大專升學必備

標準解析幾何

陳明哲編著

中央書局

標準解析幾何

陳明哲編著

中央書局

標 準 解 析 幾 何　　定價八元

編著者 陳　明　哲
發行人 張　煥　珪
印刷者 聯 合 印 刷 公 司
香港中環些利街六號

發行者 中 央 書 局　香港英皇道多寶大厦四樓

一九七六年十一月版

標準解析幾何

目　　次

第一章　坐　　標

第二章　軌跡與方程式

第三章 直　線

第四章 圓

第五章 拋物線

第六章 橢圓

第七章 雙曲線

第八章 普通二次方程式

第九章 高次曲線

第一章 坐 標

有向線段

一直線可視爲一點之運動而成的。其運動方向有二種。其中一方向叫做直線的正向，則另一方向叫做負向。如此有方向的直線叫做有向線段或叫做向量。

常以箭頭表明正向。

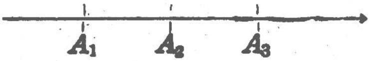
設 A, B 爲直線上二點，若從A向 B 爲正，則從 B 向 A 爲負，在有向線段 AB 上任取一點O，使O分線段 AB 爲 OA 與 OB 二部份，則OA 叫做正線段，OB 叫做負線段。

〔註〕 有時爲區別有向線段與普通不計方向的線段起見，可記有向線段爲$\overline{AB}$或$\overrightarrow{AB}$，而不計方向的絕對值，則記爲$|AB|$。

2. 沙爾定理 (Chales theorem)

今若在一有向直線上順次有三點，A_1, A_2, A_3，則

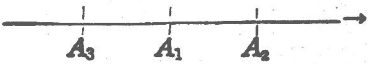
$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3$，然 $A_3A_1=-A_1A_3$



$$\therefore \quad A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1=0$$

若三點之順序爲 A_3, A_1, A_2，則

$A_3A_1+A_1A_2=A_3A_2$，然 $A_3A_1=-A_1A_3$，$A_3A_2=-A_2A_3$



$$\therefore \quad A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1=0$$

即不論其間距離與次序如何，恆有

$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1=0$ 之關係。

這式叫做沙爾定理。

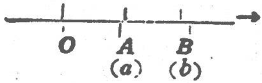
如照此推廣，可知 $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$

爲一直線上任意點，則

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1=0\cdots\cdots(1)$$

3. 在一直線上之二點間的距離

設 A, B 爲一軸上二點，其坐標各爲 a, b，而 O 爲坐標原點，則按沙爾定理知



$$OA+AB=OB$$

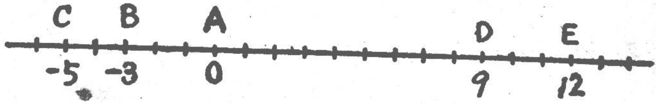
即　$a+AB=b$

$\therefore$　$AB=b-a$

即一直線上之二點間的距離等於終點坐標減去始點坐標。

〔例1〕設 $A(0), B(-3), C(-5), D(9), E(12)$ 爲同軸上之五點，試證其適合於沙爾定理。

（證）

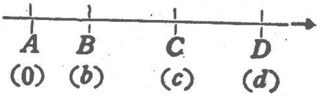


$$AB+BC+CD+DE+EA$$
$$=(-3)+(-5+3)+(9+5)+(12-9)+(-12)$$
$$=-3-2+14+3-12=0$$

〔例2〕設 A, B, C, D 爲直線上任意四點，試證

$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{DC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

（證）設 A 爲原點，B, C, D 之坐標各爲 $(b), (c), (d)$，則



$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{DC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$
$$=d^2(c-b)+(b-d)^2(-c)+(c-d)^2b+(c-b)(-c)(+b)$$
$$=cd^2-bd^2-b^2c+2bcd-cd^2+bc^2-2bcd+bd^2(-)bc^2(+)b^2c=0$$

〔註〕欲證在一直線上幾點間距離之問題時，用坐標證明較爲簡單。

（別證）因 $\overline{DA}=\overline{DC}+\overline{CA}$，則 $\overline{DA}^2=\overline{DC}^2+2\overline{DC}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}^2$

$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}=\overline{DC}^2\cdot\overline{BC}+2\overline{DC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理得

$$\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}=\overline{DC}^2\cdot\overline{CA}+2\overline{DC}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{CA}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1)+(2)，得

$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}=\overline{DC}^2(\overline{BC}+\overline{CA})+\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}$$

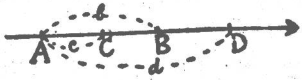
即 $\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}-\overline{DC}^2\cdot\overline{BA}-\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{BA}=0$

故 $\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{CD}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$

〔例3〕設 A, B, C, D 爲有向直線上之相異四點。

若 $\dfrac{2}{AB}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}$，則 $\dfrac{AC}{CB}=-\dfrac{AD}{DB}$，試證之。

〔證〕設 A 爲坐標之原點，B, C, D 之坐標爲 b, c, d



則 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$

去分母，得　　$2cd=b(c+d)$

變形爲　　$c(d-b)=d(b-c)$

然　　$CB=b-c$，$DB=b-d$〔按沙爾定理〕

$\therefore$　　$AC(-DB)=AD\cdot CB$

$\therefore$　　$\dfrac{AC}{CB}=-\dfrac{AD}{DB}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

〔註〕若相異四點 A, B, C, D 在一直線上，且滿足 (1) 之關係時，則 A, B, C, D 成調和列點。

習　題　一

(1) 設 $A(2)$, $B(-3)$, $C(4)$, $D(-2)$ 爲同軸上之四點，試證其適合於沙爾定理。

(2) 求下列各組二點間之距離：

① $A(-8)$, $B(-12)$　　② $A(-36)$, $B(18)$

③ $A(a+b)$, $B(2a-c)$　　④ $A(a+b+c)$, $B(a-b-c)$

(3) 設 A, B, C, D 爲有向直線上之任意四點，M 爲 AC 之中點，且

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$$

試證　$BM\cdot MD=\overline{MA}^2$

(4) 設 A, B, C, D 爲一直線上任意四點，試證

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0$$

(5) 設 A, B, C, D 成調和列點，而 A, B 的坐標爲二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之二根，又 C, D 的坐標爲二次方程式 $a'x^2+2b'x+c'=0$ 之二根。試證　$ac'+a'c=2bb$

解　答　一

(1) 仿〔例1〕，　(2) ① $AB=(-12)-(-8)=-4$，② 54；③ $a-b-c$，④ $-2b-2c$

(3) 設 A 爲原點，B, C, D 的坐標各爲 x_1, x_2, x_3，將此代入假設式後，去分母得 $2x_1x_3=x_2x_3+x_2x_1$，變形爲

$4x_1x_3-2x_2x_3-2x_1x_2+x_2{}^2=x_2{}^2$，$(2x_1-x_2)(2x_3-x_2)=x_2{}^2$

$\therefore\ (x_1-\frac{x_2}{2})(x_3-\frac{x_2}{2})=\frac{x_2{}^2}{4}$　　$\therefore\ MD\cdot MD=\overline{MA}^2$

(4) 設 A 爲原點 B, C, D 的各坐標爲 b, c, d，代入證式即得證。

(5) 設 A, B, C, D 的坐標各爲 (x_1)，(x_2)，(x_3)，(x_4)，因 A, B, C, D 爲調和列點，故 $\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$

$\therefore\ \frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}=-\frac{x_4-x_1}{x_2-x_4}$，去分母，

$(x_3-x_1)(x_2-x_4)+(x_2-x_3)(x_4-x_1)=0$

$\therefore\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)=2(x_1x_2+x_3x_4)$…………………(1)，由假設將

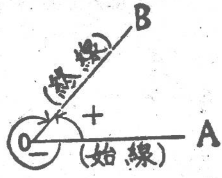
$x_1+x_2=-\frac{2b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$ 及 $x_3+x_4=-\frac{2b'}{a'}$，$x_3x_4=\frac{c'}{a'}$ 代入(1)，

得 $\frac{4bb'}{aa'}=2(\frac{c}{a}+\frac{c'}{a'})$　$\therefore\ ac'+a'c=2bb'$

4. 角

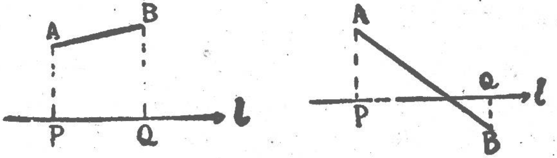
普通幾何學所論二直線的交角，也爲絕對量，不計方向。在解析幾何中所論的角，常指有向直線的交角，其定義如下：

平面上之角 AOB，設想係由一動直線繞其一端點 O，自 OA 位置旋轉至 OB 位置所構成。OA 叫做角之始邊，OB 叫做終邊，O 爲頂點，且規定旋轉方向與時針旋轉相反時爲正角，相同時爲負角。



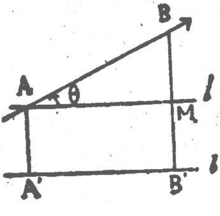
5. 正射影

自線段 AB 至有向直線 l 作垂線，如下圖，其垂足各爲 P, Q，則線段 PQ 叫做線段 AB 在 l 上的正射影。



定理一：若線段 AB 與 l 的交角爲 θ，AB 在 l 的正射影爲 $A'B'$，則不關 AB 爲正或負，常可以下式表之。　$A'B'=AB\cos\theta$

(證) (i) 若 $AB>0$，過 A 引一直線 l' 與 l 平行且同交直線 BB' 於 M，則按三角函數之定義得　$\cos\theta=\dfrac{AM}{AB}$



$\therefore\ AM=AB\cos\theta$

$\therefore\ AM=A'B'$

$\therefore\ A'B'=AB\cos\theta$

(ii) 若　$AB<0$，則 $BA>0$

$B'A'=BA\cos\theta$

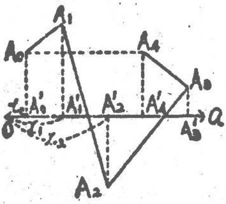
$\therefore\ -A'B'=-AB\cos\theta$

$\therefore\ A'B'=AB\cos\theta$

(iii) 若 $AB=0$, 因 $A'B'=0$, 顯爲 $A'B'=AB\cos\theta$

定理二: 自一折線的各邊至有向直線 a 上的正射影之總和，等於連結折線兩端線段至有向直線 a 之正射影。

(證) 設由 n 個連續線段 $A_0A_1, A_1A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}A_n$，而成的折線至 a 上的正射影各爲 $A'_0A'_1, A'_1A'_2, \cdots\cdots, A'_{n-1}A'_n$ 又在 a 上取原點 O,

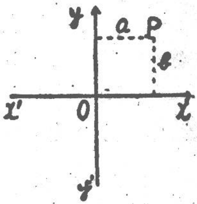


設 $A'_0, A'_1, A'_2, \cdots\cdots A'_n$ 在 a 上的坐標各爲 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$，則 $A'_0A'_1=x_1-x_0$, $A'A'_2=x_2-x_1$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$, $A'_{n-1}A'_n=x_n-x_{n-1}$

$$\therefore\ A'_0A'_1+A'_1A'_2+\cdots\cdots+A'_{n-1}A'_n$$
$$=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$
$$=x_n-x_0=A'_0A'_n\ (A_0A_n \text{ 之正射影})$$

6. 笛卡兒直坐標

設 xx' 與 yy' 爲一平面中互相垂直之兩直線。其交點爲 O, 從 yy' 至此平面內一點的距離，叫做橫坐標 (*Abscissa*)。從 xx' 至此點的距離，叫做縱坐標 (*Ordinat*)。平面內一點之位置可由此二距離，並以下述符號規則以決定之。



當一點 P 在 yy' 之右時，則其橫坐標爲正，在左則爲負。如 P 在 xx' 之上時，則其縱坐標爲正，在下則爲負。

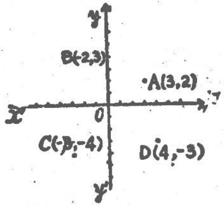
P 之橫坐標 a 與縱坐標 b, 即爲 P 之坐標，可以記號 $P(a, b)$ 表之。橫坐標須置於縱坐標之前。直線 xx' 與 yy' 爲坐標之軸 (*Axes of coordinates*), xx' 爲 x 軸，yy' 爲 y 軸。點 O 爲原點 (*Origin*)。

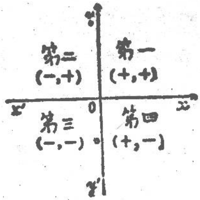
圖中所作諸點，其長之單位假定等於各軸上每一分段，其法如下：從 O 沿 xx' 數出若干分段與已知橫坐標之數相等——如橫坐標爲

正，則向右數；爲負則向左數。從此處決定之點再向上或向下，依其正號或負號，截取若干分段與縱坐標之數相等。

例如：$A(3,2)$, $B(-2,3)$, $C(-3,-4)$

$D(4,-3)$　圖示如下

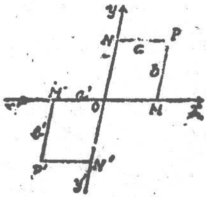




二直角坐標軸分平面爲四部份，各稱象限（*Quadrants*），其次序如圖，其中各坐標之等號亦已指明。

爲區別於直坐標起見，當二軸不相垂直時，稱之爲斜坐標（*Oblique coordinates*）斜坐標雖然較有普遍性，

但據以立式，結果常較繁，故初學者宜用直角坐標，本書從之，此後所言者，皆指直角坐標而言。



習　題　二

(1) 作三角形，其頂點如下：

① $(8,4)$,　$(0,-4)$,　$(2,4)$

② $(1,-1)$,　$(-4,3)$,　$(-6,-2)$

③ $(2,0)$,　$(-1,\sqrt{3})$　$(-1,-\sqrt{3})$

④ (b,d),　(c,d),　$(a,0)$,

(2) 何種四邊形其頂點在 $(2,4)$ $(0,4)$, $(0,-4)$, $(2,-4)$？其面積爲何？

(3) 設等邊三角形之一邊長爲 b，一頂點爲 $(0,0)$，而一邊在 y 軸上，

則其餘頂點之坐標爲何？(有四種情形)

(4) 對於 x 軸對稱於 (a, b) 之點，其坐標爲何？對稱於 y 軸？對稱於原點？

(5) 邊長 $2a$ 之正方形，有一頂點在 $(0, 0)$，而一對角線在 x 軸上，則其頂點之坐標爲何？

(6) 邊長 b 之等邊三角形，其一頂點在原點上，而一高在 y 軸上，則其餘頂點之坐標爲何？(有兩種情形)

解　答　二

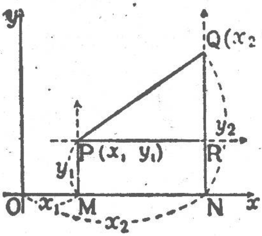
(1) 從略　　(2) 16 (3),　　(4), (5) 及 (6) 從略

7. 二點間的距離

定理：連 $P(x_1, y_1)$ 與 $Q(x_2, y_2)$ 二點之線長可用下列公式表之。

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \cdots\cdots (2)$$

(證) 設所與之二點爲 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$，過 P 與 Q 作二坐標軸的平行線，成直角三角形 PQR，如左圖，



則 $OM=x_1$ $MP=y_1$ $ON=x_2$ $NQ=y_2$ 不論 P 與 Q 之位置如何，下列關係式可成立。

即 $PQ^2=PR^2+RQ^2$

$PR=MN=ON-OM=x_2-x_1$

$RQ=NQ-NR=y_2-y_1$

$\therefore\quad PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

(二點間的距離)^2＝(x坐標之差)^2＋(y 坐標之差)^2

即 $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \cdots\cdots (1)$

若 $x_2=y_2=0$ 時，即 $Q(x_2, y_2)$ 與原點相合時

$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdots\cdots (2)$

〔例 1〕試證以 $P(-1, -2)$, $Q(3, 2)$, $R(-3, 0)$ 爲頂點之三角形爲直角三角形。

(證) $PQ^2=(-1-3)^2+(-2-2)^2=32$

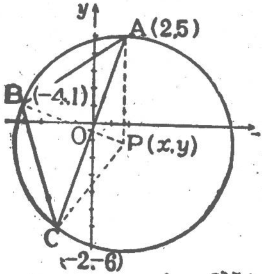
$$QR^2=(3+3)^2+(2-0)^2=40 \qquad RP^2=(-3+1)^2+(0+2)^2=8$$

$\because \quad QR^2=PQ^2+RP^2$

$\therefore \quad \triangle PQR$ 爲直角三角形。

〔例 2〕求以 $A(2,5)$，$B(-4,1)$，$C(-2,-6)$ 爲頂點之三角形 ABC 的三邊長並指其外接圓心之坐標。

(解) 按照公式，得



$$AB=\sqrt{(2+4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{13}$$

$$BC=\sqrt{(-4+2)^2+(1+6)^2}=\sqrt{53}$$

$$CA=\sqrt{(-2-2)^2+(-6-5)^2}=\sqrt{137}$$

次設 $\triangle ABC$ 的外接圓心坐標爲 $P(x,y)$，則

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP} \quad \therefore \quad AP^2=BP^2=CP^2$

而 $AP^2=(x-2)^2+(y-5)^2$，

$BP^2=(x+4)^2+(y-1)^2$

$CP^2=(x+2)^2+(y+6)^2$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-5)^2=(x+4)^2+(y-1)^2\\(x-2)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y+6)^2\end{array}\right\}\text{由是，得}$$

$$\left.\begin{array}{l}8x+22y=-11\\3x+2y=3\end{array}\right\}\text{解之，得}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{44}{25}\\[2ex]y=-\dfrac{57}{50}\end{array}\right.$$

習　題　三

(1) 求次二點間的距離：

① $(-4,3)$，$(2,-5)$　　② $(0,0)$，$(-3,-4)$

(2) 試證以 $A(2,1)$，$B(3,-2)$，$C(-4,-1)$ 爲頂點之三角形爲直角三角形。

(3) 求經過三點 $A(5,7)$，$B(-2,0)$，$C(-2,6)$ 之圓的半徑及圓心坐標。

(4) 有二點 $A(-2,4)$ 及 $B(-5,-3)$，在 y 軸上求一點 P 使