普通高等教育“十二五”规划教材

北京市精品课程配套教材

工科数学分析教程

（下册）

杨小远　孙玉泉　杨卓琴　薛玉梅　编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

北京市精品课程配套教材

工科数学分析教程(下册)

杨小远 孙玉泉
杨卓琴 薛玉梅 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书将微积分经典内容进行拓展与延伸，力求反映当代数学的发展趋势，为此引入了分支与混沌、分数阶傅里叶变换与小波变换等内容．与传统的数学分析教材不同，本书设置了系列探索类问题，目的是培养学生的开放式思维和独立思考问题的能力．根据信息化背景下对人才的要求，本书内容与计算机和信息技术相结合，增加了非线性方程数值方法、函数多项式插值逼近及外推算法、数值积分、非线性数值优化初步以及常微分方程数值求解等内容．

全书分为上、下册，本书为下册．内容包括：傅里叶级数与傅里叶变换、分数阶傅里叶变换与小波变换初步、Euclid空间上的极限与连续、多元函数微分与泰勒公式、隐函数方程组存在定理以及应用、无约束与约束极值问题、非线性数值优化初步、向量函数微分学、常微分方程及数值解初步、微分方程稳定性分析初步、重积分、曲线与曲面积分、场论、含参变量积分．

本书可以作为高等院校非数学专业的微积分教材，也可作为其他科研人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析教程(下册)/杨小远等编著．—北京：科学出版社，2012
普通高等教育"十二五"规划教材·北京市精品课程配套教材

ISBN 978-7-03-033113-7

Ⅰ．①工… Ⅱ．①杨… Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ．①O17
中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第271322号

责任编辑：张中兴/责任校对：赵桂芬
责任印制：张克忠/封面设计：北京蓝正广告设计有限公司

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012年1月第一次印刷 印张：23 1/4
字数：460 000

定价：43.00元

目　录

第 11 章

Fourier 级数与 Fourier 变换

法国数学家傅里叶(J. Fourier,1768～1830 年)在 1807 年发表了题为《热的解析理论》的论文,在论文中提出,以 2π 为周期的函数可以展开成无限多个正弦函数和余弦函数的和,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

在进一步的研究中,Fourier 将以 2π 为周期的函数推广到任意周期的函数,又从周期函数推广到非周期函数,并提出 Fourier 积分. Fourier 级数和 Fourier 积分奠定了 Fourier 变换的基础. 随着电磁理论和技术的发展,尤其是电子通信和信号理论与技术的发展, Fourier 变换得到了广泛的应用. 在 Fourier 变换的基础上,D. Gabor 在 1946 年提出窗口 Fourier 变换,进一步地,法国地质物理学家 J. morlet 和数学家 Y. Meyer 等提出小波变换(Wavelet transform). V. Namias 等在 1980 年提出分数阶 Fourier 变换(Fractional Fourier transform). Fourier 变换、分数阶 Fourier 变换、小波变换被广泛地应用于工程技术领域,可以说 Fourier 变换理论在现代分析中占有核心地位. 本章将详细讨论 Fourier 级数与 Fourier 变换的基本概念和原理,并介绍分数阶 Fourier 变换和小波变换的基本思想.

11.1 Fourier 级数基本概念

定义 11.1.1(三角函数系) 称函数系

$$1,\cos x,\sin x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{11.1.1}$$

为三角函数系.

通过三角函数和差化积公式,容易验证三角函数系满足下面的关系:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases} && m,n=0,1,2,\cdots\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n.\end{cases} && m,n=1,2,\cdots\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x=0, && m,n=1,2,\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{11.1.2}$$

满足上述性质的函数是正交的,下面给出一般函数系正交的概念.

定义 11.1.2(函数正交) 设函数 $f(x),g(x)$在区间$[a,b]$可积,并且满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

则称函数 $f(x),g(x)$在区间$[a,b]$是正交的.

进一步,引入正交函数序列的概念.

定义 11.1.3(正交函数序列) 设函数序列 $f_n(x),n=1,2,3,\cdots,n,\cdots$在区间$[a,b]$是可积的,并且满足

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ a\neq 0, & n=m.\end{cases} \tag{11.1.3}$$

收称函数序列$\{f_n(x)\}$ 在区间$[a,b]$是正交的.

由定义 11.1.3 知道,三角函数系式(11.1.1)在$[0,2\pi]$是正交的.在三角函数系的基础上,进一步定义三角级数.

定义 11.1.4(三角级数) 定义下面级数为三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{11.1.4}$$

根据函数项级数一致收敛的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判定定理,可推导出定理 11.1.1.

定理 11.1.1 若 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ 收敛,则三角级数式(11.1.4)在实数域上绝对收敛且一致收敛.

设三角级数式(11.1.4)一致收敛到 $f(x)$,则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{11.1.5}$$

下面分析三角级数式(11.1.4)中系数 a_n,b_n 的表达式.考虑级数式(11.1.6)

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0\cos mx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx). \tag{11.1.6}$$

由于级数式(11.1.6)仍然一致收敛,因此根据函数项级数逐项积分定理,可以将式(11.1.6)两边同时在$[-\pi,\pi]$逐项积分,则有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x=&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0\cos mx}{2}\mathrm{d}x\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

根据三角函数系式(11.1.2)的正交性,得到下面结论

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x,\quad m=0,1,2,\cdots, \tag{11.1.7}$$

同理,有

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x, \quad m = 1,2,\cdots. \tag{11.1.8}$$

综合上面讨论,可推导出定理 11.1.2.

定理 11.1.2 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 在实数域上一致收敛,则式(11.1.7)和式(11.1.8)成立.

定义 11.1.5(Fourier 级数) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 称为 $f(x)$的 Fourier 级数, a_n, b_n为相应的 Fourier 系数,由式(11.1.7)和式(11.1.8)给出.

习 题 11.1

1. 证明:n 次三角多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

2. 设 f 是周期为 2π 的可积函数,证明:

(1) 如果 f 在$[-\pi,\pi]$中满足 $f(x+\pi)=f(x)$,那么

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0;$$

(2) 如果 f 在$[-\pi,\pi]$中满足 $f(x+\pi)=-f(x)$,那么

$$a_{2n} = b_{2n} = 0.$$

3. 设 a_n, b_n 是周期为 2π 的可积函数 f 的 Fourier 系数,证明:平移函数 $f(x+h)$的 Fourier 系数是

$$\tilde{a}_n = a_n\cos nh + b_n\sin nh,$$
$$\tilde{b}_n = b_n\cos nh - a_n\sin nh.$$

4. 证明:如果级数

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < +\infty,$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

必为周期为 2π 的某连续函数的 Fourier 级数.

5. 证明:若 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 中的系数满足$\sup_n\{n^3|a_n|, n^3|b_n|\}\leqslant M$, M 为常数,则上述三角级数收敛,且和函数具有连续导函数.

6. 证明:勒让德(Legendre)多项式$\begin{cases} p_0(x)=1, \\ p_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}, n=1,2,3,\cdots \end{cases}$是$[-1,1]$上的正交函数系.

11.2 Fourier 级数收敛问题讨论

在 Fourier 级数问世约四分之一世纪以后，德国数学家狄利克雷(P. G. L. Dirichlet,1805～1859 年)首先得到 Fourier 级数的收敛条件；又过了约半个世纪，另一位德国数学家利普希茨(R. O. S. Lipschitz,1832～1903 年)得到与之不同的收敛条件. 他们的结果后来得到数学家的不断完善. 本节将详细讨论 Fourier 级数的收敛问题.

11.2.1 Fourier 级数逐点收敛

首先引入定义 11.2.1.

定义 11.2.1(分段光滑函数) 若 $f(x)$在$[a,b]$上至多有有限个第一类间断点 x_i，$i=1,2,\cdots,n$,其导函数除这些点外都存在且连续,同时在点 x_i,$i=1,2,\cdots,n$ 处导函数的左右极限均存在,则 $f(x)$在$[a,b]$上称为分段光滑函数.

显然,若 $f(x)$的导函数在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上光滑.

定理 11.2.1(Dirichlet 定理) 若 $f(x)$是以 2π 为周期的函数,且在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,则当 $x\in[-\pi,\pi]$时,$f(x)$的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$的左右极限的平均值,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{11.2.1}$$

其中,a_n,b_n 为 $f(x)$的 Fourier 系数.

由定理 11.2.1,可以得到推论 11.2.1.

推论 11.2.1 若 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数,且在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,则 $f(x)$的 Fourier 级数在$(-\infty,+\infty)$收敛于 $f(x)$,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

为了证明定理 11.2.1，需要证明下面几个引理. 首先推导式(11.2.1)的 Fourie 级数前 n 项和的数学表达式 $S_n(x)$. 将 Fourie 级数的系数表达式(11.1.7)和式(11.1.8)代入 $S_n(x)$，则有

$$\begin{aligned}
S_n(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_n\sin kx)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(f(u)\cos ku\cos kx\,\mathrm{d}u+f(u)\sin ku\sin kx)\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)\right]\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]\mathrm{d}u\right\},
\end{aligned}$$

又由于

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\tag{11.2.2}$$

因此，令 $t=u-x$，通过积分变量代换得到

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{(u-x)}{2}}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{11.2.3}$$

式(11.2.3)通常称为 Dirichlet 积分，通过上面的推导得到引理 11.2.1.

引理 11.2.1(Dirichlet 积分) 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

定理 11.2.1 的收敛性等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]=0.\tag{11.2.4}$$

进一步，根据引理 11.2.1，式(11.2.4)等价于证明式(11.2.5)成立.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right]=0.\tag{11.2.5}$$

因此，如果能够证明式(11.2.6)的(1)和(2)均成立，则式(11.2.5)就可以得到证明.

$$\left.\begin{aligned}&(1)\qquad \frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,\\&(2)\qquad \frac{f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}\right\}\tag{11.2.6}$$

证明 由式(11.2.2)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=1,$$

因此,有

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

进一步,式(11.2.6)的(1)和(2)分别等价于证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0. \tag{11.2.7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x-0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0. \tag{11.2.8}$$

为此引入引理 11.2.2.

引理 11.2.2(黎曼-勒贝格引理)(Riemann-Lebesgue 引理) 若 $f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积或者在反常积分意义下绝对可积,则有

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0,\\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\right\} \tag{11.2.9}$$

证明 (1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积.

首先将区间$[a,b]$进行分割

$$\pi: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

其中,$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,m_i,M_i 分别为$[x_{i-1},x_i]$上函数 $f(x)$所对应的下确界和上确界,令

$$\omega_i=M_i-m_i,$$

则有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-m_i)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x+\int_{x_{i-1}}^{x_i}m_i\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right]\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}|(f(x)-m_i)|\,\mathrm{d}x+|m_i|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\frac{2}{|\lambda|}\sum_{i=1}^{n}|m_i|.$$

$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界，所以$\sum_{i=1}^{n}|m_i|$有界，进一步，由积分的达布上和与下和定理，对任意的$\varepsilon>0$，存在分割π，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于上述取定的分割π，当

$$\lambda>\frac{4\sum_{i=1}^{n}|m_i|}{\varepsilon}=\lambda_0,$$

有

$$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 综上所述，当$\lambda>\lambda_0$时，有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$.

(2) 如果$f(x)$在$[a,b]$上反常积分意义下绝对可积，设b为唯一瑕点，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\eta<\delta$时

$$\int_{b-\eta}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于固定的η，由于$f(x)$在$[a,b-\eta]$上 Riemann 可积，根据定理(1)的证明，存在实数$A>0$，当$\lambda>A$时，有

$$\left|\int_a^{b-\eta}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^{b-\eta}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_{b-\eta}^{b}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

所以有$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$，同理，可以证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$.

下面给出定理 11.2.1 的证明. 设

$$\varphi(t)=\frac{f(x+0)-f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{f(x+0)-f(x+t)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

则

$$\lim_{t\to0+}\varphi(t)=-f'(x+0).$$

可见,$\varphi(t)$在$t=0$点右连续.根据已知条件$f(x)$是分段光滑函数,因此,$\varphi(t)$在$[0,\pi]$上至多有有限个第一类间断点,故可积.由 Riemann-Lebesgue 引理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

因此,式(11.2.7)可以证明成立,同理式(11.2.8)可以证明,定理 11.2.1 得以证明.

由定理 11.2.1 可以知道,与 Taylor 公式相比,Fourier 级数的逐点收敛条件要弱得多,同时对函数的整体逼近效果更好,因此 Fourier 级数成为应用更广泛的数学工具,它在声学、光学、热力学、电学、信号处理等领域中有着广泛的应用. Fourier 级数理论在现代分析中具有重要的核心作用.

下面给出更弱条件下的收敛定理,读者可以查阅相关书籍,研究证明方法.

定理 11.2.2 设函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或者反常积分意义下绝对可积,并且满足下面条件之一,则$f(x)$的 Fourier 级数收敛于$f(x)$的左右极限的平均值,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

(1) **(Direchlet-Jordan 判别法)** $f(x)$在点x的某个邻域内$U(x;\delta)$是分段单调有界的函数;

(2) **(Direchlet-Lipschitz 判别法)** $f(x)$在点x满足指数为$\alpha\in(0,1]$的 Hölder 条件.

其中,分段单调有界函数和 Hölder 条件的定义分别在定义 11.2.2 和定义 11.2.3 中给出.

定义 11.2.2(分段单调有界函数) 设$f(x)$在$I=[a,b]$上有定义,如果在I上存在有限个点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使$f(x)$在(x_{i-1},x_i),$i=1,2,\cdots,n$上是单调函数,则称$f(x)$在$I=[a,b]$上是分段单调函数.

定义 11.2.3(Hölder 条件) 设$f(x)$在点x连续或者存在第一类间断点,且对充分小的正数δ,存在常数$L>0$和$\alpha\in(0,1]$,使

$$|f(x\pm u)-f(x\pm0)|\leqslant Lu^\alpha,\quad(0<u<\delta).$$

则称$f(x)$在点x满足指数为α的 Hölder 条件.特别地,当$\alpha=1$时,称为 Lipschitz 条件.

注意,定理 11.2.2 中函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积是指 Riemann 可积,绝对可积

是指如果 $f(x)$ 无界，其相应的瑕积分绝对可积. 定理 11.2.2 表明，在点 x 的 Fourier 级数是否收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 与点 x 的充分小的邻域内 $f(x)$ 的性质有关，实际上揭示了 Fourier 级数收敛的局部性质.

由 Riemann-Lebesgue 引理，可以得到 Fourie 级数系数的性质.

定理 11.2.3 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者绝对可积，则其 Fourier 级数的系数满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

定理 11.2.4 给出 Fourie 级数的逐项微分性质.

定理 11.2.4（Fourie 级数的逐项微分定理） 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或者绝对可积，其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

则对任意 $x,c \in [-\pi,\pi]$ 有

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_c^x \cos nt\,\mathrm{d}t + b_n \int_c^x \sin nt\,\mathrm{d}t\right). \tag{11.2.10}$$

定理 11.2.4 表明，即使 $f(x)$ 的 Fourie 级数不收敛，式(11.2.10)仍然成立，它的逐项积分收敛到 $f(x)$ 的积分，这是 Fourier 级数特有的性质.

下面就 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个第一类间断点为例进行证明. 更一般情况的证明从略，读者可以查阅相关专著，研究证明方法.

证明 考虑函数

$$F(x) = \int_c^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t, \quad x,c \in [-\pi,\pi],$$

则 $F(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，根据微积分的基本定理，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的连续点有 $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$，在第一类不连续点处有

$$F'(x+0) = f(x+0) - \frac{a_0}{2}, \quad F'(x-0) = f(x-0) - \frac{a_0}{2}.$$

可见 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是分段光滑函数. 由定理 11.2.1 得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

且

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}F(x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

同理,可得 $B_n=\frac{a_n}{n}$,于是得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),$$

$$F(c)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nc+\frac{a_n}{n}\sin nc\right)=0,$$

将上面两个式子相减得

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t=\int_c^x\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_c^x\cos nt\,\mathrm{d}t+b_n\int_c^x\sin nt\,\mathrm{d}t\right),$$

因此,定理 11.2.4 得证.

11.2.2 Fourier 级数平方收敛

定理 11.2.1 和定理 11.2.2 给出 Fourier 级数逐点收敛的条件. 本节讨论更一般的情况,即 Fourier 级数平方逼近问题. 首先引入函数内积的概念.

设 $R[a,b]$是在$[a,b]$上 Riemann 可积函数的集合. 在 $R[a,b]$中定义内积运算

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad \forall f,g\in R[a,b]$$

和范数

$$\| f\|_2=\sqrt{(f,f)}=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,\quad \forall f\in R[a,b].$$

根据定积分的运算性质,有下面结论:

(1) $(f,g)=(g,f)$;

(2) $(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,g)=\alpha_1(f_1,g)+\alpha_2(f_2,g)$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$.

定义 11.2.4(最佳平方逼近问题) 设函数 $f(x)\in R[a,b]$,函数 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,…,$\phi_n(x)\in R[a,b]$,并且任意两个函数在$[a,b]$上是正交的,记函数集合

$$\begin{aligned}T&=\mathrm{span}\{\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)\}\\&=\left\{\phi(x)\,\middle|\,\phi(x)=\sum_{k=1}^{n}c_i\phi_i(x)\ ,\forall c_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\right\}.\end{aligned}$$

集合 T 实际上是由函数组 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)$的任意线性组合构成的,称为 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)$张成的空间. 在 T 中,若存在函数 ϕ^* 满足

$$\| f-\phi^*\|_2=\min_{\forall\phi\in T}\| f-\phi\|_2,\tag{11.2.11}$$

称 ϕ^* 为函数 $f(x)$的最佳平方逼近函数. 如果

$$T=\mathrm{span}\{1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx\},\quad x\in[-\pi,\pi].\tag{11.2.12}$$

则有下面定理 11.2.5.

定理 11.2.5(Fourier 级数平方逼近) 设 $f(x)\in R[a,b]$,则 $f(x)$在式(11.2.12)的集合 T 中的最佳平方逼近元为

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{11.2.13}$$

其中,$a_0,a_k,b_k,k=1,2,\cdots,n$ 为 $f(x)$的 Fourier 系数. 逼近误差为

$$\| f-S_n \|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]. \tag{11.2.14}$$

证明 任取 $T_n=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\in T$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x.$$

而

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x+\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{\pi a_0\alpha_0}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k).\end{aligned} \tag{11.2.15}$$

进一步,由三角函数系的正交性, 得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2\mathrm{d}x\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right).\\ &=\frac{\pi\alpha_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).\end{aligned} \tag{11.2.16}$$

由式(11.2.15)和式(11.2.16)得

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi a_0\alpha_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)+\frac{\pi\alpha_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]\\ &\quad-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].\end{aligned}$$

因此,当 $\alpha_k=a_k,\beta_k=b_k,k=0,1,2,\cdots,n$ 时满足式(11.2.11), 最佳平方逼近元为$f(x)$的 Fourier 级数的前 n 项和