圣才考研网®
www.100exam.com

【圣才考研】—考研考博专业课辅导中国第一品牌

国内外经典教材辅导系列·经济类

尼科尔森《微观经济理论－基本原理与扩展》(第9版)笔记和课后习题详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·经济类

尼科尔森
《微观经济理论——基本原理与扩展》
（第9版）
笔记和课后习题详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是与尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》配套的学习辅导书。本书基本遵循第9版的章目编排，共分21章，每章包括两部分：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分是课(章)后习题详解，对第9版的所有习题都进行了详细的分析和解答。

圣才考研网(www.100exam.com)提供全国所有高校各个专业的考研考博辅导班(保过班、面授班、网授班等)、尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》等国内外经典教材名师讲堂(详细介绍参见本书书前彩页)。购书享受大礼包增值服务【100元网授班+20元真题模考+20元圣才学习卡】。本书特别适用于各大院校学习尼科尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》的师生，以及在高校(主要是北京大学等名校)硕士和博士研究生入学考试中参加微观经济学考试科目的考生使用，也可供各大院校学习中级微观经济学的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

尼克尔森《微观经济理论——基本原理与扩展》(第9版)笔记和课后习题详解/圣才考研网主编．—2版．—北京：中国石化出版社，2011.10
国内外经典教材辅导系列
ISBN 978-7-5114-1229-4

Ⅰ.①尼… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①微观经济学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①F016

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第203978号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail：press@sinopec.com.cn
北京富生印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 18印张 4彩插 427千字
2011年11月第2版 2011年11月第1次印刷
定价：48.00元

《国内外经典教材辅导系列》

编　委　会

序　言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂和题库。

尼科尔森的《微观经济理论——基本原理与扩展》是世界上最受欢迎的中级微观经济学教材之一，被国内部分院校(主要是北京大学等名校)指定为考研考博参考书。作为该教材的辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 浓缩内容精华，整理名校笔记。本书每章的复习笔记对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授尼科尔森的《微观经济理论——基本原理与扩展》的课堂笔记，因此，本书的内容几乎浓缩了经典教材的知识精华。

2. 解析课后习题，总结知识考点。国内外教材一般没有提供课(章)后习题答案或者答案很简单，本书参考国外教材的英文答案和相关资料对每章的习题进行了详细的分析，并对该章的重要知识点进行了归纳。

3. 补充相关要点，强化专业知识。一般来说，国外英文教材的中译本不太符合中国学生的思维习惯，有些语言的表述不清或条理性不强而给学习带来了不便，因此，对每章复习笔记的一些重要知识点和一些习题的解答，我们在不违背原书原意的基础上结合其他相关经典教材进行了必要的整理和分析。

4. 习题采用中英对照，强化专业英语。为了更好地学习经济学专业英语和深刻理解每一道习题的原意，课后习题一般采用了中英对照的方式；而参考答案采用中文解答，这样便于读者更好地掌握考点，以获得较好的复习效果。

需要特别说明的是：我们深深感谢尼科尔森教授和汤姆森学习出版集团为我们提供了这样一本优秀的经济学教材，还要感谢北京大学出版社为我们提供了中文版(第9版)。

圣才学习网编辑部

目　录

第1篇　引言

第1章　经济模型 …………………………………………………………… (1)
1.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (1)
1.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (2)
第2章　最优化的数学表达 ……………………………………………… (3)
2.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (3)
2.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (5)

第2篇　选择与需求

第3章　偏好与效用 ……………………………………………………… (15)
3.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (15)
3.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (18)
第4章　效用最大化与选择 ……………………………………………… (27)
4.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (27)
4.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (31)
第5章　收入效应和替代效应 …………………………………………… (42)
5.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (42)
5.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (48)
第6章　商品间的需求关系 ……………………………………………… (57)
6.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (57)
6.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (58)

第3篇　生产与供给

第7章　生产函数 ………………………………………………………… (66)
7.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (66)
7.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (71)
第8章　成本函数 ………………………………………………………… (82)
8.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (82)
8.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (86)
第9章　利润最大化 ……………………………………………………… (97)
9.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (97)
9.2　课后习题详解 ………………………………………………………… (100)

第4篇　竞争性市场

第10章　竞争性价格决定的局部均衡模型 ……………………………… (109)
10.1　复习笔记 ……………………………………………………………… (109)

10.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (112)
第 11 章　应用竞争分析 …………………………………………………… (122)
11.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (122)
11.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (125)
第 12 章　一般均衡和福利 ………………………………………………… (136)
12.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (136)
12.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (140)

第 5 篇　不完全竞争模型

第 13 章　垄断市场模型 …………………………………………………… (155)
13.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (155)
13.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (160)
第 14 章　不完全竞争市场的传统模型 ………………………………… (171)
14.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (171)
14.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (174)
第 15 章　博弈定价模型 …………………………………………………… (185)
15.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (185)
15.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (189)

第 6 篇　要素市场定价

第 16 章　劳动市场 ………………………………………………………… (199)
16.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (199)
16.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (202)
第 17 章　资本市场 ………………………………………………………… (213)
17.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (213)
17.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (215)

第 7 篇　不确定性、信息和外部性

第 18 章　不确定性和风险厌恶 ………………………………………… (226)
18.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (226)
18.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (229)
第 19 章　信息经济学 ……………………………………………………… (240)
19.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (240)
19.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (245)
第 20 章　外部性与公共品 ………………………………………………… (254)
20.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (254)
20.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (258)
第 21 章　政治经济学 ……………………………………………………… (269)
21.1　复习笔记 ………………………………………………………………… (269)
21.2　课后习题详解 …………………………………………………………… (271)

第1篇 引 言

第1章 经济模型

1.1 复习笔记

1. 经济模型

(1)经济模型的含义

经济模型是一种分析方法，它极其简单地描述现实世界的情况。现实世界的情况是由各种主要变量和次要变量构成的，非常错综复杂，因而除非把次要的因素排除在外，否则就不可能进行严格的分析，或使分析复杂得无法进行。通过作出某些假设，可以排除许多次要因素，从而建立起模型，便于进行分析。

(2)经济模型的一般特征

①“其他条件不变”的假设；

②经济决策者寻求某项最优化的假设；

③准确地区分“实证性”和“规范性”问题。

(3)检验经济模型的方法

用于验证经济模型的一般方法有两种：①直接法，即检验作为模型基础的基本假设是否成立；②间接法，即看所抽象出的模型对现实预测的有效性。

2.“水与钻石悖论”

亚当·斯密在《国富论》指出“具有极大使用价值的东西往往只有很少的或没有交换价值，相反，那些具有极大交换价值的东西往往很少或没有使用价值。再没有比水更有用的东西了，但水却不能购买任何东西，没有东西和水交换。相反，钻石几乎没有使用价值，却十分昂贵。”由此引出了水与钻石悖论。

英国经济学家马歇尔从需求和供给两方面来共同解释了该悖论：

从需求一方看，价格取决于商品的边际效用，而不是总效用。对于水，水源充足，人们对水的消费量大，因而其边际效用很小，价格也就很便宜。同理，人们对钻石的边际效用很大，其价格也就相应地昂贵。

从供给一方看，由于水源充足，生产人类用水的成本很低，因而其价格也低。钻石则很稀缺，生产钻石的成本也很大，因而钻石很昂贵。

综合需求和供给两方面，则水便宜，钻石昂贵。即虽然水的使用价值极大，却没有交换价值；而钻石几乎没有使用价值，却可以交换大量的其他商品。

3. 经济均衡

(1)局部均衡模型

局部均衡模型是一种经济分析方法，指在其他情况不变的情况下，仅考察经济生活在一定时间的某个变数对有关经济变量的影响的分析方法。其特点是以单个的生产者和消费者为

分析的对象，而不考虑它同其他生产者或消费者之间的相互影响。英国著名经济学家马歇尔在其价值论和分配论的阐释中运用了这种分析方法。

(2)一般均衡模型

一般均衡模型是法国经济学家瓦尔拉斯创立的。瓦尔拉斯认为，整个经济体系处于均衡状态时，所有消费品和生产要素的价格将有一个确定的均衡值，它们的产出和供给，将有一个确定的均衡量。他还认为在“完全竞争”的均衡条件下，出售一切生产要素的总收入和出售一切消费品的总收入必将相等。该理论的实质是说明资本主义经济可以处于稳定的均衡状态。在资本主义经济中，消费者可以获得最大效用，企业家可以获得最大利润，生产要素的所有者可以得到最大报酬。

1.2 课后习题详解

本章没有课后习题。本章是全书的一个导言，主要要求读者对微观经济模型有一个整体了解，然后在以后各章的学习中逐渐深化认识。

第2章 最优化的数学表达

2.1 复习笔记

1. 一元函数最大值问题

假设企业所获得的利润(π)仅取决于出售商品的数量(q)，它的数学表达为 $\pi=f(q)$，则利润最大化的产量 q 必须满足以下两个条件：

(1)最大化的一阶条件(必要条件)：对于上述一元函数，如果在某一点 q^* 取到最大值，它在该点的导数(如果存在)必为零，即$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q^*}=0$。

(2)最大化的二阶条件(必要条件)：在满足一阶导数等于零的条件下，并不能保证该点为极大值点，还必须满足二阶导数小于零，即$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q^*}\left.f'(q)\right|_{q=q^*}<0$。

上述两个条件同时满足才够成最大化的充分条件。

2. 多元函数最大值问题

函数$f(x_1, x_2, ..., x_n)$取最大值(或者最小值)的必要条件是，对于任意 x 的微小变化的组合都有 $\mathrm{d}y=0$，这样该点必有：$f_1=f_2=....=0$，此为极值的一阶条件，但这个条件并不能保证最大化，还需要考察该点的二阶偏导数，只有满足某些条件才能保证最大化。

3. 包络定理

在经济分析中，人们常常要考察经济中的某些参数的变化对目标函数(最大值)的影响，如一商品价格的变化对消费者的效用的影响，一投入要素价格的变化(或要素禀赋的变动)对厂商收入(或利润)的影响，此时，包络定理为这种分析提供了方便。

考察如下一个最优化问题：

$$\max_x f(x, \alpha)$$
$$s.t.\ g(x, \alpha)=0$$

其中，x 为 n 维向量，参数 α 为 m 维向量。

定义值函数和拉格朗日函数分别为：

$$V(\alpha)=\max_x\{f(x, \alpha) \mid g(x, \alpha)=0\}=f[x(\alpha), \alpha]$$
$$L(x, \alpha; \lambda)=f(x, \alpha)-\lambda g(x, \alpha)$$

包络定理可以表示为：

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}=L_{\alpha_k}(x, \alpha)\bigg|_{x^*}$$

即参数 α_k 对最大值函数(目标函数的最大值)的影响，就等于拉格朗日函数直接对参数 α_k 求偏导数，并且在最优解 x^* 处取值。

4. 条件极值

解具有约束条件求最大化问题的一种方法是拉格朗日乘数法。假设求解 x_1，x_2，…，x_n

的值，以便最大化下式：

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中部分自变量是有限制的，但可以将约束条件一般性地记为：

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

其中函数 g 表示所有 x 满足的关系。

构造拉格朗日函数：

$$\xi=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

有一阶条件为：

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1}=f_1+\lambda g_1=0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_2}=f_2+\lambda g_2=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_n}=f_n+\lambda g_n=0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$$

上述方程能够解出 x_1，x_2，…，x_n 和 λ 的值。此解满足两个性质：第一，x 服从约束条件；第二，所有这些服从约束条件的 x 使得 ξ(与 f) 尽可能大。

5. 约束条件下的最大化问题中的包络定理

假设求解以下函数的最大值：

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$$

其变量服从约束条件：

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)=0$$

函数 f 与 g 对参数 a 具有依赖性。求解这个问题的一种方法是建立拉格朗日表达式：

$$\xi=f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)+\lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$$

求解最优值 x_1^*，…，x_n^* 的一阶条件，它可以表示为：

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial \xi}{\partial a}(x_1^*, \ldots, x_n^*; a)$$

即当参数 a 的改变(与所有重新计算的 x' 的最优值)导致 y 的最优值的改变可由对拉格朗日表达式求偏导数，再将极值点的数据代入得到。因此，拉格朗日表达式在计算约束条件下的问题和没有约束条件的问题应用包络定理时起一样的作用。

6. 齐次函数

对于一个多元函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，如果对于任意正数 t，满足：

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

则称其为 k 次齐次函数。

(1) 齐次函数的偏导数

一个 k 次齐次可微函数的各个偏导数是 $k-1$ 次齐次的。例如，对齐次函数表达式关于 x_1 求偏导数，有：

$$\frac{\partial f(tx_1, \cdots, tx_n)}{\partial x_1}\cdot t=t^k\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1}$$

$$f_1(tx_1, \cdots, tx_n) = t^{k-1} f_1(x_1, \cdots, x_n)$$

可见f_1是满足 $k-1$ 次齐次的定义的。

(2)欧拉定理

齐次函数的一个重要性质是对因子 t 求偏导得到的。对齐次函数表达式的两边分别对 t 求偏导得：

$$kt^{k-1} f_1(x_1 \cdots x_n) = x_1 f_1(tx_1 \cdots tx_n) + \cdots + x_n f_n(tx_1 \cdots tx_n)$$

令 $t=1$，有

$$kf_1(x_1 \cdots x_n) = x_1 f_1(x_1 \cdots x_n) + \cdots + x_n f_n(x_1 \cdots x_n)$$

这就是齐次函数的欧拉定理。它说明了对于齐次函数，其函数值与其各个偏导数之间有确定的关系。

(3)位似函数

齐次函数经过任意的单调映射得到的函数称之为位似函数。位似函数保持了原函数自变量到函数值对应的序关系。即对于函数，如果一组自变量对应的函数值大于另一组的，那么经过单调映射后前者的函数值仍大于后者。但是由于单调映射有很多可能的形式，原齐次函数的很多性质是不能保持的。

2.2 课后习题详解

1. 假设 $U(x, y) = 4x^2 + 3y^2$。

(1)计算偏导数 $\partial U/\partial x$，$\partial U/\partial y$。

(2)求出上述偏导数在 $x=1$，$y=2$ 处的值。

(3)写出 U 的全微分。

(4)计算 $dU=0$ 时 dy/dx 的值——这意味着当 U 保持不变时，x 与 y 的替代关系是什么?

(5)验证：当 $x=1$，$y=2$ 时，$U=16$。

(6)当保持 $U=16$ 时，且偏离 $x=1$，$y=2$ 时，x 和 y 的变化率是多少?

(7)更一般的，当 $U=16$ 时，该函数的等高线是什么形状的? 该等高线的斜率是多少?

Suppose $U(x, y) = 4x^2 + 3y^2$.

a. Calculate $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$.

b. Evaluate these partial derivatives at $x=1$, $y=2$.

c. Write the total differential for U.

d. Calculate dy/dx for $dU=0$——that is, what is the implied trade-off between x and y holding U constant?

e. Show $U=16$ when $x=1$, $y=2$.

f. In what ratio must x and y change to hold U constant at 16 for movements away from $x=1$, $y=2$?

g. More generally, what is the shape of the $U=16$ contour line for this function? What is the slope of that line?

解：(1)对于函数 $U(x, y) = 4x^2 + 3y^2$，其关于 x 和 y 的偏导数分别为：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6y$$

(2)当 $x=1$，$y=2$ 时，(1)中的偏微分值分别为：

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=8,\ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=2}=12$$

(3) U 的全微分为：

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=8xdx+6ydy$$

(4)当 $dU=0$ 时，由(3)可知：$8xdx+6ydy=0$，

从而可以解得：$\frac{dy}{dx}=\frac{-8x}{6y}=\frac{-4x}{3y}$

(5)将 $x=1$，$y=2$ 代入 U 的表达式，可得：$U=4\times1+3\times4=16$。

(6)由(4)可得，在 $x=1$，$y=2$ 处，当保持 $U=16$ 不变，即 $dU=0$ 时，有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4\times1}{3\times2}=-2/3$$

(7)当 $U=16$ 时，该函数变为：$4x^2+3y^2=16$，因而该等高线是一个中心在原点的椭圆。由(4)可知，该等高线在(x，y)处的斜率为：$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{3y}$。

2. 假定公司的总收益取决于产量(q)，即总收益函数为：$R=70q-q^2$；
总成本也取决于产量(q)：$C=q^2+30q+100$。
(1)为了使利润($R-C$)最大化，公司的产量水平应该是多少？利润是多少？
(2)验证：在(1)中的产量水平下，利润最大化的二阶条件是满足的。
(3)此处求得的解满足"边际收益等于边际成本"的准则吗？请加以解释。

Suppose a firm's total revenues depend on the amount produced (q) according to the function

$$R=70q-q^2$$

Total costs also depend on q:

$$C=q^2+30q+100$$

a. What level of output should the firm produce in order to maximize profits ($R-C$)? What will profits be?

b. Show that the second-order conditions for a maximum are satisfied at the output level found in part (a).

c. Does the solution calculated here obey the "marginal revenue equals to marginal cost" rule? Explain.

解：(1)公司的利润为：

$$\pi=R-C=-2q^2+40q-100$$

利润最大化的一阶条件为：

$$\frac{d\pi}{dq}=-4q+40=0$$

从而可以解得利润最大化的产量为：$q^*=10$；
相应的最大化的利润为：$\pi^*=-2\times10^2+40\times10-100=100$。

(2)在 $q^*=10$ 处，利润最大化的二阶条件为：$\frac{d^2\pi}{dq^2}=-4<0$，因而利润最大化的二阶条件满足。

(3)在 $q^* = 10$ 处，边际收益为：$MR = \dfrac{dR}{dq} = 70 - 2q^* = 70 - 2 \times 10 = 50$；

边际成本为：$MC = \dfrac{dC}{dq} = 2q + 30 = 2 \times 10 + 30 = 50$；

因而有 $MR = MC = 50$，即"边际收益等于边际成本"准则满足。

3. 假设 $f(x, y) = xy$。如果 x 与 y 的和是 1，求此约束下 f 的最大值。利用代入消元法和拉格朗日乘数法两种方法来求解此问题。

Suppose that $f(x, y) = xy$. Find the maximum value for f if x and y are constrained to sum to 1. Solve this problem in two ways: by substitution and by using the Langrangian multiplier method.

解：(1)代入消元法

由 $x + y = 1$ 可得：$y = 1 - x$，将其代入 f 可得：$f = xy = x - x^2$，

从而有：$\dfrac{df}{dx} = 1 - 2x = 0$，可以解得：$x = 0.5$，$y = 0.5$，$f = 0.25$。

(2)拉格朗日乘数法

由(1)可知 $f'' = -2 < 0$，因而此问题是一个受约束的全局优化问题，同时也是一个局部最优化问题。

设拉格朗日函数为：$L = xy + \lambda(1 - x - y)$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x - y = 0$$

从而可以解得：$x = y = 0.5$，因而有：$f = xy = 0.25$。

4. 上述第 3 题的对偶问题是：

$$\min \quad x + y$$
$$s.t. \quad xy = 0.25$$

利用拉格朗日乘数法求解上述最小化问题。将此通过拉格朗日乘数法求得的最小化问题的解与第 3 题中求得的解进行比较。解释两种情况下的解之间的关系。

The dual problem to the one described in Problem 2. 3 is

Minimize $x + y$

Subject to $xy = 0.25$

Solve this problem using the Lagrangian technique. Then compare the value you get for the Lagrangian multiplier to the value you got in Problem 2. 3. Explain the relationship between the two solutions.

解：(1)设最小化问题的拉格朗日函数为：

$$L = x + y + \lambda(0.25 - xy)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.25-xy=0$$

从而有：$x=y$，$xy=x^2=0.25$，从而可以解得：$x=y=0.5$。

(2)将本题与第3题进行比较可知，两种情况下求得的x，y的值是一样的。因此，第3题中受约束的最大化问题是本题中受约束的最小化问题的一个对偶问题。

5. 以一定的力垂直上抛的小球的高度是其被抛出时间(t)的函数：

$$f(t)=-0.5gt^2+40t$$

其中，g是由重力所决定的常数。

(1)小球处于最高处的时间t如何取决于参数g?

(2)利用你在(1)问中的答案来描述：随着参数g的变化，小球的最大高度如何变化。

(3)利用包络定理直接给出(2)问中的答案。

(4)在地球上，$g=32$，但是这个值在某些地区会有差异。如果两个地方重力加速度的差异为0.1，则在上述两个地区所抛出的小球的最大高度之间的差异是多少?

The height of a ball that is thrown straight up with a certain force is a function of the time (t) from which it is released given by $f(t)=-0.5gt^2+40t$ (where g is a constant determined by gravity).

a. How does the value of t at which the height of the ball is at a maximum, depend on the parameter g?

b. Use your answer to part a to describe how maximum height changes as the parameter g changes.

c. Use the envelope theorem to answer part b directly.

d. On the Earth $g=32$, but this value varies somewhat around the globe. If two locations had gravitational constants that differed by 0.1, what would be the difference in the maximum height of a ball tossed in the two places?

解：(1)对高度函数$f(t)=-0.5gt^2+40t$关于时间求导数可得：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=-gt+40=0$$

从而可以解得使高度最大的时间为：$t^*=\frac{40}{g}$，从而可知小球处于最高处的时间t与参数g成反比例关系。

(2)将$t^*=\frac{40}{g}$代入高度函数中可得：

$$f(t^*)=-0.5g(40/g)^2+40(40/g)=800/g$$

从而有：$\frac{\partial f(t^*)}{\partial g}=-800/g^2<0$

即：随着g的增大，最大高度将变小。

(3)由包络定理可知：$\frac{\partial f}{\partial g}=-\frac{1}{2}(t^*)^2$取决于$g$，因为$t^*$取决于$g$。

因而有：$\frac{\partial f}{\partial g}=-0.5(t^*)^2=-0.5(\frac{40}{g})^2=\frac{-800}{g^2}<0$。

(4)当$g=32$时，最大高度为：$f=800/32=25$；

当 $g=32.1$ 时，最大高度为：$f'=800/32.1\approx24.92$；

因而两地最大高度的差异为：$\Delta f=f'-f=24.92-25=-0.08$。

6. 制作一个油轮模型的一个简单的方法是，首先选择一块宽为 x 英尺、长为 $3x$ 英尺的长方形钢板，接着在每个角处减去一个边长为 t 英尺的正方形，然后将叠起剩余的四边做成一个无盖的托盘。(如图 2－1 所示，去掉阴影部分的四个边长为 t 的正方形，然后叠起)

(1)验证：该托盘可装油的体积为：

$$V=t(x-2t)(3x-2t)=3tx^2-8t^2x+4t^3$$

(2) t 应该如何选择，才能使给定 x 下的 V 最大？

(3)是否存在一个 x 使得所装油的体积最大？

(4)假设一个造船商受到限制，只能用 1000000 平方英尺的钢板来建造一个油轮。该约束条件可以用方程 $3x^2-4t^2=1000000$ 来表示(因为可以将去掉的钢板做退回处理)。如何将该受约束的最大化问题的解与(2)和(3)问中的解进行比较？

A simple way to model the construction of an oil tanker is to start with a large rectangular sheet of steel that is x feet wide and $3x$ feet long. Now cut a smaller square that is t feet on a side out of each corner of the larger sheet and fold up and weld the sides of the steel sheet to make a traylike structure with no top.

a. Show that the volume of oil that can be held by this tray is given by $V=t(x-2t)(3x-2t)=3tx^2-8t^2x+4t^3$.

b. How should t be chosen so as to maximize V for any given value of x?

c. Is there a value of x that maximizes the volume of oil that can be carried?

d. Suppose that a shipbuilder is constrained to use only 1,000,000 square feet of steel sheet to construct an oil tanker. This constraint can be represented by the equation $3x^2-4t^2=1,000,000$ (because the builder can return the cut out squares for credit). How does the solution to this constrained maximum problem compare to the solutions described in parts b and c?

解：(1)如图 2－1 所示，长方形四个角处去掉一个边长为 t 的正方形后叠起来的托盘是一个长方体，该长方体的长为$(3x-2t)$，宽为$(x-2t)$，高为 t，因而其体积为：

$$V=t(x-2t)(3x-2t)=3tx^2-8t^2x+4t^3$$

(2) V 关于 t 求导数可得：$\dfrac{\partial V}{\partial t}=3x^2-16xt+12t^2=0$

从而可以解得：$t=\dfrac{16x\pm\sqrt{256x^2-144x^2}}{24}=\dfrac{16x\pm10.6x}{24}$

即：$t_1=0.225x$，$t_2=1.11x$

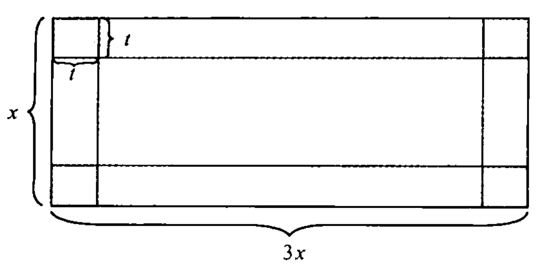

图 2－1　油轮模型的制作

二阶条件为：$\dfrac{\partial^2V}{\partial t^2}=-16x+24t$

因此，只有当 $t=0.225x$ 时，才有 $\dfrac{\partial^2V}{\partial t^2}=-16x+24t<0$，即只有当 $t=0.225x$ 才能使给定 x 下的 V 最大。

(3)当 $t=0.225x$ 时，$V\approx0.67x^3-0.04x^3+0.05x^3\approx0.68x^3$。因而当 x 增大时，V 随之

增大，没有极限。因此，不存在一个 x 使得所装油的体积最大。

(4)受约束的最优化问题为：

$$\max\ V=3tx^2-8t^2x+4t^3$$
$$s.t.\ 3x^2-4t^2=1000000$$

设拉格朗日函数为：

$$L=3tx^2-8t^2x+4t^2+\lambda(1000000-3x^2+4t^2)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial t}=3x^2-16tx+8t+8\lambda t=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=6tx-8t^2-6\lambda t=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=1000000-3x^2+4t^2=0$$

从而可以利用拉格朗日乘数法求得最优的 t^*、x^*。显然，该受约束的最大化问题的解将有别于(2)和(3)中求解出来的解。

7. 考虑如下受约束的最优化问题：

$$\max\quad y=x_1+5\ln x_2$$
$$s.t.\quad k-x_1-x_2=0$$

其中 k 是一个可以被赋予任何特定值的常数。

(1)验证：如果 $k=10$，则此问题可以视为仅包括一个等式约束的问题的求解。

(2)验证：当 $k=4$ 时，此问题的解要求 $x_1=-1$。

(3)如果此问题的解 x 须为非负，则当 $k=4$ 时，最优解是什么？

(4)当 $k=20$ 时，此问题的解是什么？通过将此解与(1)问中的解比较，你可以得出什么结论？

(注意：此问题涉及所谓的"拟线性函数"。这样的函数提供了消费者理论中的某些类型的消费行为的重要例子。)

Consider the constrained maximization problem:

$$\text{maximize } y=x_1+5\ln x_2$$
$$\text{Subject to } k-x_1-x_2=0$$

where k is a constant that can be assigned any specific value.

a. Show that if $k=10$, this problem can be solved as one involving only equality constraints.

b. Show that solving this problem for $k=4$ requires that $x_1=-1$.

c. If the x's in this problem must be nonnegative, what is the optimal solution when $k=4$?

d. What is the solution for this problem when $k=20$? What do you conclude by comparing this solution to the solution for part a?

(Note: This problem involves what is called a "quasi-linear function." Such functions provide important examples of some types of behavior in consumer theory—as we shall see.)

解：(1)设拉格朗日函数为：

$$L=x_1+5\ln x_2+\lambda(k-x_1-x_2)$$

一阶条件为：