

大專升學必備

# 標準解析幾何

陳明哲編著



中央書局

835

S001875

# 標準解析幾何

陳明哲編著



先生 宜景石  
贈 惠



S9000279

中央書局

標 準 解 析 幾 何

定 價 八 元

版權所有·翻印必究

編 著 者 陳 明 哲  
發 行 人 張 煥 珪  
印 刷 者 聯 合 印 刷 公 司  
香港中環些利街六號

發 行 者 中 央 書 局

香港英皇道多寶大廈四樓

一 九 七 六 年 十 一 月 版

# 標準解析幾何

## 目 次

### 第一章 坐 標

1. 有向線段.....	1
2. 沙爾定理.....	1
3. 在一定線上之二點間的距離.....	2
4. 角.....	5
5. 正射影.....	5
6. 笛卡爾直坐標.....	6
7. 二點間的距離.....	8
8. 分一線段成定比之點.....	12
9. 定比分點定理.....	12
10. 直線之斜角與斜率.....	15
11. 極坐標.....	18
12. 極坐標與直角坐標之關係.....	23
13. 三角形面積正負的規定.....	26
14. 三角形面積公式.....	27

### 第二章 軌跡與方程式

1. 軌跡與方程式.....	36
2. 解析幾何學中基本問題.....	36
3. 第一基本問題.....	36
4. 第二基本問題.....	38
5. 方程式的討論.....	41
6. 水平與垂直漸近線求法.....	44
7. 代數方程式之一般討論.....	46
8. 曲線的極坐標方程式.....	50
9. 坐標軸之移轉(變換).....	54

10. 坐標軸之旋轉.....	57
-----------------	----

### 第三章 直 線

1. 直線之方程式.....	63
2. 直線方程式之各種形式.....	65
3. 一次方程式與直線.....	70
4. 二直線所成之角.....	72
5. 二直線為平行之條件.....	76
6. 二直線為垂直之條件.....	76
7. 法線式.....	80
8. 化普通式為法線式法.....	81
9. 自直線至一點之距離.....	84
10. 直線之極坐標方程式.....	91
11. 直線之參數方程式.....	95
12. 直線系.....	99
13. 過兩直線交點之直線系.....	101
14. 三直線共點之條件.....	105
15. 一般二次方程式代表兩直線之條件.....	111
16. 軌跡問題.....	114
17. 雜 題.....	116

### 第四章 圓

1. 圓之方程式.....	126
2. 圓之普通方程式.....	126
3. 圓之方程式的討論.....	127
4. 圓之切線與法線.....	138
5. 圓之法線方程式.....	141
6. 直線切於圓之條件.....	143
7. 切線之長.....	150

8. 圓 幕.....	151
9. 兩圓之交角.....	154
10. 圓 系.....	159
11. 通過二圓之交點的圓與直線.....	160
12. 圓之極方程式.....	167
13. 圓之參數方程式.....	174
14. 關於軌跡之問題.....	177
15. 雜 題.....	184

## 第五章 拋物線

1. 拋物線之定義與方程式.....	195
2. 拋物線之性質.....	196
3. 拋物線之其他範式.....	197
4. 拋物線之切線與法線.....	202
5. 拋物線之次切距與次法距.....	210
6. 拋物線之徑.....	213
7. 拋物線之參數方程式.....	216
8. 軌跡的問題.....	222
9. 雜 題.....	23

## 第六章 橢 圓

1. 橢圓之定義及方程式.....	239
2. 橢圓之性質.....	240
3. 橢圓之畫法.....	241
4. 橢圓之其他範式.....	242
5. 橢圓之離心率.....	249
6. 橢圓之切線與法線.....	252
7. 橢圓之次切距及次法距.....	254
8. 橢圓之參數方程式.....	252

9. 橢圓之徑.....	268
10. 橢圓之共軛徑.....	269
11. 軌跡問題.....	274

## 第七章 雙曲線

1. 雙曲線之定義及方程式.....	286
2. 雙曲線之性質.....	287
3. 雙曲線之其他範式.....	288
4. 雙曲線之漸近線.....	288
5. 共軛雙曲線.....	289
6. 等軸雙曲線.....	290
7. 雙曲線之離心率.....	297
8. 雙曲線之切線與法線.....	300
9. 雙曲線之多數方程式.....	310
10. 雙曲線之徑.....	314
11. 雙曲線之共軛徑.....	314
12. 圓錐曲線之極方程式.....	319
13. 關於焦點半徑的性質.....	325
14. 軌跡問題.....	327
15. 雜 題.....	332

## 第八章 普通二次方程式

1. 二次曲線之中心.....	340
2. 二次曲線之分類.....	344
3. 降級二次曲線.....	349
4. 二次曲線橢形之直接畫法.....	357
5. 五條件定一錐線.....	360
6. 軌跡問題.....	364
7. 雜 題.....	368

## 第九章 高次曲線

1. 擺線.....	376
2. 蚶線.....	381
3. 夢葉線.....	384
4. 弓形線.....	385



# 第一章 坐 標

## 有向線段

一直線可視為一點之運動而成的。其運動方向有二種。其中一方向叫做直線的正向，則另一方向叫做負向。如此有方向的直線叫做有向線段或叫做向量。

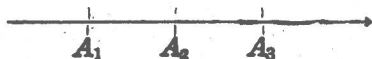
常以箭頭表明正向。

設  $A, B$  為直線上二點，若從  $A$  向  $B$  為正，則從  $B$  向  $A$  為負，在有向線段  $AB$  上任取一點  $O$ ，使  $O$  分線段  $AB$  為  $OA$  與  $OB$  二部份，則  $OA$  叫做正線段， $OB$  叫做負線段。

【註】有時為區別有向線段與普通不計方向的線段起見，可記有向線段為  $\overrightarrow{AB}$  或  $\overrightarrow{AB}$ ，而不計方向的絕對值，則記為  $|AB|$ 。

## 2. 沙爾定理 (Chales theorem)

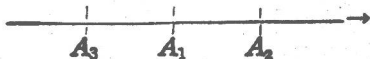
今若在一有向直線上順次有三點， $A_1, A_2, A_3$ ，則  $A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$ ，然  $A_3A_1 = -A_1A_3$



$$\therefore A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$$

若三點之順序為  $A_3, A_1, A_2$ ，則

$A_3A_1 + A_1A_2 = A_3A_2$ ，然  $A_2A_1 = -A_1A_2$ ， $A_3A_2 = -A_2A_3$



$$\therefore A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$$

即不論其間距離與次序如何，恆有

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0 \quad \text{之關係。}$$

這式叫做沙爾定理。

如照此推廣，可知  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

為一直線上任意點，則

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0 \dots (1)$$

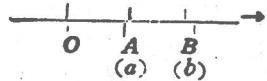
### 3. 在一直線上之二點間的距離

設  $A, B$  為一軸上二點，其坐標各為  $a, b$ ，而  $O$  為坐標原點，則按沙爾定理知

$$OA + AB = OB$$

$$\text{即 } a + AB = b$$

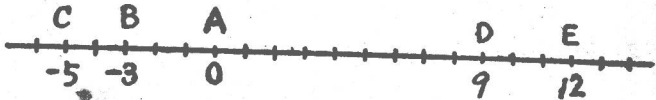
$$\therefore AB = b - a$$



即一直線上之二點間的距離等於終點坐標減去始點坐標。

【例1】設  $A(0), B(-3), C(-5), D(9), E(12)$  為同軸上之五點，試證其適合於沙爾定理。

(證)



$$AB + BC + CD + DE + EA$$

$$= (-3) + (-5 + 3) + (9 + 5) + (12 - 9) + (-12)$$

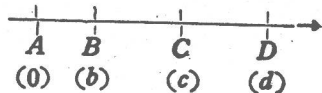
$$= -3 - 2 + 14 + 3 - 12 = 0$$

【例2】設  $A, B, C, D$  為直線上任意四點，試證

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

(證) 設  $A$  為原點， $B, C, D$  之坐標

各為  $(b), (c), (d)$ ，則



$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

$$= d^2(c-b) + (b-d)^2(-c) + (c-d)^2b + (c-b)(-c)(+b)$$

$$= cd^2 - bd^2 - b^2c + 2bcd - cd^2 + bc^2 - 2bcd + bd^2(-1)^2 + (-1)^2c = 0$$

【註】欲證在一直線上幾點間距離之問題時，用坐標證明較為簡單。

(別證) 因  $\overline{DA} = \overline{DC} + \overline{CA}$ ，則  $\overline{DA}^2 = \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA}^2$

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{DC}^2 \cdot \overline{BC} + 2\overline{DC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA}^2 \cdot \overline{BC} \dots (1)$$

同理得

$$DB^2 \cdot CA = DC^2 \cdot CA + 2DC \cdot CB \cdot CA + CB^2 \cdot CA \dots\dots(2)$$

由(1)+(2), 得

$$\overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA} = \overline{DC^2 (BC + CA) + CA^2 \cdot BC + CB^2 \cdot CA}$$

$$\text{即 } \overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA - DC^2 \cdot BA - BC \cdot CA \cdot BA} = 0$$

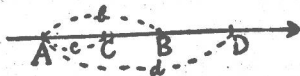
$$\text{故 } \overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + CD^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB} = 0$$

【例3】設  $A, B, C, D$  為有向直線之上之相異四點。

若  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ , 則  $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ , 試證之。

(證) 設  $A$  為坐標之原點,  $B,$

$C, D$  之坐標為  $b, c, d$



$$\text{則 } \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

去分母, 得  $2cd = b(c+d)$

變形為  $c(d-b) = d(b-c)$

然  $CB = b-c, DB = b-d$  [按沙爾定理]

$$\therefore AC(-DB) = AD \cdot CB$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \dots\dots(1)$$

【註】若相異四點  $A, B, C, D$  在一直線上, 且滿足(1)之關係時, 則  $A, B, C, D$  成調和列點。

習 題 一

(1) 設  $A(2), B(-3), C(4), D(-2)$  為同軸上之四點, 試證其適合於沙爾定理。

(2) 求下列各組二點間之距離:

①  $A(-8), B(-12)$

②  $A(-36), B(18)$

③  $A(a+b), B(2a-c)$

④  $A(a+b+c), B(a-b-c)$

(3) 設  $A, B, C, D$  為有向直線之上之任意四點,  $M$  為  $AG$  之中點, 且

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

試證  $BM \cdot MD = \overline{MA}^2$

(4) 設  $A, B, C, D$  為一直線上任意四點，試證

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

(5) 設  $A, B, C, D$  成調和列點，而  $A, B$  的坐標為二次方程式

$ax^2 + 2bx + c = 0$  之二根，又  $C, D$  的坐標為二次方程式

$a'x^2 + 2b'x + c' = 0$  之二根。試證  $ac' + a'c = 2bb'$

### 解 答 一

(1) 仿 [例1], (2) ①  $AB = (-12) - (-8) = -4$ , ② 54;

③  $a - b - c$ , ④  $-2b - 2c$

(3) 設  $A$  為原點,  $B, C, D$  的坐標各為  $x_1, x_2, x_3$ , 將此代入假設式後;

去分母得  $2x_1x_3 = x_2x_3 + x_2x_1$ , 變形為

$$4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2, (2x_1 - x_2)(2x_3 - x_2) = x_2^2$$

$$\therefore (x_1 - \frac{x_2}{2})(x_3 - \frac{x_2}{2}) = \frac{x_2^2}{4} \quad \therefore MD \cdot MD = \overline{MA}^2$$

(4) 設  $A$  為原點  $B, C, D$  的各坐標為  $b, c, d$ , 代入證式即得證。

(5) 設  $A, B, C, D$  的坐標各為  $(x_1), (x_2), (x_3), (x_4)$ , 因  $A, B, C, D$

為調和列點, 故  $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$

$$\therefore \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = -\frac{x_4 - x_1}{x_1 - x_4}, \text{ 去分母,}$$

$$(x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_4 - x_1) = 0$$

$$\therefore (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4) \dots \dots \dots (1), \text{ 由假設將}$$

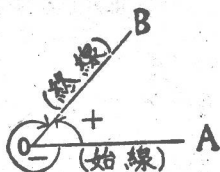
$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a} \text{ 及 } x_3 + x_4 = -\frac{2b'}{a'}, x_3x_4 = \frac{c'}{a'} \text{ 代入(1),}$$

$$\text{得 } \frac{4bb'}{aa'} = 2(\frac{c}{a} + \frac{c'}{a'}) \quad \therefore ac' + a'c = 2bb'$$

### 4. 角

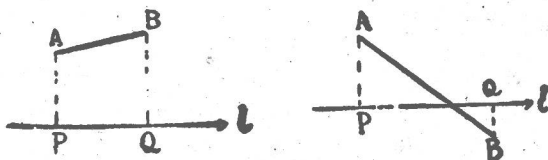
普通幾何學所論二直線的交角，也為絕對量，不計方向。在解析幾何中所論的角，常指有向直線的交角，其定義如下：

平面上之角  $AOB$ ，設想係由一動直線繞其一端點  $O$ ，自  $OA$  位置旋轉至  $OB$  位置所構成。 $OA$  叫做角之始邊， $OB$  叫做終邊， $O$  為頂點，且規定旋轉方向與時針旋轉相反時為正角，相同時為負角。



### 5. 正射影

自線段  $AB$  至有向直線  $l$  作垂線，如下圖，其垂足各為  $P, Q$ ，則線段  $PQ$  叫做線段  $AB$  在  $l$  上的正射影。



**定理一：**若線段  $AB$  與  $l$  的交角為  $\theta$ ， $AB$  在  $l$  的正射影為  $A'B'$ ，則不論  $AB$  為正或負，常可以下式表之。  $A'B' = AB \cos \theta$

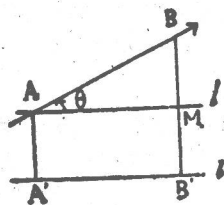
(證) (i) 若  $AB > 0$ ，過  $A$  引一直線  $l'$  與  $l$  平行且同交直線  $BB'$  於

$M$ ，則按三角函數之定義得  $\cos \theta = \frac{AM}{AB}$

$$\therefore AM = AB \cos \theta$$

$$\therefore AM = A'B'$$

$$\therefore A'B' = AB \cos \theta$$



(ii) 若  $AB < 0$ ，則  $BA > 0$

$$B'A' = BA \cos \theta$$

$$\therefore -A'B' = -AB \cos \theta$$

$$\therefore A'B' = AB \cos \theta$$

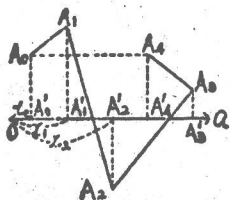
(iii) 若  $AB=0$ , 因  $A'B'=0$ , 顯為  $A'B'=AB \cos \theta$

**定理二:** 自一折線的各邊至有向直線  $a$  上的正射影之總和, 等於連結折線兩端線段至有向直線  $a$  之正射影。

(圖) 設由  $n$  個連續線段  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ , 而成的折線至  $a$  上的正射影各為  $A'_0A'_1, A'_1A'_2, \dots, A'_{n-1}A'_n$  又在  $a$  上取原點  $O$ ,

設  $A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  在  $a$  上的坐標各為  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , 則  $A'_0A'_1 = x_1 - x_0$ ,  
 $A'_1A'_2 = x_2 - x_1$  .....  
 $A'_{n-1}A'_n = x_n - x_{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore A'_0A'_1 + A'_1A'_2 + \dots + A'_{n-1}A'_n \\ = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \\ = x_n - x_0 = A'_0A'_n \quad (A_0A_n \text{ 之正射影}) \end{aligned}$$



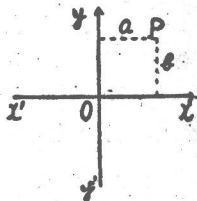
## 6. 笛卡兒直坐標

設  $xx'$  與  $yy'$  為一平面中互相垂直之兩直線。其交點為  $O$ , 從  $yy'$  至此平面內一點的距離, 叫做橫坐標 (Abscissa)。從  $xx'$  至此點的距離, 叫做縱坐標 (Ordinat)。平面內一點之位置可由此二距離, 並以下述符號規則以決定之。

當一點  $P$  在  $yy'$  之右時, 則其橫坐標為正, 在左則為負。如  $P$  在  $xx'$  之上時, 則其縱坐標為正, 在下則為負。

$P$  之橫坐標  $a$  與縱坐標  $b$ , 即為  $P$  之坐標, 可以記號  $P(a, b)$  表之。橫坐標須置於縱坐標之前。直線  $xx'$  與  $yy'$  為坐標之軸 (Axes of coordinates),  $xx'$  為  $x$  軸,  $yy'$  為  $y$  軸。點  $O$  為原點 (Origin)。

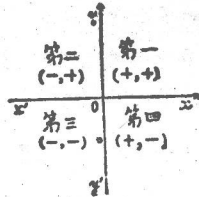
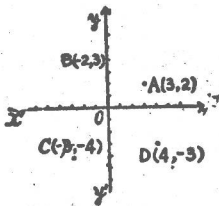
圖中所作諸點, 其長之單位假定等於各軸上每一分段, 其法如下: 從  $O$  沿  $xx'$  數出若干分段與已知橫坐標之數相等——如橫坐標為



正，則向右數；為負則向左數。從此處決定之點再向上或向下，依其正號或負號，數取若干分段與縱坐標之數相等。

例如：A (3, 2), B (-2, 3), C (-3, -4)

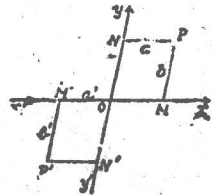
D (4, -3) 圖示如下



二直角坐標軸分平面為四部份，各稱象限 (Quadrants)，其次序如圖，其中各坐標之等號亦已指明。

為區別於直坐標起見，當二軸不相垂直時，稱之為斜坐標 (Oblique coordinates) 斜坐標雖然較有普遍性。

但據以立式，結果常較繁，故初學者宜用直角坐標，本書從之，此後所言者，皆指直角坐標而言。



## 習 題 二

(1) 作三角形，其頂點如下：

- ① (8, 4), (0, -4), (2, 4)
- ② (1, -1), (-4, 3), (-6, -2)
- ③ (2, 0), (-1,  $\sqrt{3}$ ), (-1,  $-\sqrt{3}$ )
- ④ (b, d), (c, d), (a, 0),

(2) 何種四邊形其頂點在 (2, 4) (0, 4), (0, -4), (2, -4)? 其面積為何?

(3) 設等邊三角形之一邊長為 b, 一頂點為 (0, 0), 而一邊在 y 軸上,

則其餘頂點之坐標為何？(有四種情形)

- (4) 對於  $x$  軸對稱於  $(a, b)$  之點，其坐標為何？對稱於  $y$  軸？對稱於原點？
- (5) 邊長  $2a$  之正方形，有一頂點在  $(0, 0)$ ，而一對角線在  $x$  軸上，則其頂點之坐標為何？
- (6) 邊長  $b$  之等邊三角形，其一頂點在原點上，而一高在  $y$  軸上，則其餘頂點之坐標為何？(有兩種情形)

## 解 答 二

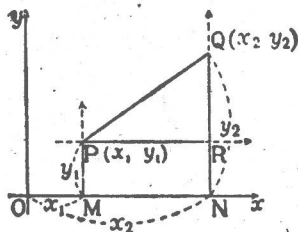
- (1) 從略      (2) 16 (3),      (4), (5) 及 (6) 從略

## 7. 二點間的距離

定理：連  $P(x_1, y_1)$  與  $Q(x_2, y_2)$  二點之線長可用下列公式表之。

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots \dots \dots (2)$$

(證) 設所與之二點為  $P(x_1, y_1)$  及  $Q(x_2, y_2)$ ，過  $P$  與  $Q$  作二坐標軸的平行線，成直角三角形  $PQR$ ，如左圖，則  $OM = x_1$   $MP = y_1$   $ON = x_2$   $NQ = y_2$  不論  $P$  與  $Q$  之位置如何，下列關係式可成立。



即  $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

$$PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$$

$$RQ = NQ - NR = y_2 - y_1$$

$$\therefore PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

(二點間的距離) $^2 = (x$ 坐標之差) $^2 + (y$ 坐標之差) $^2$

$$\text{即 } PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots \dots \dots (1)$$

若  $x_2 = y_2 = 0$  時，即  $Q(x_2, y_2)$  與原點相合時

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \dots \dots \dots (2)$$

【例 1】試證以  $P(-1, -2)$ ， $Q(3, 2)$ ， $R(-3, 0)$  為頂點之三角形為直角三角形。

(證)  $PQ^2 = (-1-3)^2 + (-2-2)^2 = 32$



$$QR^2 = (3+3)^2 + (2-0)^2 = 40 \quad RP^2 = (-3+1)^2 + (0+2)^2 = 8$$

$$\therefore QR^2 = PQ^2 + RP^2$$

$\therefore \triangle PQR$  為直角三角形。

【例2】求以  $A(2, 5)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(-2, -6)$  為頂點之三角形  $ABC$  的三邊長並指其外接圓心之坐標。

解 按照公式，得

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(-4+2)^2 + (1+6)^2} = \sqrt{53}$$

$$CA = \sqrt{(-2-2)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{137}$$

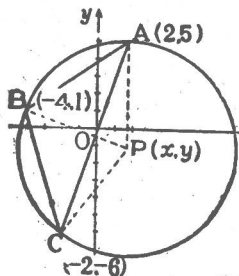
次設  $\triangle ABC$  的外接圓心坐標為  $P(x, y)$ ，則

$$AP = BP = CP \quad \therefore AP^2 = BP^2 = CP^2$$

$$\text{而 } AP^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2,$$

$$BP^2 = (x+4)^2 + (y-1)^2$$

$$CP^2 = (x+2)^2 + (y+6)^2$$



$\therefore$

$$\left. \begin{aligned} (x-2)^2 + (y-5)^2 &= (x+4)^2 + (y-1)^2 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 &= (x+2)^2 + (y+6)^2 \end{aligned} \right\} \text{由是，得}$$

$$\left. \begin{aligned} 8x + 22y &= -11 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned} \right\} \text{解之，得 } \begin{cases} x = \frac{44}{25} \\ y = -\frac{57}{50} \end{cases}$$

### 習題三

(1) 求次二點間的距離：

①  $(-4, 3)$ ,  $(2, -5)$

②  $(0, 0)$ ,  $(-3, -4)$

(2) 試證以  $A(2, 1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(-4, -1)$  為頂點之三角形為直角三角形。

(3) 求經過三點  $A(5, 7)$ ,  $B(-2, 0)$ ,  $C(-2, 6)$  之圓內半徑及圓心坐標。

(4) 有二點  $A(-2, 4)$  及  $B(-5, -3)$ ，在  $y$  軸上求一點  $P$  使