现代数学基础丛书 141

拓扑动力系统

——从拓扑方法到遍历理论方法

周作领 尹建东 许绍元 著

科学出版社

内 容 简 介

本书从线段动力系统、圆周动力系统、符号动力系统到一般动力系统，从纯拓扑方法到遍历理论方法，系统地介绍拓扑动力系统的基本内容，并结合这些基本内容的介绍，总结了作者 30 多年来在这些方面的科研成果. 本书共分七章和三个附录，第 1 章在最一般意义下介绍拓扑动力系统的研究框架；第 2 章讨论一维(线段和圆周)动力系统；第 3 章讨论符号动力系统；从第4章，开始讨论一般动力系统，系统介绍从遍历理论基本思想引申出的几个基本问题，包括测度中心和极小吸引中心、弱和拟弱几乎周期点以及由此得到的点的轨道结构的三个层次等. 本书主要讨论离散半动力系统，第 7 章把离散系统的弱几乎周期点概念推广到流的情形. 前两个附录分别介绍必备的集合论和点集拓扑以及遍历理论知识，而附录 C 则是一篇深入讨论流的性质的文章.

本书可供数学专业高年级本科生和动力系统方向研究生、教师学习使用，亦可供相关专业科研人员和技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑动力系统：从拓扑方法到遍历理论方法/周作领，尹建东，许绍元著. —北京：科学出版社，2011

（现代数学基础丛书；141）

ISBN 978-7-03-032586-0

Ⅰ. ①拓…　Ⅱ. ①周…　②尹…　③许…　Ⅲ. ①拓扑-动力系统（数学）Ⅳ. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 214472 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011年12月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2011年12月第一次印刷　印张：15 1/4
印数：1－2 000　字数：289 000

定价：58.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

前 言

在历史上, 动力系统的发展与遍历理论 (不变测度理论) 密不可分. 前者讨论的是群在拓扑空间上的连续作用, 后者则研究群在测度空间上的保测作用. 在紧致可度量拓扑空间上存在一个自然的测度结构, 即 Borel σ 代数, 其上的连续作用成为可测作用. 这就给使用遍历理论方法研究动力系统架起一座桥梁. 紧致系统的遍历理论是由苏联数学家 Kryloff-Bogoliouboff 在 1937 年建立的, 经众多数学家的多年辛勤耕耘, 这一理论已臻成熟. 值得一提的是, 我国已故杰出数学家廖山涛院士早在近代微分动力系统创建的初期, 就洞悉遍历思想和方法的巨大潜力, 最早把它引进近代微分动力系统的研究中来, 开启了目前已非常活跃的微分动力系统的遍历理论的研究先河, 对近代微分动力系统的创建和发展作出了巨大贡献. 拓扑动力系统是只依赖紧致性和连续性的动力系统. 在这个意义上, 它是整个动力系统的基础. 近几十年才引进和发展起来的熵的概念和混沌 (紊动) 现象也只依赖于紧致性和连续性, 因而自然成为拓扑动力系统的研究对象. 事实上, "非游荡集 – 拓扑熵 – 混沌" 构成了拓扑动力系统的一个重要研究骨架, 对它们及其间联系的研究可以带动整个拓扑动力系统的发展. 而从纯拓扑方法到引进遍历理论方法, 可以使人们在研究中紧紧抓住本质而不为表象所迷惑, 使研究得以深入一步. 本书作者三十年来正是遵循这样一条路线从事拓扑动力系统的研究的.

本书主要选材于作者三十年来的研究工作中所先后涉猎过的内容, 因而也是作者所熟悉的内容. 这就难免挂一漏万, 远不能概括拓扑动力系统的全貌, 因为作者所熟悉的不过是动力系统的一角而已. 特别是近年来崛起的拓扑动力系统在组合数论中的应用, 更是远未涉及 (建议有兴趣的读者可参阅文献 [51] 和 "2011 年国际可测与拓扑动力系统及相关课题黄山会议" 文献). 本书首先讨论线段动力系统, 这是作者于 20 世纪 70 年代在恩师廖山涛教授指引下在国内最先开始研究的领域. 那个时候, 动力系统这一学科还刚刚创建不久, 动力系统的一些新名词和新概念还不为人们所了解, 诸如回复点和非游荡点乃至异状点 (homoclinic point) 等, 人们对它们还远没有感性认识, 例如, Block 曾发表文章, 证明线段自映射的非游荡集基数有限, 则非游荡集与周期点集重合, 即每一个非游荡点都是周期点. 这样的文章在今天当然不能发表, 因为它太简单了, 可在三四十年前却需要证明一番人们才能理解. 线段动力系统是最简单的动力系统, 不过这里所谓简单是在下述意义下的简单, 即任何一般动力系统, 只要底空间包含线段的连续像作为子空间, 那么线段动力系统都是这样动力系统的特殊情形, 而绝非每个线段动力系统都很简单, 存在可以复杂

到什么程度的线段动力系统人们是远不清楚的. 例如, 线段动力系统可以有无穷拓扑熵. 但线段动力系统毕竟更直观, 是唯一可以做出图像的动力系统, 也就是每一个点的轨道都可以在其图像中归纳地显示出来. 这当然给人们带来极大方便, 使得人们更容易理解和把握动力系统基本概念. 在线段动力系统之后, 本书讨论的是圆周动力系统. 线段和圆周是唯有的两个连通一维紧流形, 前者是带边的, 后者不带边, 因此线段动力系统和圆周动力系统很相近, 几乎通过提升概念可以把圆周动力系统转化线段动力系统来研究. 但两者有一个重大区别, 即线段动力系统严格遵从 Sharkovskii 定理, 而圆周动力系统可以有其他周期点但无 2 周期点的情况发生. 我们对一维动力系统的讨论可谓详尽, 这可以弥补文献 [51] 的不足. 在圆周动力系统之后, 我们讨论符号动力系统. 符号动力系统是特殊的动力系统, 它本身具有理论意义, 有很多有趣的问题需要解决, 如我们至今还没有得到一个非有限型子转移有零熵的充要条件. 另外, 也许更重要的是符号动力系统在整个动力系统理论中 (包括微分动力系统) 和分形几何中都有广泛的应用, 而且在计算机理论中也有重要应用, 如所谓胞腔自动机事实上就是符号动力系统. 线段动力系统和符号动力系统都是特殊动力系统, 受底空间的制约, 它们的某些性质往往具有特殊性而不具有一般性, 例如对线段动力系统而言, 周期轨道在线段上的分布不同, 所决定的动力性状往往可以大相径庭, 在一般情形就不存在这样的问题, 因为这是由线段的良序性质决定的. 但有些性质则存在可否向一般情形推广的问题, 如 Sharkovskii 定理在一般情形是否成立? 特殊情形的结果, 即使在一般情形下也可以提问, 但不一定成立. 如对线段动力系统而言, 限制在非游荡集上的混沌与正熵等价, 但在一般情形却不成立. 线段动力系统和符号动力系统有某种试验区的作用, 一个一般性的问题, 往往要先看看对特殊情况是否成立, 成立之后再考虑向一般情形推广. 这往往是一种考虑问题的方法. 在线段动力系统和符号动力系统的讨论中, 我们基本上使用的都是拓扑方法, 没有涉及遍历理论方法. 但实际上, 遍历理论方法在线段动力系统和符号动力系统中也有突出的结果, 例如, 对线段动力系统而言, Bowen-Franks 定理的证明[16] 是很不简单的, 要用到代数拓扑的工具, 而 Misiurewicz[40] 用遍历理论方法给出一个相对简单的证明.

在符号动力系统之后, 我们就转向一般动力系统的讨论, 并在纯拓扑方法之外, 引进遍历理论方法或紧致系统的不变测度理论. 如前所述, 这一理论是苏联数学家 Kryloff-Bogoliouboff 于 1937 年所建立, 现在在动力系统研究中已经蔚然成风, 成为最重要的组成部分. 按作者的体会, 遍历理论方法的运用可以使人们在研究中抓住本质而不为假象所迷惑. 基于这种思想, 我们在紧致系统中引进测度中心或极小吸引中心的概念, 而为了决定测度中心的结构, 我们放宽几乎周期点的条件, 引进弱几乎周期点和拟弱几乎周期点的概念, 在传统意义下五个回复层次中又加入了两个

新层次. 这些内容的讨论构成本书后半部分的主要篇章. 本书基本上包含了作者关于动力系统的全部工作.

本书没有引进族的概念, 因为我们过去的研究中基本没有涉及这个概念, 而且在文献 [51] 中有较详尽的讨论, 有兴趣的读者可参阅该书.

本书共分七章和三个附录. 第 1 章在一般的框架下介绍拓扑动力系统的定义、概念和已知的基本命题. 第 2 章和第 3 章分别讨论一维动力系统 (线段动力系统和圆周动力系统) 和符号动力系统. 它们本身都是可以自成体系的独立研究领域, 均有专著出版. 但我们是把它们当作本书从特殊情形到一般情形的过渡而刻意安排当作特殊情形加以考虑的: “在特殊情形下得到的结论在一般情形下是否仍然成立?” 曾是我们开展一般拓扑动力系统研究的动力之一. 当然, 符号动力系统还是一种非常有用的工具, 特别是在构造反例方面. 第 1 章和第 3 章的内容在文献 [57] 中已有较详尽的论述, 但出于本书封闭性的考虑, 我们不得不把它们列为本书的一个章节, 而为了节省篇幅, 我们采取的是 “叙而不证” 的策略. 从第 4 章起, 我们开始讨论一般拓扑动力系统, 即紧致可度量空间上的连续自映射, 介绍沿点的轨道生成的系统的不变测度的性质以及其他一些基本遍历理论内容. 第 5 章从 “寻求保持原系统全部重要动力性状的最小子系统” 出发, 引进 “测度中心” 的概念和它的另一种描述——极小吸引中心. 第 6 章在两个回复性新层次——弱和拟弱几乎周期点及测度中心的基础上, 讨论点的轨道的层次问题和混沌的层次问题. 第 7 章把本书关于离散系统的理论推广到流上去, 但关于流的讨论没有深入展开. 附录 A 介绍集合论和拓扑的基础知识. 拓扑动力系统, 顾名思义, 拓扑方法是最基本的方法. 为了照顾大多数读者, 我们介绍了集合论和点集拓扑的基本内容, 这部分内容对读过点集拓扑的读者没有任何困难. 附录 B 简单介绍测度论遍历理论基础[50]. 这部分内容对较多读者可能是不熟悉的, 因而我们的介绍略详尽些, 但只是叙述而不加证明, 读者如能掌握这些内容, 就可以顺利阅读本书. 特别需要声明的是, 掌握附录的内容是阅读本书后半部分的必要条件. 黄煜和周作领对流涉及弱几乎周期点乃至测度中心等作了详尽的讨论, 形成一篇完整的文章, 作为附录 C 列于本书之后[29], 供有兴趣的读者参考.

本书写作得到很多人的帮助. 我首先要感谢的是文兰院士、叶向东教授、苏维宜教授、井竹君教授、吴敏教授, 感谢他们对本书作了热情洋溢的推荐, 使得我们申请国家科学技术学术著作出版基金成功. 另外, 我还要感谢黄煜教授、朱智伟教授、罗俊教授和李浩副教授, 他们也给作者很多帮助, 特别是在本书的排版和纠错方面. 没有他们的帮助, 本书是无法完成的.

最后, 限于作者的水平和知识面, 本书难免挂一漏万, 不当甚至错误之处也在所难免, 敬希读者不吝赐教.

本书的出版得到国家自然科学基金 (项目批准号：10971236) 和国家科学技术学术著作出版基金的支持.

周作领

2011 年 7 月 1 日

目　　录

符 号 表

$A(f)$	f 的几乎周期点集
$B(x,r)$	x 的半径为 r 球形 (开) 邻域或 r 邻域
$B(E,r)$	集合 E 的半径为 r 的球形 (开) 邻域
$\mathfrak{B}(X)$	空间 X 的 Borel σ 代数
C	中间三分 Cantor 集
$\mathcal{C}$	空间的紧致集合族
$C(X)$	紧致度量空间 X 上全体复连续函数的空间
$\overline{D}_c^s(E,x)$	集合 E 在点 x 处的上凸密度
$\mathrm{ent}(f)$	连续自映射 f 的拓扑熵
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
$\dim_B$	盒维
$\underline{\dim}_B$	下盒维
$\overline{\dim}_B$	上盒维
$\dim_H$	Hausdorff 维数
$\dim_P$	填充 (packing) 维数
$\|E\|$	集合 E 的直径
$h_m(f)$	保测映射 f 的测度熵
$H^s(E)$	集合 E 的 s 维 Hausdorff 测度
$L^n(E)$	集合 E 的 n 维 Lebesgue 测度 (体积)
$\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}_+$	全体自然数或正整数
$S(f)$	紧致系统 (X,f) 的支撑点的集合
S_m	测度 m 的支撑
Σ	有限符号空间
$\sigma:\Sigma\to\Sigma$	符号空间上的转移自映射

第 1 章 动力系统基础

在拓扑动力系统的讨论中, 有一些概念是不可须臾或离的, 它们构成了一般拓扑动力系统研究的基础和基本框架, 任何特殊系统的讨论都围绕它们进行. 这些概念包括拓扑动力系统的定义、子系统、回复性、传递性、混合性以及拓扑共轭和半共轭等, 还有就是拓扑熵和混沌. 本章的目的是在最一般的意义下给出这个框架. 所涉及的基本性质 (命题) 一般不再给出证明, 读者可参考有关文献, 如文献 [11], [50], [51], [57], [58] 等.

1.1 拓扑动力系统的一般定义

设 X 为紧致可度量空间, $f: X \to X$ 为从 X 到其自身的连续映射. f 可以看作是 X 上的连续作用: X 的每一点在 f 的作用下生成像点 $f(x)$, 它仍然在 X 中, 可以对它继续作用, 生成像点 $f^2(x) = f(f(x))$. f^2 仍然是 X 上的自映射. 这个过程显然可以无限进行下去, 于是得到 X 上的一个连续自映射的序列: $f^0 = id$, 即 X 的恒同映射, $f^1 = f$, $f^2 = f \cdot f$. 一般地, 对 $n > 1$, $f^n = f^{n-1} \cdot f$, 其中的 $\cdot$ 表映射的复合.

定义 1.1.1 *X 上的连续自映射序列*

$$\{f^0, f^1, \cdots, f^n, \cdots\}$$

称作 X 上由连续自映射 f 经迭代而生成的拓扑离散半动力系统.

当 f 是 X 上的自同胚时, 有相反方向的迭代, 因而得到

$$\{\cdots, f^{-n}, \cdots, f^{-1},\ f^0,\ f^1, \cdots, f^n, \cdots\},$$

叫做 X 上由自同胚 f 经迭代而生成的拓扑离散动力系统. 本书主要讨论拓扑离散半动力系统, 只在最后一章讨论拓扑流, 其定义在第 7 章给出. 对 X 和 f 加上可微性条件, 可以定义微分离散动力系统或半动力系统, 亦可以定义可微流, 本书不涉及.

设 d 是 X 的一个拓扑度量. 用 $C^0(X)$ 表示 X 上全体连续自映射的集合. 下面在 $C^0(X)$ 上定义一个度量, 使得 $C^0(X)$ 成为完备度量空间.

定义 1.1.2 令

$$\rho: C^0(X) \times C^0(X) \to \mathbb{R}^+,$$

使得

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\},\quad \forall f,g\in C^0(X).$$

据 X 的紧致性, ρ 是有定义的, 且易于验证它是 $C^0(X)$ 上的一个度量. 进而, 可以证明在这个度量下 $C^0(X)$ 是一个完备空间, 也就是 $C^0(X)$ 上的柯西序列收敛到其上一点. 此后, 用 $f\in C^0(X)$ 或 (X,f) 表示由紧致可度量空间 X 上的连续自映射 f 生成的拓扑离散半动力系统, 简称动力系统或紧致系统.

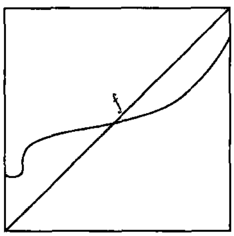

图 1.1.1　线段自映射 f

例 1.1.1　设 $X=I=[0,1]$, 即 X 是闭线段. (X,f) 叫做线段自映射或线段动力系统. 线段动力系统是最简单的动力系统, 是唯一可以画出相图的动力系统, 如图 1.1.1 所示.

例 1.1.2　设 $X=S^1$, 即单位圆周. (X,f) 叫做圆周自映射或圆周动力系统.

1.2　不变集与子系统

设 (X,f) 为紧致系统. 如果紧致子集 $X_0\subset X$ 对 f 不变, 即

$$f(X_0)\subset X_0,$$

则把 f 在 X_0 上的限制映射

$$f|_{X_0}:X_0\to X_0$$

所生成的紧致系统 $(X_0,f|_{X_0})$ 或 $f|_{X_0}$ 称作紧致系统 (X,f) 或 f 的子系统. 子系统在动力系统研究中扮演重要角色. 一般说来, 给定一个紧致系统 (X,f), 我们要研究的是它的动力性状, 例如下面将要定义的周期轨道的存在性等. 很显然, f 的每一个子系统的动力性状都是 (X,f) 的动力性状的一部分, 而 (X,f) 的全部动力性状可由它的全体子系统所决定.

对每一点 $x\in X$, x 在 f 的作用下生成的轨道

$$\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}$$

记作 $\mathrm{orb}(x)$.

我们将会看到, 动力系统的问题是多种多样的, 但其核心问题却是轨道的渐近性质或拓扑结构, 即当 $n\to\infty$ 时轨道的极限性质. 在这个意义下, 轨道的概念是动力系统最基本的概念之一.

设 $x\in X$, 易见轨道 $\mathrm{orb}(x)$ 是对 f 不变的, 它不是紧致集合, 不能生成子系统. 但它的闭包, 即 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 是紧致的, 且显然也是对 f 不变的. 因此得到子系统

$$f|_{\overline{\mathrm{orb}(x)}}:\overline{\mathrm{orb}(x)}\to\overline{\mathrm{orb}(x)}.$$

X 的每一点在 f 的作用下都生成一条轨道, 因此 X 的每一点都可以生成一个子系统. 这些子系统, 即

$$\{f|_{\overline{\mathrm{orb}(x)}}:\forall x\in X\}$$

是 f 的最基本的子系统, 它们可以决定 f 的全部动力性状. 本书的一个基本想法是寻求 X 的一个 "最小" 的紧子集 X_0, 使得

$$\{f|_{\overline{\mathrm{orb}(x)}}:\forall x\in X_0\}$$

亦可以决定 f 的全部动力性状.

1.3 回 复 性

如我们在上一节所说, 动力系统的核心问题是轨道的渐近性质或拓扑结构. 以后将会看到, 只有那些具有某种回复性质的点的轨道才是重要的. 为此, 下面先引进回复性的概念.

设 (X,f) 是紧致系统.

定义 1.3.1 对 X 中一点 x, 如果存在 $n>0$, 使得 $f^n(x)=x$, 则称 x 是 f 的周期点, 并称使 $f^n(x)=x$ 成立的最小的正整数 n 为 x 的周期.

f 的全体周期点的集合记作 $P(f)$, f 的所有可能的周期的集合记作 $p(f)$. 周期为 1 的周期点称作 f 的不动点, f 的全体不动点的集合记作 $F(f)$. 易于证明, $F(f)$ 是 f 的闭子集.

周期性是最强的回复性, 也是最重要和最基本的回复性. 下面陆续引进的回复性都是周期性的推广.

容易举例说明, 不动点的集合可以是空的, 周期点的集合也可以是空的. 例如, 线段自映射一定有不动点, 但圆周自映射却可以没有不动点, 也可以没有周期点.

设 $x\in X$. 若存在 $n>0$, 使得 $f^n(x)\in P(f)$, 则称 x 是 f 的一个终于周期点 (eventually periodic point), 并称 $f^n(x)$ 的周期轨道是 x 进入的周期轨道, 全体终于周期点的集合记为 $EP(f)$. 易见 $P(f)\subseteq EP(f)$.

定义 1.3.2 对于 $x\in X$, 如果存在正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f^{n_i}(x)=x,$$

则称 x 是 f 的一个回复点.

易于证明上述定义等价于：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > 0$, 使得

$$f^n(x) \in V(x, \varepsilon),$$

这里 $V(x, \varepsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$ 是 x 的半径为 ε 的球形邻域, 其中 d 是 X 的一个拓扑度量. 显然回复性是周期性的推广. f 的全体回复点的集合记作 $R(f)$, 以后将会看到, 回复点集总是不空的.

定义 1.3.3 *设 $x \in X$, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得*

$$f^n(V(x, \varepsilon)) \cap V(x, \varepsilon) = \varnothing, \quad \forall n > 0,$$

则把 x 称作 f 的一个游荡点. 如果 x 不是 f 的游荡点, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > 0$, 使得

$$f^n(V(x, \varepsilon)) \cap V(x, \varepsilon) \neq \varnothing,$$

则称 x 为 f 的一个非游荡点.

从定义不难看出 f 的全体游荡点的集合是 X 的开子集. 因此 f 的全体非游荡点的集合是 X 的闭子集, 记作 $\Omega(f)$.

从定义易于验证

$$F(f) \subseteq P(f) \subseteq R(f) \subseteq \Omega(f),$$

且它们都是 f 的不变子集. 例如

$$f(R(f)) \subset R(f)$$

等. X 的这个子集合序列构成了 f 的回复性的几个不同层次, 随着本书内容的陆续展开, 我们还要在它们之间加进几个另外的层次. 可以举例说明, 上述包含关系的每一个都可以是真包含, 而且中间两个一般不是紧子集. 再者, 回复点是点本身的回复, 而非游荡点则是该点的邻域的回复. 非游荡性是最弱的回复性. 限制在非游荡集上的子系统

$$f|_{\Omega(f)} : \Omega(f) \to \Omega(f)$$

是最重要和最基本的子系统, 在某种意义下它可以代替原系统而保留全部动力性状不变.

1.4 ω 极限集

设 (X, f) 为紧致系统.

定义 1.4.1 设 $x \in X$. 如果存在正整数递增序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y,$$

则把点 y 称作 x 的一个 ω 极限点, 并称 x 的全体 ω 极限点的集合为它的 ω 极限集, 记作 $\omega(x, f)$.

易于证明

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n>0} \overline{\bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{orb}(f^k(x))}.$$

当 x 是 f 的 n 周期点时, 显然

$$\omega(x, f) = \mathrm{orb}(x) = \{x, f(x), \cdots, f^{n-1}_{(x)}\}.$$

ω 极限集描述了轨道的渐近性质或拓扑结构. 在这个意义上可以说它是动力系统最基本和最重要的概念之一.

下述几个命题证明简单, 从略 (读者可参考文献 [58]).

命题 1.4.2 设 $x \in X$. 则 $\omega(x, f)$ 是 X 的非空闭子集.

命题 1.4.3 设 $x \in X$. 则

$$f(\omega(x, f)) = \omega(x, f) = \omega(f^i(x), f), \quad \forall i \geqslant 0.$$

f 限制在 ω 极限集上的子系统是最重要的子系统.

命题 1.4.4 设 $x \in X$. 则

$$x \in R(f) \Leftrightarrow x \in \omega(x, f).$$

定义 1.4.5 设 $x \in X$. 若存在 $p \in P(f)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0,$$

则称 x 为 f 的一个渐近周期点. 当存在 $k > 0$, 使得

$$f^k(x) \in P(f)$$

时, x 称为 f 的一个终于周期点.

显然, 终于周期点是渐近周期点. 易于举例说明, 终于周期点可以不是周期点, 渐近周期点也可以不是终于周期点. 再者, 易于看出非周期的渐近周期点不是回复点. f 的渐近周期点集用 $AP(f)$ 表示.

下述命题的证明可参见文献 [57].

命题 1.4.6 设 $x \in X$. 则

$$x \notin AP(f) \Rightarrow \omega(x, f)$$

不可数.

命题 1.4.7　设 $x\in X$. 则对任意 $n>0$, 有

(1) $\omega(x,f)=\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\omega(f^i(x),f^n)$;

(2) $f(\omega(f^i(x),f^n))=\omega(f^{i+1}(x),f^n), i=0,1,\cdots,n-1$;

(3) $f(\omega(f^{n-1}(x),f^n))=\omega(x,f^n)$.

命题 1.4.8　$R(f^n)=R(f),\forall n>0$.

1.5　拓扑传递性与拓扑混合性

设 (X,f) 为紧致系统.

定义 1.5.1　f 叫做拓扑传递的, 如果存在 $x\in X$, 使得 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=X$, 即 x 的轨道在 X 中处处稠密.

下述命题给出拓扑传递性的几个等价条件, 从不同角度刻画了拓扑传递性这一重要概念, 它们中的每一个都可以作为拓扑传递性的定义. 它的证明可参见文献 [50],[57]. 先回忆拓扑学的一个概念: X 的一个子集合叫做 G_δ 型集, 如果它是可数个开集的交集.

命题 1.5.2　设 $f(X)=X$, 即 f 是在上的. 则下述诸条件是等价的:

(1) f 是拓扑传递的;

(2) 若 $\Lambda\subset X$ 闭且 $f(\Lambda)\subset\Lambda$, 则 $\Lambda=X$ 或 Λ 在 X 内无处稠密;

(3) 若 $\mathcal{O}\subset X$ 开且 $f^{-1}(\mathcal{O})\subset\mathcal{O}$, 则 $\mathcal{O}=\varnothing$ 或 $\mathcal{O}$ 在 X 中处处稠密;

(4) 对任意非空开集 $\mathcal{U},\mathcal{V}$, 存在 $n>0$, 使得 $f^{-n}(\mathcal{U})\cap\mathcal{V}\neq\varnothing$;

(5) 对任意非空开集 $\mathcal{U},\mathcal{V}$, 存在 $n>0$, 使得 $f^{n}(\mathcal{U})\cap\mathcal{V}\neq\varnothing$;

(6) 集合

$$\{x\in X|\ \overline{\mathrm{orb}(x)}=X\}$$

是 X 的一个处处稠密的 G_δ 型集.

拓扑传递性是动力系统的一个基本概念. 并不是每一个紧致系统都是拓扑传递的, 但每一个紧致系统一定有拓扑传递的子系统, 这是因为据命题 1.5.2 和命题 1.4.4, 对每一个 x, 子系统

$$f|_{\omega(x,f)}:\omega(x,f)\to\omega(x,f)$$

是拓扑传递的. 正如前面所说, 回复点集总是不空的, 这可以直接证明, 但这里不去证明它, 而把它当作后面一个命题的推论.

下面讨论另一个重要概念, 即拓扑混合性. 定义映射

$$\begin{cases} f\times f: X\times X\to X\times X,\\ (x_1,x_2)\mapsto(f(x_1),f(x_2)), \end{cases}\tag{1.5.1}$$