

初等数学

◎ 主编 唐敏 田长明

CHUDENG SHUXUE

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



电子科技大学出版社

初 等 数 学

主编 唐 敏 田长明

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学 / 唐敏, 田长明主编. —成都: 电子科技大学出版社, 2004. 9

ISBN 7-81094-642-0

I. 初... II. ①唐... ②田... III. 初等数学-高等学校-教材 IV. 012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094720 号

内容提要

本书是根据教育部和国家民委颁布的大学预科数学教学大纲, 按照大学预科阶段数学教学要求规定的性质和任务而编写的教材, 由西南民族大学唐敏、田长明担任主编。本书以大学预科学生为教学对象, 主要介绍了函数、三角函数、方程、不等式、排列、组合、二项式定理、数列、复数、一元 n 次多项式、平面解析几何、行列式与线性方程组。

全书贯穿了“模块”的思想, 各校可根据自己的需要选择不同的模块组织教学。本书由浅入深、循序渐进地组织教材内容, 结构合理。同时加强了应用, 例题和课后习题丰富, 语言通俗易懂, 便于自学。本书中的探索与思考, 鼓励学生探索新问题, 思考解决问题的方法。

本书除供高校各级各类预科学生使用外, 还适用于师范专科学生、职高学生、成人大专学生、中学教师进修培训和青年自学时使用和参考。

初等数学

主编 唐敏 田长明

出版: 电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号 邮编: 610054)

责任编辑: 汤云辉

发行: 新华书店经销

印刷: 成都宁强印务有限责任公司

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张 14.5 字数 353 千字

版次: 2004年9月第一版

印次: 2006年6月第二次印刷

书号: ISBN 7-81094-642-0/O·36

印数: 2001—2600册

定价: 27.50元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 邮购本书请与本社发行科联系。电话: (028) 83201635

邮编: 610054

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前 言

本书是根据教育部和国家民委颁布的大学预科数学教学大纲,按照大学预科阶段数学教学要求规定的性质和任务,为满足大学预科数学教学的需要而编写的教材。

本书是以大学预科学生为教学对象,从大学预科学生的实际出发,结合本专科数学教学所需的基础知识来选材编写的,具有较强的目标性。教材的顺序是根据大学预科学生的认识规律来安排的。

本书使用通俗易懂的语言,由浅入深、由易到难地介绍教材内容。

本书配备了丰富的实例和课后练习,每章末给出了小结,帮助学生掌握本章的知识和技能。

本书加强了数学在日常生活等方面的应用,把数学知识和实际问题有机地结合在一起,帮助学生提高分析解决问题的能力。

本书中的探索与思考,鼓励学生探索新问题,思考解决问题的方法。

本书突出了“模块”的思想,有利于不同的学校根据自己的师资力量、办学条件和教学对象灵活选择不同的模块组织教学。

本书充分发挥了大学预科阶段的数学教学是夯实基础,承上启下,完成从初等数学到高等数学,从初等数学的学习方法到高等数学的学习方法的过渡作用。

本书由西南民族大学唐敏、田长明担任主编,冀小明、曾纯一参加了本书的编写工作。其中第1章至第8章由唐敏编写,第9章由田长明编写,第10章由冀小明编写,曾纯一参加了部分习题的选编工作。

在本书的编写过程中,得到了西南民族大学各级领导的大力支持,在此谨致谢意。

本书除供高校各级各类预科学生使用外,还适用于师范专科学生、职高学生、成人大专学生、中学教师进修培训和青年自学时使用和参考。

由于作者水平有限,时间短促,书中难免存在不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

2004年8月

目 录

第 1 章 函数.....	1
1.1 集合.....	1
1.2 实数集.....	7
1.3 对应.....	8
1.4 函数.....	9
1.5 幂函数、指数函数与对数函数.....	19
第 2 章 三角函数.....	29
2.1 任意角的三角函数.....	29
2.2 同角三角函数间的关系.....	34
2.3 诱导公式.....	36
2.4 三角函数的性质与图形.....	40
2.5 两角和与差的三角函数.....	45
2.6 倍角与半角的三角函数.....	47
2.7 三角函数的积化和差与和差化积.....	51
2.8 反三角函数.....	53
2.9 复合函数, 基本初等函数和初等函数.....	58
2.10 任意三角形的解法.....	59
第 3 章 方程.....	64
3.1 一元二次方程.....	64
3.2 分式方程与无理方程.....	69
3.3 特殊的二元二次方程组.....	72
3.4 指数方程与对数方程.....	76
3.5 三角方程.....	80
第 4 章 不等式.....	85
4.1 不等式的基本性质和同解定理.....	85
4.2 一元一次不等式.....	86
4.3 一元二次不等式.....	89
4.4 绝对值不等式.....	91
4.5 几个著名的不等式.....	93
4.6 常见不等式的证明方法.....	96
第 5 章 排列、组合与二项式定理.....	101
5.1 排列.....	101

5.2 组合.....	104
5.3 二项式定理.....	109
第 6 章 数列.....	114
6.1 数列的概念及性质.....	114
6.2 等差数列.....	115
6.3 等比数列.....	118
6.4 数学归纳法.....	122
第 7 章 复数及其运算.....	126
7.1 复数的概念.....	126
7.2 复数的几何表示.....	127
7.3 复数的三角形式和指数形式.....	128
7.4 共轭复数.....	131
7.5 复数的运算.....	133
7.6 复数的应用.....	138
第 8 章 一元 n 次多项式.....	145
8.1 一元 n 次多项式和综合除法.....	145
8.2 多项式的两个性质定理.....	149
8.3 应用.....	151
8.4 高次方程的根与系数的关系.....	158
第 9 章 平面解析几何.....	161
9.1 基本公式.....	161
9.2 曲线与方程.....	163
9.3 直线.....	166
9.4 圆.....	175
9.5 椭圆.....	179
9.6 双曲线.....	183
9.7 抛物线.....	187
9.8 坐标轴的平移.....	191
9.9 圆锥曲线的统一定义和光学性质简介.....	194
9.10 参数方程.....	195
9.11 极坐标.....	200
第 10 章 行列式与线性方程组.....	206
10.1 行列式.....	206
10.2 二元、三元线性方程组的求解及解的讨论.....	216
10.3 n 元线性方程组的求解及解的讨论.....	222

第1章 函 数

§ 1.1 集 合

1. 集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一，它是从日常生活和生产活动中抽象出来的一个数学概念。为了帮助理解这个概念，先研究如下问题：

- ① 所有不大于6的正整数；
- ② 与一个角 α 的两边距离相等的所有点；
- ③ 整式 $3a+2b$, a^2+b^2 , $(a-b)^2$ 的全体；
- ④ 所有等边三角形；
- ⑤ 某校计算机室的所有计算机。

它们分别是由一些数、一些点、一些整式、一些图形、一些物体组成的。虽然它们是5个完全不同的问题，但是它们有一个共同的特点，就是每个问题讨论的事物都具有某种属性。

一般地，集合(有时也简称集)就是具有某种属性(或满足某种条件)的事物的全体。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

上面5个问题讨论的事物分别组成5个集合。第①个集合是由6个数1、2、3、4、5、6组成的，该集合的元素就是这6个数。第②个集合是由平面上的点组成的，该集合的元素就是指定角平分线上的所有点。第③个集合是由3个整式 $3a+2b$, a^2+b^2 , $(a-b)^2$ 组成的，该集合的元素就是这3个整式。第④个集合是由等边三角形组成的，所有等边三角形都是该集合的元素。第⑤个集合是由指定计算机室内的计算机组成的，该集合的元素是这些计算机。

一个给定的集合，必须符合下列规则：

① 集合中的元素具有确定性。即对任何一个事物，能够判断该事物是不是这个集合的元素。例如，某班身高1.70米的所有学生可以组成一个集合，但某班高个子学生不能组成一个集合。

② 集合中的元素具有互异性。即集合中任意两个元素都是不同的，同一个元素不能在一个集合中重复出现。例如，由方程 $(x-1)^2(x+1)=0$ 的根组成的集合只有两个元素1和-1。

③ 集合中的元素具有无序性。即同一个集合中的元素之间没有顺序关系，元素相同但元素的排列顺序不同的集合实际上是同一个集合。例如，集合{1, 3, 5, 2, 4, 6}和{6, 5, 4, 3, 2, 1}与{1, 2, 3, 4, 5, 6}都是同一个集合。

2. 集合的表示法

集合通常用大写字母 A 、 B 、 C 、…表示；集合的元素用小写字母 a 、 b 、 c 、…表示。如

果 a 是集合 A 的元素就记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 如果 a 不是集合 A 的元素就记作 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$, 读作 a 不属于 A).

表示集合的方法, 常用的有列举法和描述法两种.

(1) 列举法

把集合的所有元素既不重复、也不遗漏地写在大括号内, 元素之间用逗号分隔, 这种表示方法称为列举法. 列举法实质上就是把集合的元素一一列举出来.

例 1 所有小于 5 的自然数组成的集合 A 可以表示为:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

例 2 由字母 a, b, c, d, e 组成的集合 B 可以表示为:

$$B = \{a, b, c, d, e\}.$$

例 3 掷一枚钱币, 出现正面记作“正”, 出现反面记作“反”. 连续两次掷一枚钱币, 出现正面反面的所有结果组成的集合 C 可以表示为:

$$C = \{(\text{正、正}), (\text{正、反}), (\text{反、正}), (\text{反、反})\}.$$

(2) 描述法

把集合所有元素的属性用语言或式子描述出来, 写在大括号内, 这种表示方法称为描述法.

用描述法表示集合时, 通常写成如下形式:

{集合元素具有的属性或满足的条件} 或 $\{x | x \text{ 具有的属性或满足的条件}\}.$

后一种表示法中, x 表示集合中的任意一个元素, 分隔符“|”右边是 x 具有的属性或满足的条件.

例 4 所有直角三角形组成的集合 A 可以表示为:

$$A = \{\text{直角三角形}\}.$$

例 5 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合 B 可以表示为:

$$B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

例 6 直线 $x + y - 1 = 0$ 上的所有点组成的集合 C 可以表示为:

$$C = \{(x, y) | x + y - 1 = 0\}.$$

3. 几类特殊的集合

(1) 有限集和无限集

含有有限个元素的集合称为有限集, 含有无限个元素的集合称为无限集. 上面例 1 和例 2 中的集合都是有限集, 而例 4 和例 6 的集合是无限集. 有限集通常使用列举法来表示, 无限集通常使用描述法来表示.

(2) 数集和点集

许多事物都可以组成集合, 数学中通常讨论的是数集和点集.

数组成的集合称为数集. 为了方便使用, 几个特定的数集通常用如下符号表示:

N 表示全体自然数的集合(简称自然数集), 即 $N = \{n | n \text{ 是自然数}\}.$

Z 表示全体整数的集合(简称整数集), 即 $Z = \{x | x \text{ 是整数}\}.$

Q 表示全体有理数的集合(简称有理数集), 即 $Q = \{x | x \text{ 是有理数}\}.$

R 表示全体实数的集合(简称实数集), 即 $R = \{x | x \text{ 是实数}\}.$

由点组成的集合称为点集. 例如前面第②个问题研究的集合就是由这个角的角平分线

上的所有点组成的点集. 又如, 正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图像, 是由直角坐标平面内满足函数关系式 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的所有有序实数对 (x, y) 的对应点组成的直线上的点的集合.

(3) 空集

不含有任何元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$. 例如, $\{\text{小于零的正整数}\}$ 是空集, $\{x | x^2 + 1 = 0, \text{且 } x \in R\}$ 也是空集, 而集合 $\{x | x = 0\}$ 或 $\{0\}$ 表示只含有一个元素 0 的集合, 它不是空集.

注意: 空集不能写成 $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}$ 表示由空集组成的集合.

4. 两个集合之间的关系

(1) 子集

设有两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素(即若 $x \in A$, 则必有 $x \in B$), 则称集合 A 为集合 B 的子集. 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 它们分别读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

由子集的概念, 可得如下结论:

① 规定空集是任何一个集合的子集, 即

$$\emptyset \subseteq A.$$

② 任何集合都是它本身的子集. 因为对任何一个非空集合 A , 它的每一个元素都属于 A , 所以, 有 $A \subseteq A$.

例 7 讨论下列各组集合之间的包含关系:

① 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

② 若 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$,

③ 数集 N, Z, Q, R .

解 ① 根据子集的概念, 有 $A \subseteq B$.

② 根据子集的概念, 有 $A \subseteq B$, 同时, $B \subseteq A$.

③ 对于数集, 显然有以下包含关系:

$$N \subseteq Z, Z \subseteq Q, Q \subseteq R.$$

例 8 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集.

解 集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集为:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}.$$

(2) 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 则称集合 A 是集合 B 的真子集. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

显然, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 是集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 的真子集, 自然数集 N 是整数集 Z 的真子集, 但集合 $A = \{-1, 1\}$ 不是 $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 的真子集.

通常用封闭的曲线围起来的图形表示集合, 图形中的点表示元素. 集合间的包含关系也可用类似的直观图形来表示. 例如, $A \subset B$ 可以表示为图 1-1.

对于两个集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$, 读作“集合 A 等于集合 B ”.

例 9 假设集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, 证明 $A = B$.

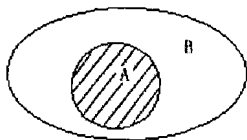


图 1-1

证明 任取 $x \in A$, 则 x 必定是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的根, 所以有

$$x \in B,$$

所以, 有

$$A \subseteq B, \quad \textcircled{1}$$

另一方面, 任取 $x \in B$, 则 x 满足方程 $x^2 - 1 = 0$, 解这个方程, 得

$$x = 1 \text{ 或 } x = -1,$$

所以,

$$x \in A,$$

所以,

$$B \subseteq A, \quad \textcircled{2}$$

由①和②可知,

$$A = B.$$

5. 集合的运算

(1) 交集

设 A 和 B 是两个集合, 则它们共有的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即有

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

图 1-2 是两个集合的交集的示意图, 图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集.

交集有下列性质:

- ① $A \cap B \subseteq A$,
- ② $A \cap B \subseteq B$,
- ③ $A \cap A = A$,
- ④ $A \cap \emptyset = \emptyset$.

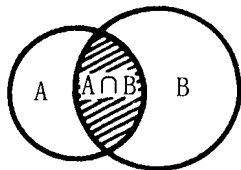


图 1-2

例 10 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{a, b\}$.

例 11 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x | -1 \leq x \leq 1\} \cap \{x | x > 0\} = \{x | 0 < x \leq 1\}$.

图 1-3 就是这个交集的示意图.

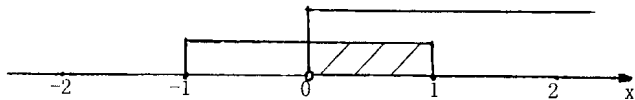


图 1-3

(2) 并集

设 A 和 B 是两个集合, 则它们的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集. 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即有

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}.$$

图 1-4 是两个集合的并集的示意图, 图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

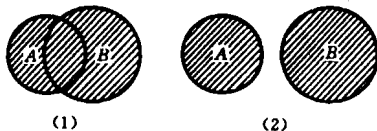


图 1-4

并集有下列性质:

$$\textcircled{1} A \subseteq A \cup B,$$

$$\textcircled{2} B \subseteq A \cup B,$$

$$\textcircled{3} A \cup A = A,$$

$$\textcircled{4} A \cup \emptyset = A.$$

例 12 设 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 1 < x < 3\} = \{x | -1 < x < 3\}$.

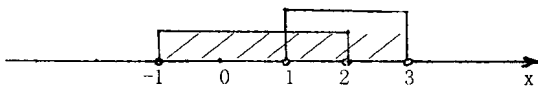


图 1-5

图 1-5 就是这个并集的示意图.

例 13 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{-2, 0, 2\}$, 求 $\textcircled{1} A \cup B$, $\textcircled{2} A \cup B \cup C$.

解 $\textcircled{1} A \cup B = \{1, 2\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1, 2\}$,

$\textcircled{2} A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = \{-1, 0, 1, 2\} \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

注意: 在 $A \cup B$ 中, A 与 B 共有的元素只能出现一次.

(3) 差集

设 A 和 B 是两个集合, 则属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的差集. 记作 $A - B$ (读作“ A 与 B 的差集”), 即有

$$A - B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}.$$

图 1-6 是两个集合的差集的示意图, 图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的差集.

差集有下列性质:

$$\textcircled{1} A - B \subseteq A,$$

$$\textcircled{2} A - A = \emptyset,$$

$$\textcircled{3} A - \emptyset = A.$$

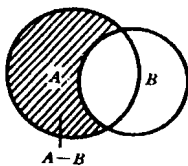


图 1-6

例 14 设 $A = \{1, 2, 3, 4, \}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$,

求 $\textcircled{1} A - B$, $\textcircled{2} B - A$.

解 $\textcircled{1} A - B = \{2, 4\}$,

$\textcircled{2} B - A = \{5, 7\}$.

(4) 补集

在研究集合与集合间的关系时, 这些集合常常是某一个给定集合的子集, 这个给定的集合就称为全集. 全集是由所研究的问题而定的, 它含有所要研究的各个集合的全体元素. 例如, 研究元素是整数的集合之间的关系, 可以取全集为整数集 Z ; 研究元素是实数的集合之间的关系, 可以取全集为实数集 R .

已知全集 I , 集合 $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 称为集合 A 在 I 中的补集, 记作 $\bar{A}$ (读作“ A 补”), 即

$$\bar{A} = \{x | x \in I, \text{ 且 } x \notin A\}.$$

图 1-7 中的长方形表示全集 I , 圆内表示集合 A , 阴影部分表示集合 A 在 I 中的补集.

补集有如下性质:

$$\textcircled{1} A \cup \bar{A} = I,$$

$$\textcircled{2} A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

$$\textcircled{3} \bar{\bar{A}} = I - A,$$

$$\textcircled{4} \bar{\bar{A}} = A.$$

其中, $\bar{A}$ 表示 A 在全集 I 中的补集.

例 15 已知全集 I 为实数集, $A = \{x | x^2 - 1 < 0\}$, 求 $\bar{A}$.

解 $\bar{A} = I - A = \{x | x^2 - 1 \geq 0, \text{ 且 } x \in R\} = \{x | |x| \geq 1\}$.

例 16 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. 求 $\textcircled{1} \bar{A}$, $\textcircled{2} \bar{B}$,

$\textcircled{3} \bar{A} \cup \bar{B}$, $\textcircled{4} \bar{A} \cap \bar{B}$.

解 $\textcircled{1} \bar{A} = I - A = \{4, 5, 6\}$,

$\textcircled{2} \bar{B} = I - B = \{1, 3, 5\}$,

$\textcircled{3} \bar{A} \cup \bar{B} = \{4, 5, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$,

$\textcircled{4} \bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}$.

6. 集合的运算定律

(1) 交换律

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

(2) 结合律

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(4) 对偶律(De Morgan 定律)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

上面的运算定律, 都可以根据两集合相等的定义来证明, 并且, 都可以推广到有限多个集合的情形.

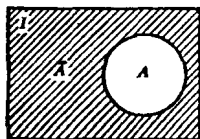


图 1-7

习题 1.1

1. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6, 8\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

2. 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 求 $A \cap B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

3. 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 求 $\textcircled{1} \bar{A}$, $\textcircled{2} \bar{B}$,

$\textcircled{3} \bar{A} \cup \bar{B}$, $\textcircled{4} \bar{A} \cap \bar{B}$.

4. 设 N 是全体自然数的集合, 且 $x \in N$, 列举下列集合含有的元素:

(1) $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$;

(2) $B = \{x | x - 1 = 0, x - 2 = 0\}$.

5. 证明 $A \cup B = B \cup A$.

6. 用列举法表示下列集合:

$$(1) A = \{x \mid 5 < x < 8, x \in \mathbb{N}\};$$

$$(2) B = \{x \mid x - 3 = 0, x \in \mathbb{R}\};$$

$$(3) C = \{x \mid |x| < 5, x \in \mathbb{Z}\}.$$

7. 求下列集合的元素:

$$(1) A = \{x \mid x + 1 < 6 = \cap \{x \mid x > 3, x \in \mathbb{N}\};$$

$$(2) B = \{x \mid x + 2 < 10\} \cap \{x \mid x + 1 > 5, x \in \mathbb{N}\}.$$

8. 设 $I = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid x \leq 6\}$, 求: (1) $A \cap \emptyset$, $A \cup \emptyset$; (2) $A \cap \mathbb{R}$, $A \cup \mathbb{R}$; (3) $\bar{A}$; (4) $A \cap \bar{A}$, $A \cup \bar{A}$.

9. 用列举法表示下列集合的元素 (x, y) :

$$(1) A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = -1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\};$$

$$(2) B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 13, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}.$$

§1.2 实数集

1. 有理数与无理数

数的概念是随着实际需要逐渐发展起来的. 由于计数和测量的需要, 人们引入了正整数(即自然数)、正分数、负整数、负分数和零, 它们统称为有理数. 有理数可以表示为 $\frac{p}{q}$ 的形式(其中 p, q 是互质的整数, 且 $q \neq 0$), 也可以表示为有限小数或无限循环小数的形式. 除了这种形式的数以外, 还存在着不能表示为上述形式的数, 如 $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$, $\pi = 3.14159\cdots$ 等, 这些数称为无理数. 有理数与无理数统称为实数. 每一个实数可用数轴上一个点表示, 且不同的实数可以用不同的点表示. 反之, 数轴上的每一点就表示一个实数, 且不同的点表示不同的实数. 也就是说, 数轴上的全体点与全体实数之间有一一对应关系.

若没有说明, 以后都把集合 $\{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$ 简记为 $\{x \mid a < x < b\}$.

例1 设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$, 求

$$(1) A \cup B,$$

$$(2) A \cap B.$$

解 (1) $A \cup B = \{x \mid -1 < x < 2\} \cup \{x \mid 1 \leq x < 3\}$

$$= \{x \mid -1 < x < 3\}$$

$$(2) A \cap B = \{x \mid -1 < x < 2\} \cap \{x \mid 1 \leq x < 3\}$$

$$= \{x \mid 1 \leq x < 2\}$$

例2 设 $A = \{x \mid -4 < x < -\frac{1}{2}\}$, $B = \{x \mid x \leq -4\}$, 求

$$(1) A \cup B,$$

$$(2) A \cap B.$$

解 (1) $A \cup B = \{x \mid -4 < x < -\frac{1}{2}\} \cup \{x \mid x \leq -4\}$

$$= \{x \mid x < -\frac{1}{2}\}.$$

$$(2) A \cap B = \{x \mid -4 < x < -\frac{1}{2}\} \cap \{x \mid x \leq -4\}$$

$$= \emptyset.$$

例3 设 $I = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, 求 $\bar{A}$.

解 $\bar{A} = \{x \mid x < 1\} \cup \{x \mid x > 2\}.$

或

$$\bar{A} = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 2\}.$$

2. 实数的基本性质

下面列举实数的一些重要性质，这都是今后常常要用到的：

① 实数具有顺序性，即任意两个实数可以比较大小。也就是当 $x \in R, y \in R$ 时， $x > y$ ， $x = y$ ， $x < y$ 中有一个且仅有一个成立。

② 实数具有稠密性，即在任何两个不同的实数之间，必存在另一个实数。也就是对任意实数 a, b ，若 $a < b$ ，则必存在数 c 使 $a < c < b$ 。

③ 实数具有连续性，即在实数集内的数与数轴上的点建立了一一对应关系，因而数轴又叫做实数轴。

④ 实数对加、减、乘、除(除数不为零)、乘方这 5 种运算是封闭的。即任意两个实数进行加、减、乘、除(除数不为零)、乘方运算的结果仍是实数。

⑤ 实数的运算规律：

交换律： $a + b = b + a$ ， $ab = ba$ ；

结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$ ， $(ab)c = a(bc)$ ；

分配律： $a(b + c) = ab + ac$ ；

指数律：设 m, n 是有理数，则 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ， $(a^m)^n = a^{mn}$ ， $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ 。

习题 1.2

1. 设 $A = \{x \mid x + 2 > 0\}$ ， $B = \{x \mid x - 3 < 3\}$ ，求 $A \cap B$ 。

2. 设 $A = \{x \mid x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid x < 1\}$ ，求 $A \cap B$ ， $A \cup B$ ，并在数轴上将其表示出来。

3. 求 $\{\text{有理数}\} \cap \{\text{无理数}\}$ ， $\{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\}$ 。

4. 设 $I = R$ ，且 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ ，判断下列命题哪些是真的：

(1) $1 \in A$ ；

(2) $2 \notin A$ ；

(3) $2 \in A$ ；

(4) $4 \in \bar{A}$ 。

§1.3 对 应

1. 单值对应

设 A, B 是两个集合，如果按照某种对应关系 f ，使 A 的每一个元素 x ，在 B 中都有唯一的一个元素 y 和它对应，则称这种对应关系为单值对应(也称为映射)。在单值对应下，若 A 中元素 a 对应 B 中的元素 b ，则 a 称为 b 的原像， b 称为 a 的像。

例如， $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，则集合 A 与集合 B 之间的对应关系 $f: x \rightarrow y = 2x + 1$ 就是一个从 A 到 B 的单值对应。

2. 一一对应

设 A, B 是两个集合， f 是从集合 A 到集合 B 的单值对应，如果对于集合 A 的不同元素，在 B 中有不同的象，而且 B 中的每一个元素都有原像，这个单值对应就称为从 A 到 B 的一一对应(也称为一一映射)。

例如， $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ，则集合 A 与集合 B 之间的对应关系 $f: x \rightarrow y = 2x$ 就是一个从 A 到 B 的一一对应。

3. 逆对应

设 A 、 B 是两个集合, f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应. 对于集合 B 中的每一个元素 b , 令 b 在 A 中的原像 a 和它对应, 这样建立的对应就称为 f 的逆对应(也称为逆映射), 记作 f^{-1} .

例如, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, $f: x \rightarrow y=2x$ 是从 A 到 B 的一一对应, 则 $f^{-1}: y \rightarrow x=\frac{y}{2}$ 就是 f 的逆对应. 如图 1-8 所示.

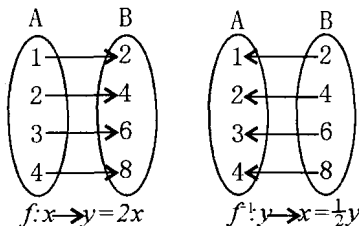


图 1-8

习题 1.3

1. 下列各对应, 哪个是从集合 A 到集合 B 的单值对应?

(1) $A=\{x|x \in Q\}$, $B=\{y|y \geq 0, y \in R\}$, $f: x \rightarrow y=|x|$;

(2) $A=\{1, 2, 3, \dots\}$, $B=\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$, $f: x \rightarrow y=\frac{x}{x+1}$ $x \in A, y \in B$;

(3) $A=\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, $B=\{-1, 1\}$, $f: x \rightarrow y=\cos x$ $x \in A, x \in B$.

2. 下列各对应, 哪一个是一一对应?

(1) $f: x \rightarrow y=x^2+1, x \in R, y \in R^+$;

(2) $f: x \rightarrow y=|x-3|, x \in R^+, y \in R^+$;

(3) $f: x \rightarrow y=\lg x, x \in \{x|x > 1\}, y \in R^+$.

3. 在下列两集合 A 和 B 之间建立一种一一对应关系 f , 并求其逆对应 f^{-1} .

(1) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{8, 9, 10, 11, 12\}$;

(2) $A=\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

§1.4 函 数

函数是描述客观世界中变量间的依赖关系的工具, 是高等数学的主要研究对象, 是现代科学技术中不可缺少的内容.

1. 函数概念

定义一: 在某研究过程中有两个变量 x, y . 如果对于 x 在某个数集 D 内的每一个确定的值, 按照某个对应法则 f , 在数集 Y 内都有唯一确定的值 y 和它对应, 那么 y 就称为 x 的函数. 记作

$$y=f(x) \quad (x \in D).$$

x 称为自变量, y 称为因变量. x 的取值范围称为函数的定义域, 所有和 x 对应的 y 的值组成的集合 M 称为函数的值域.

定义二: 设 D 和 Y 是两个数集, 若对于每一个数 $x \in D$, 依据某一对对应法则 f , 都有唯一的一个数 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是从 D 到 Y 内的一个函数. 记作

$$y=f(x) \quad (x \in D).$$

x 称为自变量, y 称为因变量. x 的取值范围称为函数的定义域, 所有和 x 对应的 y 的值组成的集合 M 称为函数的值域.

这两个函数的定义本质上是一样的, 只是各自的侧重点不同. 定义一侧重于从运动的观点描述函数的定义, 定义二侧重于从映射的观点描述函数的定义.

若点 $x_0 \in D$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 其函数值为 $f(x_0)$. 若点 $x_0 \notin D$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 无定义.

显然, 函数的值域 $M = \{y | y = f(x), x \in D\} \subseteq Y$, 并且函数是从定义域到值域的一个单值对应.

例如, 函数 $y = 2x + 1$ 的定义域是实数集 R , 值域也是 R , 对应法则是 $f: x \rightarrow y = 2x + 1$. 这个函数是一个 R 到 R 上的单值对应.

又如, 二次函数 $y = x^2 + 3$ 的定义域是实数集 R , 值域是集合 $\{y | y \geq 3\}$, 对应法则是 $f: x \rightarrow y = x^2 + 3$, 这个函数是一个 R 到 $\{y | y \geq 3\}$ 上的单值对应.

当函数的定义域和对应关系确定以后, 这个函数就完全确定. 因此, 两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时, 才被认为是相同的函数.

例如, 函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域和对应关系完全相同, 它们是相同的函数, 而函数 $y = \frac{x}{x}$ 与 $y = 1$ 是不同的函数; 函数 $y = \lg x^2$ 与 $y = 2 \lg x$ 也是不同的函数.

2. 函数的表示法

表示函数对应关系的方法, 常用的有以下 3 种:

(1) 解析法

解析法是用数学式子来表示自变量和因变量之间的对应关系. 以后主要研究用解析法表示的函数.

例如, 在自由落体运动中, 物体下落的距离 S 随时间 t 而变, 它们之间的对应关系可以用解析法表示为 $S = \frac{1}{2}gt^2$.

有些函数在它们的定义域内不能用一个解析式表示, 而是在定义域的各个小区间内分别用相应的解析式表示, 这种函数称为分段函数. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < 0 \\ -x^2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

用两个不同的解析式表示自变量和因变量之间的对应关系, 它就是一个分段函数. 在分段函数中, 对自变量 x 的不同取值范围, 分别使用不同的解析式.

(2) 列表法

列表法是用表格的形式表示自变量和因变量之间的对应关系. 平方表、立方表、对数表、开平方表、三角函数表等实质上都是用列表法表示的函数.

(3) 图像法

图像法是利用图像的形式表示自变量和因变量之间的对应关系.

例如,某气象台为了掌握某地气温的变化情况,使用自动记录器将每天的气温记录下来,直接画出一条如图 1-9 所示的曲线(图中只画出某一天的那一段曲线).

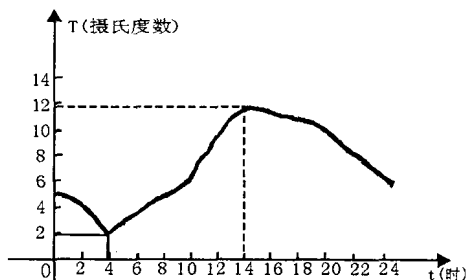


图 1-9

根据这条曲线,可以确定任一时刻 t 的气温.首先在横轴上找出与时刻 t 对应的点,然后经过这一点作纵轴的平行线,它与曲线的交点 P 的纵坐标 T 就是这个时刻的气温.可见,这条曲线可以表示气温 T 与时间 t 的对应关系,而这种对应关系却难于用解析法表示.

以上 3 种方法是表示函数的常用方法,但请注意,并不是所有函数都能用这 3 种方法表示.有些函数自变量和因变量之间的对应关系,并不是通过某种运算关系表达的,而是用一句话给出的.

例 1 “对任意 $x \in \mathbb{R}$, 对应的 y 是不超过 x 的最大整数”.显然,对每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都对应唯一的一个 y , 这个对应关系是一个函数,记为 $y = [x]$, 如 $[2.5] = 2$, $[1] = 1$, $[-\pi] = -4$ 等等,如图 1-10 所示.

例 2 如果 $x > 0$ 时,令 $y = 1$; 如果 $x = 0$ 时,令 $y = 0$; 如果 $x < 0$ 时,令 $y = -1$. 显然,这个对应关系是一个函数,记为

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

如图 1-11 所示.

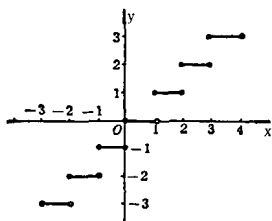


图 1-10

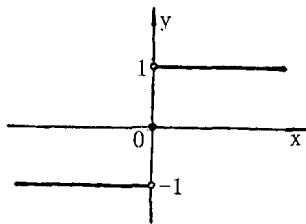


图 1-11

例 3 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 当 x 是有理数时,对应的 y 的值是 1; 当 x 是无理数时,对应的 y 的值是 -1, 该对应关系确定的函数即是

$$y = \begin{cases} 1 & x \text{ 是有理数} \\ -1 & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

这些函数的自变量和因变量之间的对应关系,使用解析法、列表法和图像法都不易表示,而是使用一句话给出的.

3. 函数的定义域

函数的定义域可以有多种表示方式,通常使用集合、不等式和区间表示.