006}-\sqrt{2005}$,$b=\sqrt{2007}-\sqrt{2006}$,$c=\sqrt{2008}-\sqrt{2007}$,则 a,b,c 三者的大小关系为________.

13.(全国联赛)已知实数 x,y 满足 $(x-\sqrt{x^2-2008})(y-\sqrt{y^2-2008})=2008$,则 $3x^2-2y^2+3x-3y-2007$ 的值为________.

14.(江西竞赛)设 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+4})=9$,则 $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=$________.

15.(2010·江西竞赛)化简 $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 的结果是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

16.(2010·黄冈市预选赛)已知 $x+1=\sqrt{5x}$,求 $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}$ 的值.

★知识清单与同类尝试答案★

【知识清单】

1. 分母;分子;有理化因式

2. $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

3. 化简;代值计算

【同类尝试】

1. A

2. 1　提示:原式 $=2\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

$=2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})=1$

3. 3　提示:原式 $=\dfrac{(a-1)^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$

$=a-1-\dfrac{|a-1|}{a(a-1)}$.

$\because a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}>0$,

$\therefore$ 原式 $=a-1+\dfrac{1}{a}=2-\sqrt{3}-1+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$=3$.

4. B　提示:由 $\begin{cases}b-1\geqslant 0,\\ 2-2b\geqslant 0\end{cases}$ 得 $1\leqslant b\leqslant 1$,$\therefore b=1$.

$\therefore a^2=4$,故 $a=\pm 2$.

$\therefore a+b=3$ 或 -1.

5. D　提示:$\because \dfrac{1}{m}-|m|=1$,

$\therefore \dfrac{1}{m}=|m|+1>0$,即 $m>0$,$\therefore |m|=m$.

$\therefore \left(\dfrac{1}{m}+|m|\right)^2=\left(\dfrac{1}{m}-|m|\right)^2+4=1+4=5$.

$\therefore \dfrac{1}{m}+|m|=\sqrt{5}$.

6. C　提示:$\because a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{2}$,$\therefore a^2+\dfrac{1}{a^2}-2=2$.

$\therefore a^2+\dfrac{1}{a^2}+2=6$.

即 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=6$,$\therefore a+\dfrac{1}{a}=\pm\sqrt{6}$.

7. $\because a=\dfrac{16}{\sqrt{17}+1}=\sqrt{17}-1$,

$\therefore a+1=\sqrt{17}$,$\therefore (a+1)^2=17$ 即 $a^2+2a=16$.

原式 $=a^3(a^2+2a)-17a(a^2+2a)+33(a^2+2a)-48a-17$

$=16a^3-320a+2161$

$=16a(a^2+2a)-32(a^2+2a)-256a+2161$

$=256a-512-256a+2161=1649$.

8. $\because \left(a+\dfrac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}}\right)^2$,

$\therefore a^2+\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-a)$.

$\therefore a^4+a+1=\dfrac{1}{8}(1-a)^2+a+1=\dfrac{(a+3)^2}{8}$.

$\because a>0$,

$\therefore a^2+\sqrt{a^4+a+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(a+3)=\sqrt{2}$.

轻松一刻答案:

床上